

## Corrigé

### Exercice 1 (4,5 points)

#### 1°) Aménagement du pourtour

a) Tout nombre de cette forme est donc divisible par 37, et le quotient est 3a.

Le quotient de la division de 444 par 37 est donc 12 (= 3x4).

Le quotient de la division de 333 par 37 est 9 (=3x3) :

$$444 = 12 \times 37$$

$$333 = 9 \times 37$$

b) d est une distance possible entre deux arbustes si et seulement si d est un diviseur de 444 et un diviseur de 333. L'ensemble des diviseurs communs de 444 et 333 est égal à l'ensemble des diviseurs du PGCD de 444 et 333. Décomposons ces deux nombres en facteurs premiers :

$$444 = 4 \times 3 \times 37$$

$$333 = 3 \times 3 \times 37$$

Le PGCD de 444 et 333 est égal à  $3 \times 37 = 111$  (on prend les facteurs premiers présents dans les deux décompositions, à la plus petite puissance rencontrée). Les diviseurs de 111 s'obtiennent facilement : 1, 3, 37, 3 x 37.

Les diviseurs communs de 444 et 333 sont donc : 1, 3, 37 et 111.

La distance entre deux arbustes peut être de **1, 3, 37 ou 111 m**.

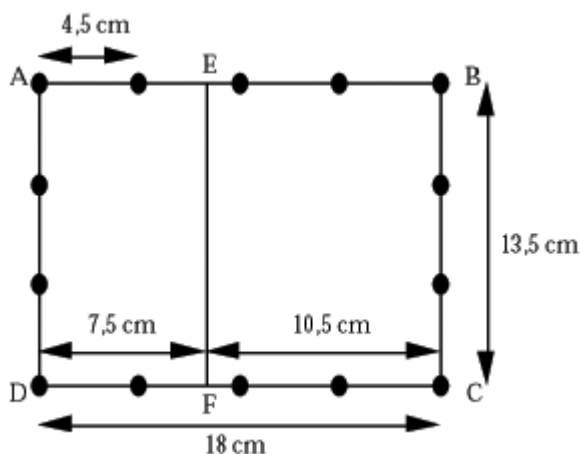
c) Le nombre d'arbustes nécessaires (y compris les arbustes des quatre coins) est égal au nombre d'intervalles sur le pourtour (sur une ligne simple fermée n points déterminent n intervalles). Le nombre d'intervalles sur le pourtour est égal à la longueur du pourtour ( $2 \times (444 + 333) = 1554$  m) divisée par la distance séparant deux arbustes, soit  $1554/d$ .

d	1	3	37	111
nbre d'arbustes	$1554 / 1 = 1554$	$1554 / 3 = 518$	$1554 / 37 = 42$	$1554 / 111 = 14$

d) L'aménagement qui nécessite le moins d'arbustes est le dernier : 14 arbustes à une distance de 111 m les uns des autres. En prenant 1,5 cm pour représenter 37 m, les dimensions du terrain (sur la copie) sont :

$$AB = (444/37) \times 1,5 = 18 \text{ cm et } AD = (333/37) \times 1,5 = 13,5 \text{ cm}$$

$$\text{La distance entre les arbres est : } d = (111/37) \times 1,5 = 4,5 \text{ cm}$$



Par manque de place la figure est dessinée à l'échelle 1/3.

2°) **Implantation d'une roseraie**

a)  $AE = 5/12 AB = (5/12) \times 444 = 185 \text{ m}$

$DF = AE = 185 \text{ m}$

En prenant 1,5 cm pour représenter 37 m, on obtient :

$AE = (185/37) \times 1,5 = 7,5 \text{ cm}$  et  $DF = 7,5 \text{ cm}$

On a aussi :

$EB = 444 - 185 = 259 \text{ m}$  et  $FC = 259 \text{ m}$

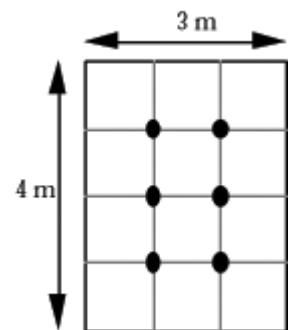
$EB = (259/37) \times 1,5 = 10,5 \text{ cm}$  et  $FC = 10,5 \text{ cm}$

b) La parcelle EBCF est un rectangle de 259 m x 333 m. Chaque rangée de rosiers contient 258 rosiers, et il y a 332 rangées, soit en tout :

**$258 \times 332 = 85\ 656$  rosiers**

On peut s'aider d'un schéma représentant la même situation avec des nombres plus petits, par exemple avec un rectangle de 3 m x 4 m, il y a  $2 \times 3 = 6$  rosiers.

