Les remarques en italiques n'étaient pas attendues des étudiants.

Exercice 1 (4 points)

Question 1 a

Photo A	20	30
Photo B	30	45

x 1,5 **Le coefficient d'agrandissement est 1,5**

Photo A	20	30
Photo C	50	75

x 2,5 **Le coefficient d'agrandissement est 2,5**

Question 1 b

On cherche le coefficient d'agrandissement : (60 : 20) = 3

Photo A	20	30
Photo	60	?

x 3 **La longueur serait 90 cm** car 30 x 3 = 90

Question 2

On cherche le coefficient d'agrandissement

Photo A	20	30
Photo	?	147

x $\frac{147}{30}$ **La largeur serait 98 cm** car 20 x $\frac{147}{30}$ = 98

Question 3

Le périmètre d'un rectangle de côtés *a* et *b* est égal à 2 x (*a* + *b*) ; on peut donc utiliser les deux propriétés de linéarité f(kx) = kf(x) et f(x + y) = f(x) + f(y) ; ici f(x) = 3,2x

	Largeur	Longueur	Périmètre
Photo A	20	30	100 = 2 x (20 + 30)
Photo	*a*	*b*	320 = 2 x (*a* + *b*)

x 3,2

Largeur maximale 64 cm
car 20 x 3,2 = 64
Longueur maximale 96 cm
car 30 x 3,2 = 96

Question 4

Méthode 1

Dans un agrandissement d'une figure, lorsque les dimensions sont multipliées par un coefficient d'agrandissement k, les aires sont multipliées par k^2.

L'aire de la photo A (en m^2) est 0,2 x 0,3 = 0,06

Si l'aire de la nouvelle photo est 2,16 m^2, on a $k^2 = \frac{2,16}{0,06} = 36$; d'où k = 6

Les dimensions maximales de l'agrandissement sont donc :

Largeur 120 cm (20 x 6 = 120) et **longueur 180 cm** (30 x 6 = 180)

Méthode 2

On appelle *a* la largeur et *b* la longueur de la photo agrandie.

On peut utiliser l'autre proportionnalité qui existe dans cette situation d'agrandissement de rectangles (le coefficient de proportionnalité est alors le rapport constant qui existe entre la longueur et la largeur d'un rectangle, lorsqu'on l'agrandit), ici 1,5.

Largeur (en m)	0,2	*a*
Longueur (en m)	0,3	*b*

x 1,5

On a : $b = 1,5\,a$ et $ab \leq 2,16$

D'où $1,5a^2 \leq 2,16$ et par suite $a^2 \leq \dfrac{2,16}{1,5}$ soit $a^2 \leq 1,44$

D'où $a \leq \sqrt{1,44}$ soit $a \leq 1,2$ et par suite $b \leq 1,5 \times 1,2 = 1,8$

Les dimensions maximales de l'agrandissement sont donc : largeur 120 cm et longueur 180 cm.

Exercice 1 - Questions complémentaires (4 points)

Question 5

Elise

Elle intervertit les mots hauteur et largeur.
Elle cherche l'augmentation additive de la hauteur de A à B (10 cm) puis de B à C (20cm). Elle ne compare pas directement les dimensions de A à C comme demandé.
Sa réponse met en évidence la propriété des écarts dans une situation de proportionnalité :

Hauteur $20 \xrightarrow{+\,10} 30 \xrightarrow{+\,(2 \times 10)} 50$

Largeur $30 \xrightarrow{+\,15} 45 \xrightarrow{+\,(2 \times 15)} 75$

Son interprétation de la question semble être : « il y a augmentation des dimensions de A, B et C dans cet ordre. Quelle règle d'enchaînement suivent les dimensions des trois photos ? »

Antoine

Il compare bien B à A et C à A et y ajoute la comparaison de B à C.
Comme Elise il cherche une augmentation additive des dimensions. Les valeurs sont exactes mais il écrit les différences à l'envers (20 – 30 = 10 …). Puis il totalise les augmentations sur la hauteur et la largeur : on peut penser que comme les augmentations sont différentes, il éprouve le besoin de répondre par un seul résultat, la somme des deux augmentations. C'est sa façon de répondre à «dans quelle proportion… ? »
On peut penser que la question à laquelle répond Antoine est : «En tout, de combien ont augmenté les dimensions de B par rapport à celles de A ? ».

