Introduction au calcul d’incertitudes

Il est impossible de connaître la valeur exacte d'une grandeur physique: il est très important de connaître l'incertitude (erreur) de la mesure.

Deux types d’erreurs:

erreurs systématiques: affectent le résultat constamment et dans le même sens. Eliminer, ou corriger le résultat, si possible!

erreurs accidentelles (statistiques): répéter les mesures, calculer la moyenne et évaluer l'incertitude en utilisant la statistique.

Incertitudes absolues et relatives

Si la vraie valeur d'une grandeur est a et la valeur mesurée est a_0, Δa est l'**incertitude absolue**: $a - \Delta a < a_0 < a + \Delta a$
Le résultat s'écrit: $a \pm \Delta a$ (a et Δa ont la même unité de mesure).

incertitude relative: $\dfrac{\Delta a}{a}$ (exprimée souvent en %).

Un résultat est toujours suivi de son incertitude.

L'unité de mesure doit toujours être indiquée.

Chiffres significatifs

1 ou 2 pour les incertitudes, même nombre pour les valeurs mesurées:

a = 134.462 ± 2.354 kg ✗

a = 134.462 ± 2 kg ✗

a = 134.5 ± 2.354367 kg ✗

a = 134.5 ± 2.4 kg ✓

a = 134 ± 2 kg ✓

a = 134.5 kg (à 1.8%) ✓

Un peu de statistique

Dans la plupart des mesures, on peut estimer l'erreur due à des phénomènes aléatoires par une série de *n* mesures:

$x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$

Valeur moyenne: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ Ecart moyen: $\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right|$

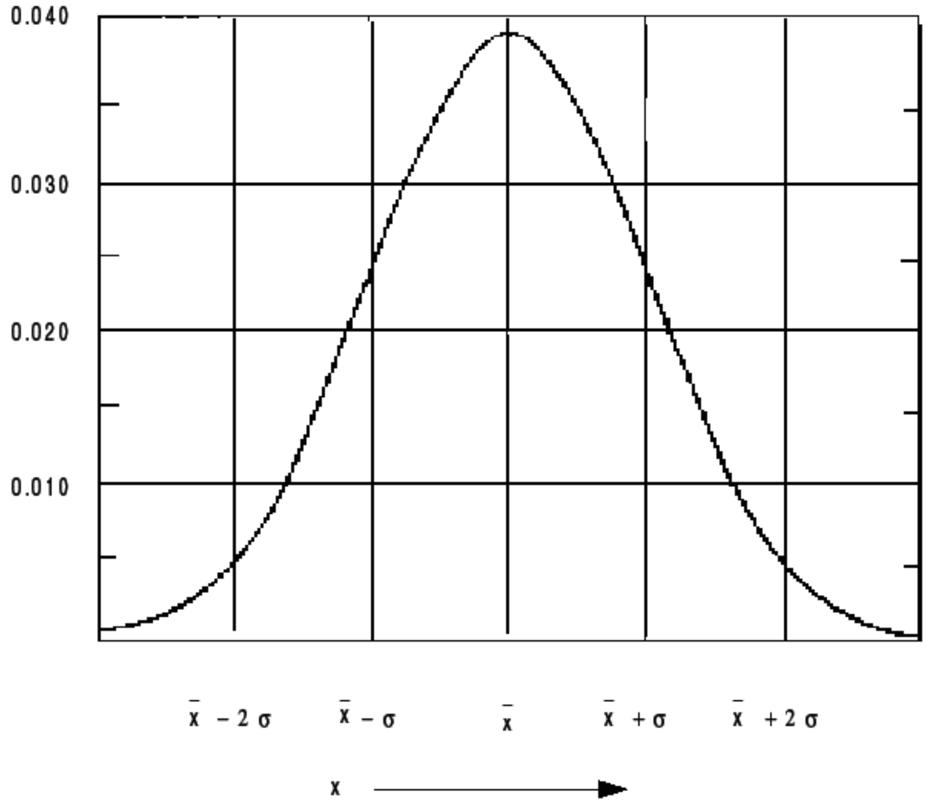
Ecart quadratique moyen ou écart type: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right|^2}$

σ^2: variance

Incertitude sur la moyenne: $\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right|^2}$

Distribution de Gauss (gaussienne)

Lorsque le nombre des mesures indépendantes, *n*, augmente, la distribution des mesures tend vers une gaussienne.