Il y a sur chaque rangée et sur chaque colonne, 1 rosier de moins que le nombre d'intervalles de 1 mètre.

**Questions complémentaires (4 points)**

- Activité proposée à la fin de la première année du cycle 3.
  - Objectif de la séance : Faire pratiquer une situation de distribution  
Faire apparaître l'écriture  $a = (b - q) + r$
- L'objectif général à long terme est la connaissance de la division euclidienne.
- La manipulation permet à l'élève :
  - de comprendre la situation en la pratiquant,
  - de se construire une représentation mentale de la situation,
  - d'aller ainsi vers l'abstraction.

La manipulation est un facteur de motivation. Elle permet mieux la confrontation des procédures. Elle permet à l'élève lui-même de valider sa procédure.

La connaissance se construit par la réflexion sur ses propres actions (cf Piaget).

Mais rappelons les IO 2002 :

Il faut cependant se convaincre que ce n'est pas la manipulation d'un matériel qui constitue l'activité mathématique, mais les questions qu'elle suggère. Il convient ainsi de bien distinguer les tâches de constat ou d'observation, qui invitent l'élève à lire une réponse sur le matériel, des tâches d'anticipation qui lui demandent d'élaborer, de construire par lui-même une réponse dont il pourra ensuite vérifier la validité en revenant à l'expérience.

- Remarque : aucun groupe n'indique clairement le nombre de cartes reçues par chaque joueur car la consigne de demande pas explicitement ce nombre. Le maître demande « ... écrivez sur la feuille ce que vous avez trouvé ... ».

Groupe 1. Les élèves ont réalisé une distribution complète et constatent le nombre de cartes restant dans la boîte : 4. Les actions ne sont pas traduites en symboles arithmétiques.

Pour les autres groupes (2, 3, 4 et 5), chaque tour de distribution consiste à donner une carte à chaque joueur.

Groupe 2. Les élèves traduisent à chaque tour l'état des cartes sur la table en parallèle avec l'état de la boîte. Le symbolisme utilisé est l'addition de 4 pour le premier et la soustraction de 4 pour le second.

Cette traduction pourra conduire aux procédures d'additions ou soustractions successives du diviseur.

Au septième tour, on note une anomalie : + 1 et -1 au lieu de + 4 et -4.

On peut penser que l'élève qui distribue à ce tour, énonce « *une carte distribuée* », sous-entendu « à chaque joueur » et que le « traducteur » écrit +1 et -1 avec les calculs qui en découlent.

L'élève qui distribue ayant effectivement retiré 4 cartes de la boîte, il n'y reste plus que 3 cartes ( $31 = 7 \times 4 + 3$ ), ce qui provoque l'arrêt de la distribution.

Groupe 3. Les élèves traduisent à chaque tour l'état de la boîte. Le symbolisme utilisé est la soustraction de 5 du nombre précédent. Cette traduction pourra conduire à la procédure de soustractions successives du diviseur.

La distribution achevée il y a une évaluation du nombre de cartes distribuées à l'aide d'une écriture additive, puis la transformation de cette écriture additive en écriture multiplicative, pour arriver à l'écriture de l'égalité représentant la distribution complète  $a = (b \times q) + r$ .

Groupe 4. A chaque tour de distribution, les élèves traduisent la situation en écrivant la différence entre le nombre total de cartes (toujours 39), qu'ils appellent à tort « *boîte* » et le nombre total de cartes distribuées (« *cartes hors de la boîte* ») qui évolue de 5 en 5 (5, 10, 15...); puis ils calculent cette différence, qu'ils devraient nommée « *cartes restant dans la boîte* »; leur erreur d'appellation de la première colonne les amènent à être incohérents en écrivant 4 en fin de cette colonne. Les cadres (cartes hors de la boîte, cartes dans la boîte) devraient être dessinées sur la deuxième et la troisième colonne, avec 39 au-dessus de 34. C'est ce premier 39 qu'ils ne savent pas placer. Voir ci-dessous :