Jérémy

Il compare A à B puis B à C.
Il cherche l'augmentation de l'aire des photos (avec une erreur de calcul pour le passage de A à B : 850 au lieu de 750). Pour lui, le mot « dimensions » semble évoquer les surfaces.
La question à laquelle il répond est : «De quelle aire a augmenté la photo B par rapport à la photo A et de quelle aire a augmenté la photo C par rapport à la photo B ? »

Remarques

C'est la recherche de liens additifs qui prédomine dans les réponses des élèves.
Ceci peut se comprendre car les rapports n'étant pas entiers (1,5 de A à B et 2,5 de A à C), l'augmentation est d'abord perçue comme additive.
Par exemple, lorsqu'un prix passe de 12 € à 18 €, on considère plus aisément une augmentation de 6 € qu'une augmentation de 50% ou une multiplication par 1,5. Dans le cas du passage de 12 € à 24 €, on perçoit aussi bien le doublement (multiplication par 2) que l'augmentation additive de 12 €.

Question 6

Elise et Antoine

Ils doublent les dimensions de la photo B car ils ont remarqué que pour passer de 30 cm à 60 cm il faut multiplier par 2.

Mathématiquement cette procédure peut être interprétée de deux façons :

- utilisation du coefficient de proportionnalité, dans la proportionnalité entre les dimensions de B et les dimensions de D

Photo B	30	45
Photo D	60	?

x 2 **La largeur serait 90 cm** car 45 x 2 = 90

- utilisation de la propriété de linéarité [f(2x) = 2f(x)], dans la proportionnalité entre hauteur et largeur, quelles que soient les photos (cf. question 4, méthode 2)

x 2

Hauteur	30	60
Largeur	45	?

x 2

coef. **La largeur serait 90 cm** car 45 x 2 = 90

Remarque : en général, les élèves sont plus à l'aise dans l'utilisation de la linéarité. Ils utilisent la procédure f(2x) = 2f(x) sans pour autant être conscient de la proportionnalité sous-jacente.

Antoine a une écriture erronée du doublement des deux dimensions : 30 x 45 x 2 = 60 x 90.

Jérémy

Il utilise implicitement la propriété des écarts dans la proportionnalité entre hauteur et largeur.

+ 10 + 10

Hauteur	20	30	50	60
Largeur	30	45	75	?

+ 15 + 15

La largeur mesure 75 + 15 = 90

Exercice 2 (4 points)

Question 1 a

Rappel du théorème : un nombre écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{a}{b}$ (où a et b sont des entiers ; b différent de 0) est un nombre décimal si et seulement si b = $2^n \times 5^p$ où n et p sont des entiers.

On a $A = \frac{39}{65} = \frac{3 \times 13}{5 \times 13} = \frac{3}{5}$ donc **A est un nombre décimal**.

On a $B = \frac{36}{68} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 17} = \frac{3 \times 3}{17}$ donc **B n'est pas un nombre décimal**.

Question 1 b

On écrit A et B sous forme de fractions ayant le même dénominateur. On peut prendre pour dénominateur commun le plus petit : 5 x 17 = 85 (c'est le plus petit multiple commun à 5 et 17).

Alors $A = \frac{3 \times 17}{5 \times 17} = \frac{51}{85}$ et $B = \frac{9 \times 5}{17 \times 5} = \frac{45}{85}$; comme 45 < 51, on a **B < A**

Question 1 c

Il faut trouver un nombre décimal C tel que B < C < A.

• On peut donc chercher un nombre n tel que $\frac{45}{85} < \frac{n}{85} < \frac{51}{85}$,

Il faut 45 < n < 51 et n multiple de 17, pour que C soit décimal (pour pouvoir simplifier par 17).

→ Ce n'est pas possible (car 51 est multiple de 17).

• On cherche alors un nombre n tel que $\frac{450}{850} < \frac{n}{850} < \frac{510}{850}$,

Il faut donc que 450 < n < 510 et n multiple de 17.