Probabilité pour la vraie valeur x_0:

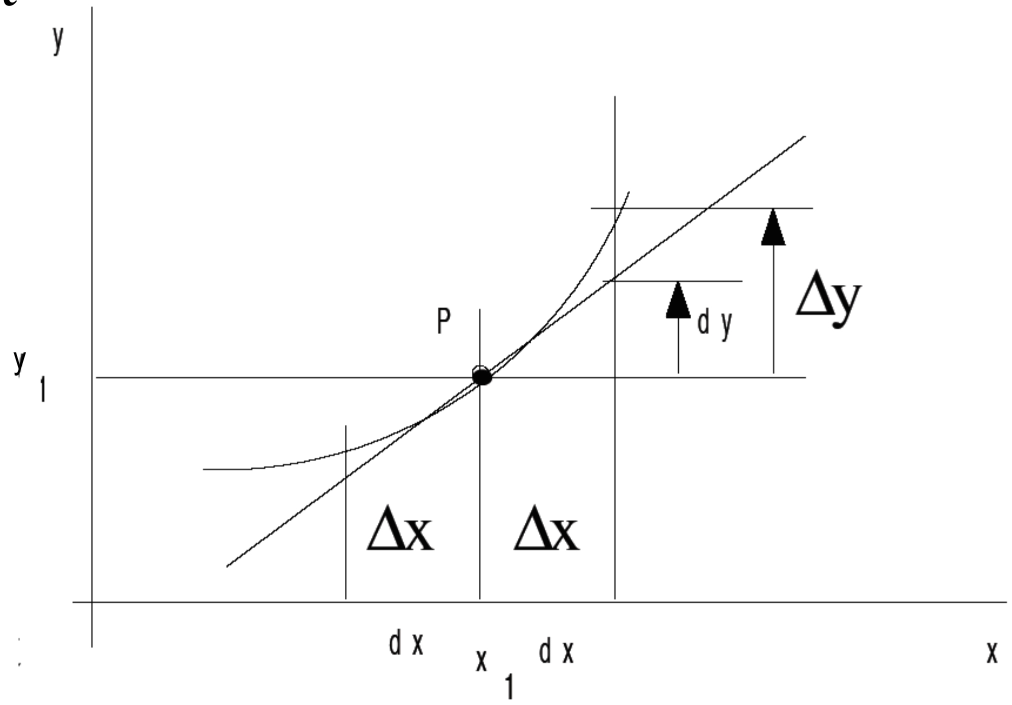
$\bar{x}-\sigma < x_0 < \bar{x}+\sigma$ 68%

$\bar{x}-2\sigma < x_0 < \bar{x}+2\sigma$ 95.5%

Propagation des incertitudes

Soient une mesure $x \pm \Delta x$ et $y = f(x)$ une fonction de x.
Quelle est l'incertitude sur y?
Lorsque Δx est petit, $f(x)$ est remplacé au voisinage de x par sa tangente:

$$\Delta y = \left|\frac{df}{dx}\right| \Delta x$$



On fait l'approximation $\Delta y = dy$, valable si Δx est petit et $f(x)$ varie " lentement".

Incertitude d'une fonction à plusieurs variables

Supposons que y dépende de plusieurs grandeurs x, z, t, mesurées avec les incertitudes Δx, Δz, Δt:

$y = f(x,z,\mathrm{t})$

L'erreur maximum possible sur y est:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\Delta t$$

Les dérivées partielles sont les dérivées de la fonction f par rapport à une variable, les autres variables étant considérées comme constantes.

Pratique

Addition: $y = x + z$

Soustraction: $y = x - z$

$$\boxed{\Delta y = \Delta x + \Delta z}$$

Multiplication: $y = xz$ $\quad \Delta y = z\Delta x + x\Delta z$

Division: $y = \dfrac{x}{z}$ $\quad \Delta y = \dfrac{z\Delta x + x\Delta z}{z^2}$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta z}{z}}$$

Les incertitudes absolues s'ajoutent pour l'addition et la soustraction.
Les incertitudes relatives s'ajoutent pour la multiplication et la division.