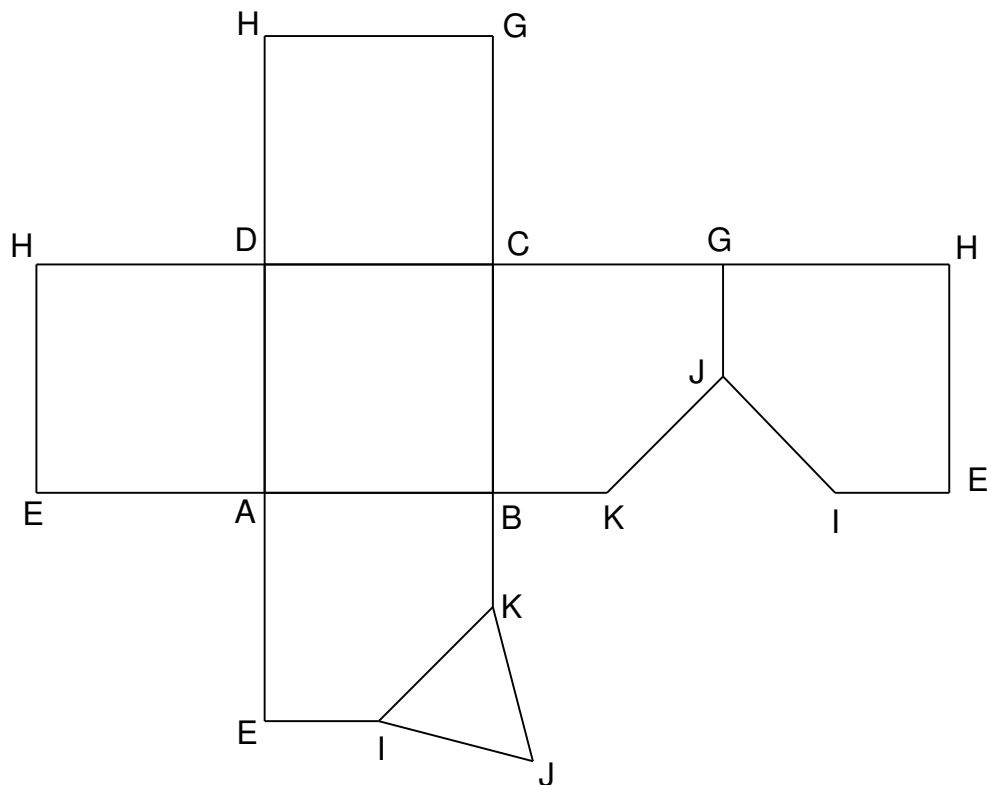
	Cartes hors de la boîte	=	Boîte
39 -	0	=	39
39 -	5	=	34
39 -	10	=	29
39 -	15	=	24
39 -	20	=	19
39 -	25	=	14
39 -	30	=	9
39 -	35	=	4

Cette traduction préfigure l'utilisation des multiples successifs du diviseur.

Groupe 5. Après chaque tour de distribution les élèves traduisent le nombre de cartes distribuées en tout (« *table* ») par une écriture multiplicative; puis, ils comptent ou calculent le reste (« *boîte* »), la somme de ces deux nombres devant toujours être égale à 41.

On note une petite erreur à la première ligne (36 au lieu de 35).

La présence de la septième ligne laisse penser qu'à partir d'un certain nombre de tours, ils ne font plus réellement la distribution : en effet, ils ne peuvent pas distribuer 6 cartes alors qu'il n'en reste que 5 dans la boîte (ou bien ils se mettent à très mal distribuer ?). A partir d'un certain tour de distribution, c'est donc une procédure arithmétique qui est en œuvre : utilisation des multiples successifs du diviseur. L'erreur de la septième ligne est due à l'inversion  $42 - 41$  au lieu de  $41 - 42$ . Ils s'arrêtent car  $6 \times 8 = 48$  est visiblement plus grand que 41, ou parce que le reste 1 les fait revenir au contexte.

**Exercice 2 (4,5 points)**

2)

Le triangle	Est-il rectangle ?	Est-il isocèle ?	Est-il équilatéral ?
ADC	Oui	Oui	Non
IJK	Non	Oui	Oui
AEG	Oui	Non	Non
KJC	Non	Oui	Non

**Partie B**

1) Il s'agit d'un cuboctaèdre. Le cube a 6 faces, 8 sommets et 12 arêtes, d'où

$$F = 6 + 8 = 14$$

( 14 faces : 6 issues du cube et 8 issues des sommets du cube)

$$S = 3 \times 4 = 12$$

( 4 sommets dans 3 plans parallèles)

$$\text{Ou } S = (8 \times 3) : 2 = 12$$

( 8 triangles : 24 sommets comptés chacun 2 fois)

$$A = 8 \times 3 = 24$$

(les 8 sommets du cube donnent 8 faces triangulaires)

2) Chaque morceau découpé est une pyramide. Par exemple pour la pyramide IJKF, on prend pour base le triangle rectangle IJF et pour hauteur l'arête [FK]. Le volume de IJKF est alors :

$$\frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \times 2 = \frac{4}{3}$$

Le volume total des huit morceaux coupés est :  $8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

Le volume du solide restant est :  $4 \times 4 \times 4 - \frac{32}{3} = \frac{160}{3}$

**Le volume total des huit morceaux coupés n'est pas égal au volume du solide restant.**

### Questions complémentaires (4 points)

#### Question 1

**Reproduire** un objet c'est en réaliser une copie. On peut utiliser des moules, des calques, des patrons, des gabarits, et bien sûr tous les instruments de la géométrie : règle graduée, équerre, compas. La copie peut être soit l'identique à l'original, soit un agrandissement ou une réduction de l'original (angles identiques, longueurs proportionnelles).