Comme 510 = 17 x 30 on peut prendre n = 17 x 28 = 476

D'où $C = \frac{476}{850} = \frac{17 \times 2 \times 2 \times 7}{5 \times 17 \times 2 \times 5} = \frac{2 \times 7}{5 \times 5} = \frac{14}{25}$. C'est bien un nombre décimal compris entre A et B.

Question 1 d

On peut prendre $D = \frac{46}{85}$. On a bien B < D < A, et D non décimal puisque 46 n'est pas divisible par 17.

Question 2 a

Rangement 1,07 < 1,109 < 1,7 < 1,81

Question 2 b

Les nombres 1,1 et 1,11 ont le même chiffre des dixièmes (1), et des chiffres des centièmes différents (0 pour 1,1 et 1 pour 1,11).

Pour intercaler un nombre décimal entre ces deux nombres, celui-ci devra avoir 0 pour chiffre des centièmes : on peut prendre 1,104 et 1,106.

Exercice 2 - Questions complémentaires (4 points)

Question 3 a

Pour les élèves de fin cycle 3, on peut formuler ainsi :

Entre deux nombres décimaux, on peut toujours trouver un nombre décimal.

Remarque : la propriété P, en terme plus mathématique, s'explique par la densité des décimaux.

Question 3 b

Dans l'exercice proposé, dans le premier cas, un élève qui interprète 8,4 et 8,7 comme des écritures d'entiers (84 et 87) ou qui s'intéresse aux parties décimales 4 et 7 comme des entiers, peut fournir une réponse correcte en s'appuyant sur sa connaissance des entiers.

En revanche, par ce même processus, ce même élève peut répondre qu'il n'existe pas de nombre compris entre 10,1 et 10,2, témoignant ainsi qu'il ne connaît pas la structure des nombres décimaux.

Si on ne propose que des exemples qui relèvent du premier cas, certains élèves peuvent répondre correctement sans savoir ce qu'est un nombre décimal.

Il faut donc des exemples variés (dans les valeurs des parties entières et décimales, et dans le nombre de décimales) afin que

- l'élève ne puisse pas obtenir des réponses correctes à chaque fois, avec une procédure erronée,
- le maître puisse comprendre la procédure erronée de l'élève et ainsi percevoir la représentation que l'élève a des nombres décimaux.

Question 3 c

Leurs difficultés proviennent vraisemblablement de l'assimilation de l'écriture à virgule d'un décimal à celle d'un entier ou de deux entiers, séparés par une virgule.
Leurs raisonnements, dans les comparaisons, ainsi que dans certaines opérations, reposent sur les propriétés des nombres entiers, qu'ils étendent à ces « nombres », par l'intermédiaire de l'écriture à virgule.
La référence aux fractions décimales, qui fonde l'écriture à virgule est alors absente.

Question 3 d

Le travail de la propriété (P) est nécessaire dans l'apprentissage des nombres décimaux car il permet de mettre en évidence en quoi les nombres décimaux se distinguent des nombres entiers, malgré la ressemblance des écritures à virgule.

Question 4 a

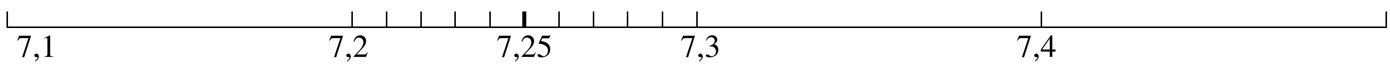
Lorsque les parties entières sont différentes, c'est l'ordre des parties entières qui définit l'ordre des décimaux (document 2 exemple 1). Cela repose sur le fait qu'un nombre décimal (non entier) est un nombre compris entre deux entiers consécutifs et donc est toujours supérieur à sa partie entière.

Lorsque les parties entières sont égales :

• On compare successivement les chiffres qui composent les parties décimales des deux nombres (document 1 première méthode, document 2 exemples 2 et 3).
Dans ce cas, on utilise de manière implicite l'écriture « fractionnaire décomposée » des nombres décimaux : $7{,}25 = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ et $7{,}3 = 7 + \frac{3}{10}$, comme $2 < 3$ **alors** $7{,}25 < 7{,}3$

Remarque : mais pour valider cette déduction, il faut démontrer que la somme des fractions
$\frac{a}{10^{n+1}} + \frac{b}{10^{n+2}} + \ldots\ldots + \frac{x}{10^{n+m}}$ avec $0 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, …. $0 \le x \le 9$
est strictement inférieure à $\frac{1}{10^n}$.

