Exercice 1 (4 points)

PARTIE A

1 Pour retrouver en francs français un prix exprimé en euros, il faut multiplier cette valeur (en euros) par 6,55957, soit approximativement par 6,6.

Or 6,6 = $6 \times (1 + 0{,}1)$

Sachant que $6 \times (1 + 0{,}1) = 6 + (\frac{1}{10}´6)$

Méthode 1 :consiste à multiplier le prix par 6, puis à ajouter le dixième du produit obtenu.

Exemple d'application pour 40 euros : à 40 on fait correspondre 240 + 24.
On obtient donc par cette règle une valeur de 264 francs.

Méthode 2 : ajouter 1/10 au prix et multiplier par 6, mais ce n'est pas aussi simple.

2a : Transformons l'écriture fractionnaire de A :

$$A = \frac{1}{100 \times (1 + \frac{2}{3})} = \frac{1}{100 \times \frac{5}{3}} = \frac{3}{500} = \frac{6}{1000} = \frac{6}{10^3}$$

Il existe donc un entier p, p = 6, et un entier n, n = 3, tels que $A = \frac{p}{10^n}$

2b : Pour convertir en euro un prix affiché en pesetas, un espagnol doit diviser ce dernier prix par le nombre 166,386 (à 3 dixièmes d'unité près), un espagnol peut raisonnablement remplacer 166,356 par $\frac{1000}{6}$ car $166{,}386 \approx 100 \times (1 + \frac{2}{3})$

Ainsi, au lieu de devoir diviser le prix par un nombre décimal ayant une partie décimale de trois chiffres, il lui sera plus facile de diviser par $\frac{1000}{6}$, c'est à dire multiplier par $\frac{6}{1000}$.

Multiplier par ce nombre se fera en deux étapes, multiplier par 6, puis diviser par 1000, ou inversement.

Par exemple, 5 000 pesetas valent 30 euros environ.

PARTIE B

1a : $10x = 9{,}\overline{9}$ et $9 + x = 9{,}\overline{9}$

Ces deux nombres sont égaux

1b : Résolvons l'équation $10x = 9 + x$ soit $9x = 9$ donc $x = 1$

Ainsi $0{,}\overline{9} = 1$

2 : Solution1

Posons $x = 19{,}\overline{78}$ d'où $100x = 1978 + 0{,}\overline{78} = 1959 + 19 + 0{,}\overline{78}$

Ce qui amène à résoudre l'équation $100x = 1959 + x$ donc $99x = 1959$

D'où $x = \frac{1959}{99} = \frac{653}{33}$

Solution 2

Posons $x=0,\overline{78}$ d'où $100x=78,\overline{78}=78+0,\overline{78}$

ce qui amène à résoudre l'équation $100x=78+x$ donc $99x=78$ d'où $x=\dfrac{78}{99}=\dfrac{26}{33}$

On cherche $19,\overline{78}=19+x$

Ce qui donne $19+\dfrac{26}{33}=\dfrac{653}{33}$

Ainsi une écriture fractionnaire de $19,\overline{78}$ est $\dfrac{653}{33}$

Questions complémentaires **(4 points)**

Question 1

Objectif principal de chaque exercice.
Exercice 1 : connaître la valeur de chaque chiffre dans une écriture à virgule, en fonction de sa position.
Exercice 2 : savoir ranger des nombres décimaux écrits avec une virgule.
Exercice 3 : savoir situer exactement des nombres décimaux sur une droite graduée.
Exercice 4 : savoir intercaler des décimaux entre deux nombres donnés.

Question 2

Bertrand

Exercice 1 : Bertrand repère le chiffre des dixièmes. Il considère la partie décimale comme un nombre entier autonome. D'où : 13,61 + 2/10 = 13,81 est correcte alors que de 13,81 au suivant il additionne bien 2/10 à 8/10 et trouve 10/10 mais il n'intègre pas ce résultat à la partie entière. Il en va de même pour la suite.

Exercice 2 : Bertrand signale qu'il a inversé le rangement ; il faut donc lire :
7,1502 - 8,4 - 8,37 - 8,037 - 0,8127 - 8,127.
0,8127 apparaît comme une anomalie dans le raisonnement de Bertrand (possible prégnance des écritures contenant le chiffre 8 ? ressemblance à 8,127 ?).
Il range correctement les nombres lorsque les parties entières sont différentes (sauf l'anomalie).

Règle (incorrecte) que semble appliquer Bertrand :
En cas de parties entières égales, le nombre le plus grand est celui qui a le plus de chiffres après la virgule 8,4 < 8,37 < 8,037.
Et si les parties décimales ont le même nombre de chiffres, elles sont comparées comme des nombres entiers. Par exemple 037 < 127.