Exemple

Energie cinétique: $E = \frac{1}{2} m v^2$ m = masse, v = vitesse

on mesure $m = 9.5 \pm 1.8$ kg, $v = 7.35 \pm 0.23$ m/s

$$\Delta E = \left|\frac{\partial E}{\partial m}\right| \Delta m + \left|\frac{\partial E}{\partial v}\right| \Delta v = \frac{v^2}{2} \Delta m + m v \Delta v$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta v}{v} = \frac{1.8}{9.5} + 2 \frac{0.23}{7.35} = 0.25 = 25\%$$

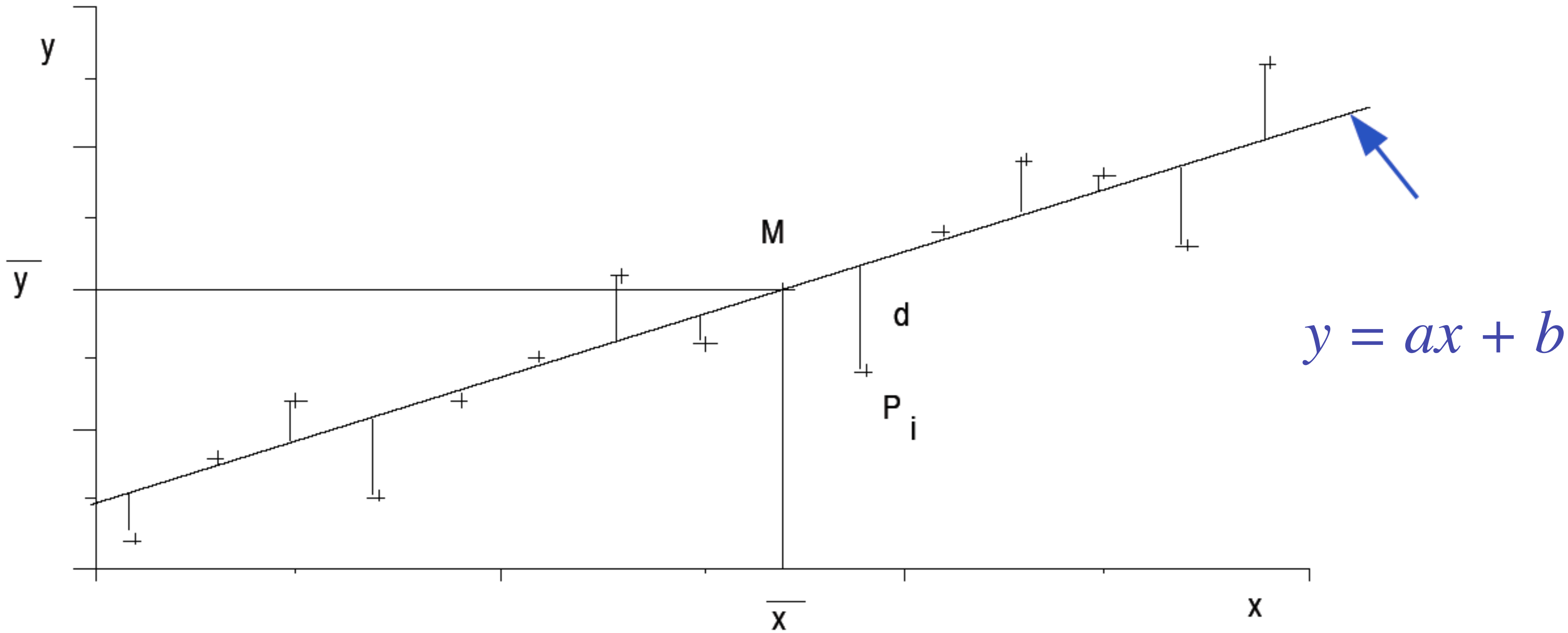
$E = 257 \pm 65$ kg m^2/s^2

Régression linéaire (1)

On mesure deux séries de grandeurs x_i et y_i .

Existe-t-il une fonction $y = f(x)$ qui traduit une relation entre le deux grandeurs?

Exemple: **droite de régression** $y = ax + b$ pour la quelle l'incertitude sur les x_i est négligeable, et l'incertitude sur les y_i est distribuée selon une gaussienne de σ inconnu.



En minimisant la somme des carrés des distances d des points à la droite (méthode des moindres carrés), on obtient l'équation:

$y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$ avec $(\bar{x}, \bar{y})$ les valeurs moyennes de x_i et y_i

pente a:
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

incertitude sur a:
$$\Delta a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}$$

ordonnée à l'origine *b*: $b = \bar{y} - a\bar{x}$

incertitude sur *b*: $$\Delta b = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\right)}$$

Régression linéaire (2)

Une **estimation graphique** est aussi possible:

La droite passe par le point $(\bar{x}, \bar{y})$

Pente: environ la moitié des points au dessus (resp. au dessous) de la droite

Incertitude: varier la pente de la droite passant par $(\bar{x}, \bar{y})$ de telle manière qu'elle passe par les extrémités de la barre d'erreur du point le plus à gauche (ou le plus à droite)