Au niveau des élèves, c'est un travail sur la droite graduée qui montre ce fait :



« Tous les nombres 7,2… sont nécessairement avant 7,3 »

• On met les nombres « au même format » (document 1, deuxième méthode).
Dans ce cas, on utilise implicitement les écritures fractionnaires des parties décimales, ayant le même dénominateur, et on compare les numérateurs :

$7{,}25 = 7 + \frac{25}{100}$ et $7{,}3 = 7 + \frac{30}{100}$, ici 25 et 30

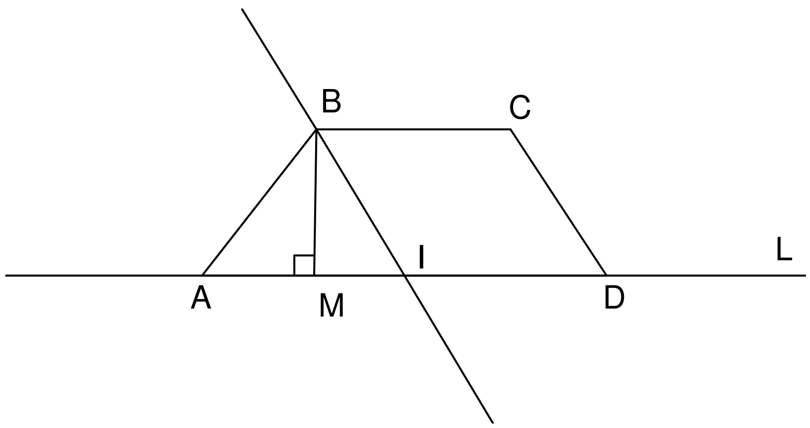
Question 4 b

Dans le document 1, l'exemple donné correspond au cas où les parties entières sont égales ; en faisant ce choix, le document ne fournit pas la globalité de la méthode de comparaison présentant tous les cas de figure.

Dans le document 2, toutes les paires de nombres à comparer ont le même nombre de décimales. Cela n'est pas judicieux car on peut alors obtenir des réponses exactes sans tenir compte de la virgule, comme s'il s'agissait de nombres entiers.

De plus comme les nombres ont le même nombre de chiffres, cela ne remet pas en cause le critère de longueur de l'écriture qui permet de comparer deux entiers, mais qui ne fonctionne pas pour comparer deux décimaux (non entiers).

Exercice 3 (4 points)



Question 1
On a ABCD trapèze isocèle donc AB = CD.
D'où 36 = 2AB + 12, d'où AB = $\frac{36-12}{2}$ = 12.
Les segments [AB] et [CD] ont pour longueur 12 mètres.

Question 2

On a (BC) parallèle à (ID) et (CD) parallèle à (BI) donc BCDI est un parallélogramme.
De plus BC = CD = 12, donc **BCDI est un losange.**

On a AI = 24 – 12 = 12 et AB = BI = 12. Donc **le triangle ABI est équilatéral.**

Question 3

Soit [BM] la hauteur du trapèze ABCD, [BM] est aussi la hauteur du triangle ABI.
Comme ABI est équilatéral, M est le milieu de [AI], donc AM = 6.

Dans le triangle rectangle ABM, le théorème de Pythagore donne :

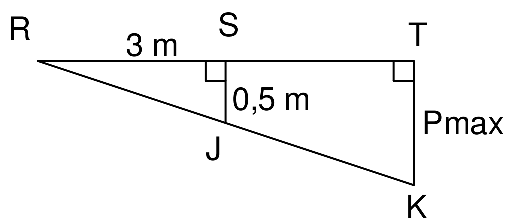
$$BM^2 = AB^2 - AM^2$$
$$BM^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$$

D'où $BM = \sqrt{108} = \sqrt{36 \text{ x } 3} = \sqrt{36}\ \sqrt{3} = 6\ \sqrt{3}$

$\text{Aire(BCDI)} = \dfrac{AD + BC}{2} \text{ x } BM = 108\sqrt{3}$

Donc **l'aire du trapèze ABCD est de 108 $\sqrt{3}$ m^2**.