Exercice 4 :
a) Le résultat est correct ; il n'était pas demandé de mettre les trois nombres dans l'ordre.
Il est possible que Bertrand cite le "suivant" de 1,8 c'est à dire pour lui 1,9 et le "précédent" de 2,4 soit 2,3. Comme il faut un troisième nombre, il ne peut citer que le "suivant" ou le "précédent" d'un même format, c'est à dire ici, le précédent de 2,3 soit 2,2.
Rappel : un nombre décimal n'a pas de successeur ; on peut toujours trouver un nombre décimal compris entre deux nombres décimaux.

b) Bertrand dit « on peut pas » parce qu'il n'y a pas de nombre entier entre 5 et 6.

c) L'item c a peut être encore moins de sens pour Bertrand car les deux nombres de l'énoncé ne sont pas écrits avec le même format : format entier pour 2 et deux chiffres après la virgule pour 2,01. De plus la formulation de la question autorise une réponse négative.

Conclusion pour Bertrand : les erreurs de Bertrand sont cohérentes, elles relèvent de sa conception erronée des nombres décimaux : couple de nombres entiers séparés par une virgule.

Nolwenn

Exercice 1 : elle ne sait pas reconnaître le chiffre des dixièmes ; elle prend le chiffre des centièmes. De plus elle ne compte que trois fois à partir de 13,61.
Exercice 2 : Le rangement est correct.

Exercice 4 :
a) Les réponses sont correctes mais Nolwenn éprouve le besoin d'écrire le nombre entier 2 à l'aide d'une virgule (2,00). Est-ce que pour Nolwenn 2 et 2,00 sont bien le même nombre ?

b) Nolwenn commet la même erreur que Bertrand.

c) La réponse 2,00 confirme les interrogations du a). Pour Nolwenn 2 et 2,00 ne sont certainement pas des nombres identiques.
Elle ne trouve pas de nombre entre 2,00 et 2,01 parce qu'elle s'en tient à des nombres à deux décimales.

Conclusion pour Nolwenn : sa réussite à l'exercice 2 et ses difficultés dans l'exercice 4 montrent bien que ranger des décimaux et intercaler des décimaux sont deux compétences différentes. Par ailleurs, au vu de ses réponses à l'exercice 4, son erreur de l'exercice 1, portant sur les centièmes, n'est peut être pas le seul fait d'une confusion entre dixième et centième, mais exprime une représentation des décimaux comme nombres à deux chiffres après la virgule (prix et mesures usuelles).

Fayza

Exercice 1 : même procédure erronée que Nolwenn ; cependant elle compte cinq fois au lieu de quatre.

Exercice 2 : son rangement est correct.

Exercice 4 :
a) Le résultat n'est pas correct. Fayza ajoute 1 à 8 dans 1,8. Elle continue ce mécanisme mais considère la partie décimale comme un nombre entier autonome.

b) Le résultat n'est pas correct. Fayza considère peut-être qu'à partie entière identique le plus grand nombre est celui qui a le plus de chiffre après la virgule.
Ce qui est contradictoire dans certains cas avec l'autonomie de la partie décimale, « autonomie » au sens du a).

c) Comme Fayza a répondu au b) et pas au c), on peut penser que l'analyse proposée pour Bertrand (différence de format) s'applique à nouveau.

Conclusion pour Fayza : les contradictions relevées dans l'exercice montrent que ses représentations des décimaux ne sont pas encore très stables.

Question 3

Ces exercices révèlent que souvent, les élèves du cycle 3 conçoivent un nombre décimal écrit avec une virgule comme la juxtaposition de deux naturels séparés par une virgule. Cette représentation est confortée par l'oralisation des décimaux, par exemple 2,35 est lu systématiquement « deux virgule trente-cinq » alors qu'il peut être lu « deux et trente-cinq centièmes » ou « deux et trois dixièmes et cinq centièmes ». Voir le document d'application des programmes de cycle 3 de 2002 page 23.

Exercice 2 (5 points)

1)

