Devoir maison 1

A sa grande surprise, Charlie vient d'être nommé responsable de la chocolaterie de son village.

Malheureusement, l'entreprise est en difficulté et Charlie doit trouver une solution pour que la production soit de nouveau rentable.

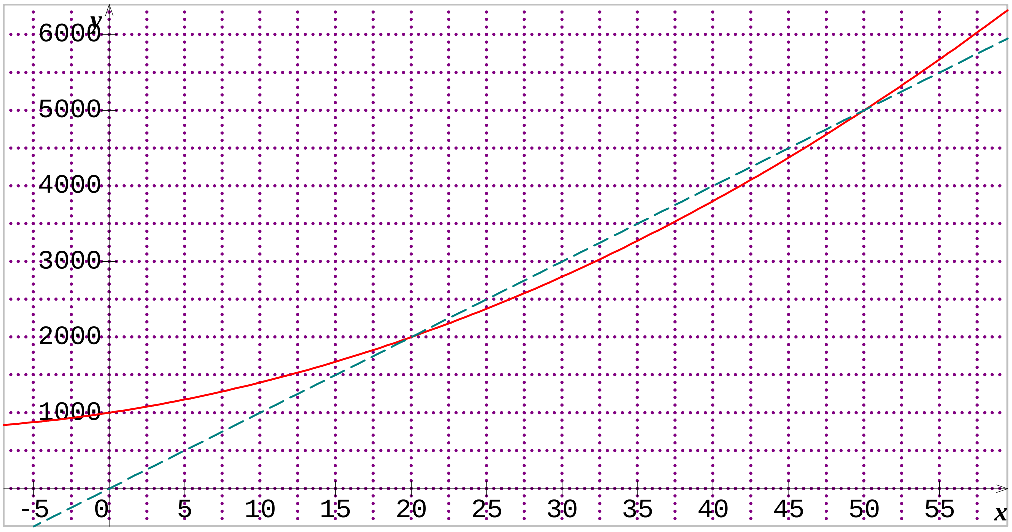
On note q la quantité de chocolat produite (en tonnes), avec $0 < q < 60$.

Charlie sait que le coût de production comme le chiffre d'affaire de son entreprise est fonction de la quantité produite.

Son objectif est double :

- Rendre la production rentable
- Maximiser le bénéfice de la chocolaterie.

Le graphique ci-dessous donne le coût de production ainsi que le chiffre d'affaire (en k€) en fonction de la quantité produite (en tonnes). La courbe est associée au coût, la droite en pointillée au chiffre d'affaire.



1.a. A partir de ce graphique, conjecturer la quantité de chocolat que doit produire la chocolaterie pour être rentable.

b. Conjecturer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximum.

2. Les formules donnant le coût $C(q)$ et le chiffre d'affaire $R(q)$ de la chocolaterie ont été calculées :

$C(q) = q^2 + 30q + 1000$ et $R(q) = 100q$

a. Justifier que l'entreprise fait du bénéfice pour une production de chocolat q si, et seulement si q est solution de l'inéquation : $-x^2 + 70x - 1000 \geqslant 0$

b. Montrer que cette inéquation équivaut à : $-(x-20)(x-50) \geqslant 0$

c. En déduire les valeurs de q pour lesquelles la chocolaterie de Charlie fait des bénéfices.

3. Soit la fonction polynôme de degré 2 définie par : $B(x) = -x^2 + 70x - 1000$

a. A quoi correspond concrètement la fonction B ?

b. Simplifier l'expression algébrique suivante : $f(x) = 225 - B(x)$

c. En quoi cette expression est-elle remarquable ?

d. Conclure sur le second objectif de Charlie.

Correction du DM1

1.a. Pour être rentable, il faut que le chiffre d'affaire soit supérieur au coût donc on cherche pour quelles valeurs de x, la courbe du chiffre d'affaire est au-dessus de la courbe du coût : $x \in [20 \,;\, 50]$.

La chocolaterie doit produire entre 20 et 50 tonnes de chocolat pour être rentable

b. Le bénéfice est maximum quand la différence entre le chiffre d'affaire et le coût est maximum donc on chercher pour quelle valeur de x dans $[20 \,;\, 50]$ l'écart entre la courbe du chiffre d'affaire et celle du coût est le plus grand et on trouve 35.

Donc pour que le bénéfice soit maximum la chocolaterie doit produire 35 tonnes de chocolat.

2.a. l'entreprise fait du bénéfice $\Leftrightarrow\ R(q) - C(q) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow\ 100q - (q^2 + 30\,q + 1000) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 100q - q^2 - 30q - 1000 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow - q^2 + 70q - 1000 \geqslant 0$

b. $-(x - 20)(x - 50) = -(x^2 - 20x - 50x + 1000) = - x^2 + 70x - 1000$

$- x^2 + 70x - 1000 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x - 20)(x - 50) \geqslant 0$

c.

x	0		20		50		60
-1		−		−		−	
x-20		−	0	+		+	
x-50		−		−	0	+	
-(x-20)(x-50)		−	0	+	0	−	

Donc la chocolaterie réalise des bénéfices pour une production comprise entre 20 et 50 tonnes.

3.a. La fonction B correspond au bénéfice que réalise la chocolaterie

b. $f(x) = 225 - B(x) = 225 + x^2 - 70x + 1000 = x^2 - 70x + 1225$

c. C'est une identité remarquable : $f(x) = (x - 35)^2$

d. $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0 \,;\, 60]$ car $f(x)$ est un carré. Donc $B(x)$ est toujours inférieur à 225 et est égal à 225 pour $x = 35$. Donc 225 est le maximum de $B(x)$ qui est atteint pour $x = 35$.

Finalement le bénéfice de la chocolaterie sera maximisé pour une production 35 tonnes de chocolat.