Question 4



On a (SJ) parallèle à (TK). Le théorème de Thalès dans les triangles emboîtés RTK et ASJ donne :

$$\frac{TK}{SJ} = \frac{RT}{RS}$$

D'où $\dfrac{Pmax}{0,5} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3}$, par suite $Pmax = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

La profondeur maximale est de $\sqrt{3}$ mètres, soit environ 1,73 m.

Complément au corrigé et commentaires des copies du groupe 5

==========
Exercice 1
==========

Question 3 :
On peut simplement indiquer que si les dimensions d'une figure sont multipliées par k
alors le périmètre est lui aussi multiplié par k

Question 4
Il y souvent eu une erreur de conversion : 2,16 m² = 216 cm² au lieu de 2,16 m² = 21600 cm²
En effet : 1 m² = 1m x 1m = 100 cm x 100 cm = 10000 cm²

Question 5
Les procédures d'Elise et Antoine ont souvent été perçues comme fausses, alors que ces élèves utilisent en fait la
proportionnalité des écarts (cf. Charnay, tome 1, chap. 5, § 1.2 "Propriété des écarts" page 157).
Le fait qu'ils donnent tous les trois une réponse de type additive/soustractive plutôt qu'une réponse multiplicative vient du
mot "augmenté" dans la question a) et qu'au lieu de répondre à la question "Dans quelles proportions les dimensions
ont-elles augmenté" ils répondent plutôt à la question "Comment les quantités (1) ont -elles augmenté ?"
(1) Ces quantités sont les dimensions pour Elise, les dimensions et la somme longueur + largeur pour Antoine, les aires
pour Jérémy.

Question 6
Jérémy utilise la proportionnalité des écarts. Voir ci-dessus.

==========
Exercice 2
==========

Question 1
Vous n'avez souvent pas tenu compte de la consigne générale "réponses justifiées par des raisonnements et des calculs sur
les FRACTIONS

Question 1a
Utilisation de la propriété "Les seuls rationnels qui sont des décimaux sont ceux qui peuvent s'écrire à l'aide d'une
fraction IRREDUCTIBLE dont le dénominateur est composé par le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5"
(cf. Charnay, tome 2, chap.2, § 6.1 page 39)
La condition "irréductible" a souvent été oubliée.

Question 1b
On pouvait aussi raisonner ainsi :
39/65 > 36/65 > 36>68

justifications de ces deux inégalités
la 1ère : comparaison de fractions de même dénominateur
la 2e : comparaison de fractions de même numérateur
cf. Charnay, tome 2, chap.2, § 3.2, page 34 "l'ensemble des rationnels est totalement ordonné"
Certains d'entre vous ont perçu cela? mais de manière intuitive et mal justifiée.

Questions complémentaires de l'exercice 2

Cette partie a été assez mal traitée. Je vous incite à revoir la didactique des décimaux.

Question 3a
A propos de la remarque et du mot densité (non demandés sur les copies), voir Charnay, tome 2, page 37
Dans l'édition 2005, page 246, le terme employé est "intercalation", mot moins savant et plus intuitif.

Question 3b
Certains d'entre vous ont rappelé l'importance du choix des variables didactiques, en rappelant ce que cela voulait dire,
mais il ne s'agissait pas ici d'en rester là, c'est à dire de rester trop général. Relisez attentivement le corrigé et le
cours du Charnay.

Question 3c
Voir Charnay, tome 2, Chap 6, paragraphe 2.1 " ... difficultés ... intercalation" ;
Edition 2005, tome 1, page 270

Question 4a
Autre explication lorsque les partie entières sont égales, par exemple pour 7,25 et 7,3 :
7,25 = 7 + 25/100 et 7,3 = 7 + 30/100 (bien que le zéro de 30 n'apparaisse pas dans lécrirure 7,3)
Pour comparer les deux nombres on compare 25/100 et 30/100 et donc 25 et 30, c'est à dire deux nombres entiers ayant le
même nombre de chiffres. Pour cela on sait que pour deux nombres entiers ayant le même nombre de chiffres, on commence par
les deux chiffres de gauche, c'est à dire ici 2 et 3.