Tableau de marche des cyclistes

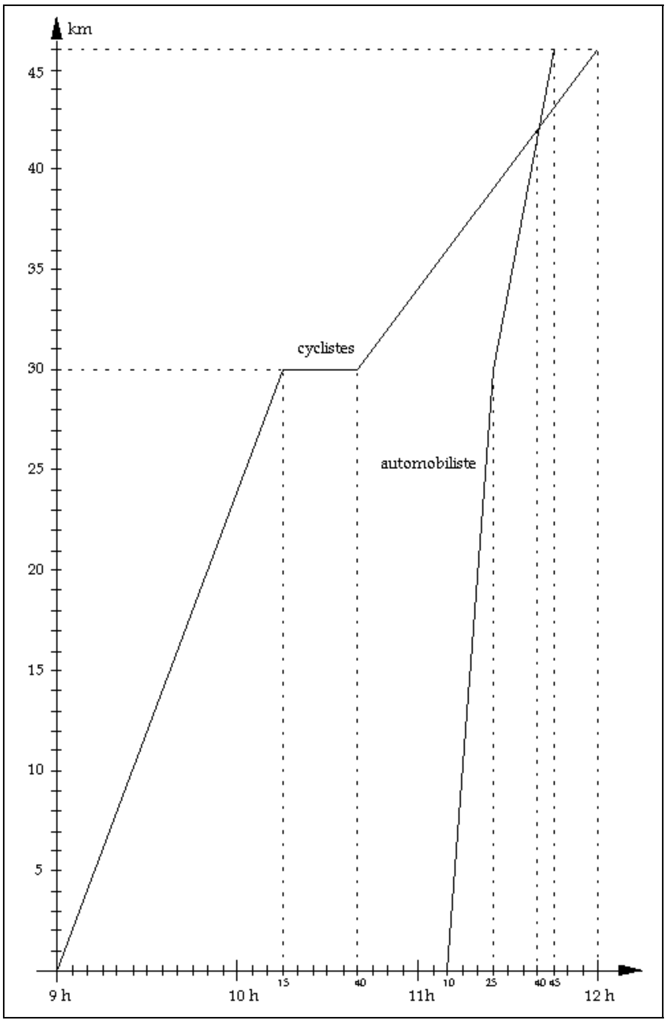
Horaire	Distance parcourue	Commentaires
9 h	0 km	Départ
		30 km parcourus en 1 h 15 min (vallée)
10 h 15	30 km	25 min d'arrêt
		16 km parcourus à 12 km/h (côte)
10 h 40	30 km	Durée = (16/12) h = (4/3) h = 1 h + 1/3 h = 1 h 20 min
12 h	46 km	Arrivée

2)

Tableau de marche de l'automobiliste (construit à partir de l'heure d'arrivée)

Horaire	Distance parcourue depuis le départ	Commentaires
11 h 45 min	46 km	Arrivée (15 min avant les cyclistes)
		16 km parcourus à 48 km/h (côte) Durée = 16/48 h = 1/3 h = 20 min
11 h 25 min	30 km	30 km parcourus à 120 km/h (vallée) Durée = 30/120 h = 1/4 h = 15 min
11 h 10 min	0 km	Départ

3)



4a) On lit sur le graphique (au point d'intersection des deux courbes représentatives) que l'automobiliste a doublé les cyclistes à 11 h 40 en un lieu situé à 42 km du point de départ (soit à 4 km de l'arrivée).

4b) A 11 h 25 l'automobiliste a parcouru 30 km alors que les cyclistes ont parcouru plus de 30 km. L'automobiliste a donc doublé les cyclistes après 11 h 25 puisqu'il est arrivé avant eux.

Solution 1 Si d désigne la distance parcourue après le dépassement, l'automobiliste a parcouru cette distance en d/48 h, et les cyclistes en d/12 h.

Or les cyclistes ont mis 1/4 h de plus pour terminer le trajet, d'où :

$$\frac{d}{12} = \frac{d}{48} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow d = \frac{d}{4} + 3 \Leftrightarrow d = 4$$

Or les cyclistes ont mis 1/4 h de plus pour terminer le trajet, d'où :

L'automobiliste a donc dépassé les cyclistes à **4 km de l'arrivée** (soit à 42 km du départ).

Le dépassement a eu lieu avant l'arrivée de l'automobiliste, c'est-à-dire à **11 h 40** (11 h 45 min - 5 min).

Solution 2 Soit d la distance du lieu où l'automobile rattrape les cyclistes au sommet ; soit t le temps mis par les cyclistes pour parcourir cette distance.

On a $d = 12t$ et $d = 48(t – 0,25)$ d'où t = = 20 min

d'où **heure de rencontre = 12 h – 20 min = 11 h 40 min** et **d =** $\frac{12}{3}$ **= 4 km de l'arrivée**

Solution 3 Les cyclistes sont au pied de la côte à 10 h 40 min.
L'automobiliste est au pied de la côte à 11 h 25 min.
Soit t la durée de parcours comptée à partir de 11 h 25 min.
Soit d la distance parcourue par les cyclistes et soit d' la distance parcourue par l'automobiliste.
On a : $d = 12(t + 0,75)$ car 11 h 25 min – 10 h 40 min = 45 min = 0,75 h
$d' = 48t$
Au moment de la rencontre on a $d = d'$ d'où $t = 0,25$ soit 15 min

Heure de la rencontre : 11 h 25 min + 15 min = **11 h 40 min**
Lieu de la rencontre : 48 x 0,25 = 12 Soit à **12 km du pied de la côte** (c'est-à-dire à 4 km de l'arrivée)

Questions complémentaires (4 points)

Question 1 Pour répondre aux questions des exercices 1 et 2, les élèves doivent être capables :
- d'utiliser, en acte, les propriétés de la proportionnalité notamment : propriétés de linéarité, coefficient de proportionnalité
- de calculer le produit de deux entiers inférieurs à 100 (technique opératoire ou calcul réfléchi)
- de convertir des centimes en francs (écriture à virgule)
- de percevoir et d'exploiter des relations arithmétiques entre les nombres (14 = 9 + 5 ; 90 = 9 x 10)
- de lire et interpréter un tableau de correspondance.