**Décrire** un objet c'est communiquer (oralement, par écrit, par le dessin...) un certain nombre de ses propriétés qui permettent de l'identifier, de le construire, de le représenter.

**Représenter** un objet c'est l'évoquer à l'aide de procédés graphiques conventionnels, en ne retenant que certaines de ses propriétés et en faisant abstraction des autres. Les propriétés mises en évidence varient selon la représentation choisie.

*Il est donc intéressant d'habituer les élèves à effectuer et à utiliser des représentations différentes d'un même objet, et à savoir choisir la représentation qui convient le mieux.*

**Construire** un objet, c'est le réaliser à partir d'une description ou de représentations. Cela suppose de ne pas disposer du modèle de cet objet.

#### Question 2

Groupe 1 : une pyramide à base octogonale

Groupe 2 : une pyramide à base carrée

Groupe 3 : un prisme à base octogonale

Groupe 4 : un prisme à base triangulaire

Groupe 5 : un tétraèdre (ou pyramide à base triangulaire)

#### Question 3

Groupe	Informations manquantes
2	Qu'est-ce que vous appelez « longueur » ? Et « largeur » ? Quelle est la nature des triangles ?
3	Ce message permet la construction car on peut déduire le côté de l'octogone : 3,2 cm
4	Ce message permet la construction

5	Quelles sont nature et dimensions des triangles ? Qu'est-ce que vous appelez « hauteur » ?
---	---

#### Question 4

La mesure des angles à l'aide d'un rapporteur n'est pas au programme du CM 1.

Les élèves peuvent répondre à l'aide d'un gabarit de l'angle ou d'un calque.

*RQ : le gabarit pouvait être obtenu en posant la pyramide sur une feuille et en envoyant le contour de sa base comme indication.*

Autre interprétation, plus simple et plus vraisemblable :

Après chaque tour de distribution, (1 à chacun, puis 2 à chacun...) ils remettent toutes les cartes dans la boîte (d'où le 39 au commencement de chaque distribution et -5, -10...); à chaque fois ils calculent ou comptent le reste ; après la dernière distribution (7 à chacun), ils ne remettent pas les cartes et il en reste donc 4 dans la boîte.

### Exercice 3 (3 points)

1) Si  $m = 6$  alors  $c \leq 5$ ,  $d \leq 4$  et  $u \leq 3$

Pour  $u = 1$ , les valeurs possibles de  $N$  sont **6321, 6421, 6521, 6431, 6531 et 6541**

Pour  $u = 2$ , les valeurs possibles de  $N$  sont **6432, 6532 et 6542**

Pour  $u = 3$ , la valeur possible de  $N$  est **6543**

Soit en tout 10 valeurs possibles qui sont **6321, 6421, 6431, 6432, 6521, 6531, 6532, 6541, 6542 et 6543.**

2)  $N = \overline{mcd u} = 1000m + 100c + 10d + u$  ;  $N' = \overline{udcm} = 1000u + 100d + 10c + m$   
D'où  $D = N - N' = 999m + 90c - 90d - 999u = 999(m-u) + 90(c-d)$

3) On a :  $D = 9 \times (111m + 10c - 10d - 111u)$  donc  $D$  est un multiple de 9.

4) La valeur maximum de  $D$  est pour  $m$  et  $c$  maximum, et  $d$  et  $u$  minimum soit :

Compte tenu de la condition  $m > c > d > u$ ,

$m = 9$   $c = 8$   $d = 2$   $u = 1$ .

**$D = 8532$ , ceci pour  $N = 9821$ .**

5)  $D$  est minimum quand  $999(m - u) + 90(c - d)$  est minimum,

c'est-à-dire quand  $m - u$  et  $c - d$  sont minimum, soit pour  $m - u = 3$  et  $c - d = 1$

La valeur de  $D$  est alors  $999 \times 3 + 90 \times 1$ , soit  **$D = 3\ 087$**

Ici les valeurs minimales pour  $m - u$  et  $d - c$  sont obtenues chaque fois que les chiffres du nombre  $N$  sont consécutifs, ce qui donne six solutions :

$$N=9876$$

$$N=8765$$

$$N=7654$$

$$N=6543$$

$$N=5432$$

$$N=4321$$

Les valeurs de  $N$  pour lesquelles  $D$  est minimum sont : **9876, 8765, 7654, 6543, 5432, 4321.**