Question 2 Remarque préliminaire non demandée : deux procédures sont favorisées dans l'activité " Je découvre " :
- le retour à l'unité : calcul du prix unitaire
- la propriété additive de la linéarité : $p(x + y) = p(x) + p(y)$.

Exercice 3

- *(1) Un lot de 3 paquets de café Mélior coûte 27 F, un lot de 7 paquets coûte 63 F.*

Un élève peut calculer le prix unitaire, 1 paquet vaut 9 F (calcul mental), donc 7 paquets coûtent bien 7 x 9 = 63 F.
Un élève peut aussi avoir remarqué que le coefficient multiplicatif pour passer de 3 à 27 est le même que celui pour passer de 7 à 63. Remarque : ce coefficient est alors le coefficient de proportionnalité.
Ces procédures sont favorisées par le choix des nombres puisque 27 et 63 sont dans la table de 3.

- *(3) Un lot de 4 litres d'eau minérale Clara coûte 17 F. Un lot de 10 litres d'eau Clara coûte 40 F.*

Le plus simple est de calculer le prix d'un litre à partir du prix d'un lot de 10 litres puisque 40 est un multiple de 10. 1 litre vaut donc 4 F, et 4 litres valent 16 F.

Exercice 4

- *(1) Sept chaises sont vendues 1092 F. Combien valent 14 chaises ?*

14 étant le double de 7, le prix de 14 chaises est égal à 2 x 1 092. Cette procédure s'appuie sur la propriété de multiplication externe.

Le retour à l'unité est cependant possible (1092 : 7 = 156) mais maladroit compte tenu de la simplicité de la première procédure.

Question 3

La séquence extraite de " J'apprends les maths "

* Objectif : reconnaître certaines situations de proportionnalité ou de non proportionnalité à l'aide de deux critères :
- problèmes où le prix unitaire ne dépend pas du nombre d'unités
- problèmes où le prix unitaire dépend du nombre d'unités.

* Les méthodes de résolution proposées :
- la procédure de retour à l'unité
- la propriété additive de la linéarité.

* Une certaine initiative est laissée aux enfants dans la lecture et l'interprétation des énoncés. Les outils et les procédures ne sont pas imposés. Les élèves sont cependant très guidés par les questions et par le choix des données numériques.

La séquence extraite de " Maths " Nouvelle Collection Thévenet

* Objectifs : présenter des outils qui permettent de traiter une situation de proportionnalité.

* Les méthodes de résolution proposées : tableaux de correspondance, multiplication externe (linéarité multiplicative), fonction linéaire (coefficient de proportionnalité). Le lien avec le sens des problèmes posés n'est pas explicité.

* La place laissée à l'initiative des élèves est peu importante dans l'activité " Je découvre " et dans les premiers exercices de l'activité " Je m'entraîne " : les tableaux, les opérateurs, et en conséquence les procédures, sont imposées aux élèves.

Exercice 3 (3 points)

1) On sait d'après l'énoncé que le point E est sur le cercle de diamètre [AB]
donc le triangle AEB est rectangle en E, donc (AE) $\perp$ (EB).
De même, en utilisant le triangle AFD, on démontre que (AF) $\perp$ (FD).
Du fait que les points A, E, F sont alignés
donc (AF) $\perp$ (EB) et (AF) $\perp$ (FD),
donc les droites (EB) et (FD) sont parallèles.

2) Par une démonstration analogue à celle de la question 1, on démontre que les triangles ABG et ADH sont rectangles de sorte que (BG) $\perp$ (AH) et (DH) $\perp$ (AH), ainsi (BG) // (DH).
Du fait que (EB) // (FD), d'après la propriété de Thalès on déduit :

De même, du fait que (BG) // (DH) on déduit : $\frac{AB}{AD}=\frac{AG}{AH}$

Nous avons prouvé que $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AD}$ et que $\frac{AB}{AD}=\frac{AG}{AH}$, par conséquent $\frac{AE}{AF}=\frac{AG}{AH}$.

En utilisant maintenant la réciproque de la propriété de Thalès, on en déduit que (EG) // (FH).