

Les notes en italique sont des réflexions complémentaires qui n'étaient pas attendues dans les copies.  
En page 7, se trouve un complément au corrigé.

### Arithmétique (3 points)

Le sujet porte sur la division euclidienne. Il se propose de vous faire explorer l'éventail des procédures élèves et le changement possible de stratégie selon la taille des nombres ou leur position sur la frise numérique. On peut bien entendu répondre «de manière experte» aux trois questions du 1°). Le jury s'attend à ce que certaines copies prennent un cheminement type d'élève, ne serait-ce que parce que le sujet se fait en temps limité.

**Q1.a.** Les nombres étant petits on peut procéder par addition itérée de 23.

$$17584 + (4 \times 23) = 17676 ; 17584 + (5 \times 23) = 17699 \text{ donc } 17692 \text{ ne peut pas être atteint.}$$

**Q1.b.** Ici, dans le cadre d'une procédure «élève», il convient d'effectuer des regroupements par multiples de 23. Même pour un candidat c'est «trop long». On peut donc faire, soit la division euclidienne de  $(31600-2197)$  par 23, soit encore tout simplement la division à la calculatrice ; elle donne :

$$(31600 - 2197) \div 23 \approx 1278,39 \text{ donc ce n'est pas un entier, on ne peut atteindre } 31600 \text{ par pas de } 23 \text{ en partant de } 2197.$$

Pour utiliser le signe « = », il convient d'écrire *une égalité* (et non une approximation), c'est alors la division euclidienne :  $31600 - 2197 = (1278 \times 23) + 9$

**Q1.c. (0,5)** Le cas particulier de la division euclidienne (ou encore des multiples)

$5727 = 23 \times 249$ . Le nombre 5727 est un multiple de 23, donc on peut l'atteindre, par pas de 23, en partant de 0.

**Q2.** Le procédé (mathématique) général attendu est la division euclidienne de  $b-a$  par 23. Si le reste est nul, on peut atteindre  $b$  en partant de  $a$  par pas de 23, sinon on ne peut pas. Un procédé instrumenté peut être l'utilisation de la calculatrice et de la valeur approchée décimale de la division de  $(b-a)$  par 23. Si le quotient n'est pas entier, on ne peut pas atteindre... Si le quotient est entier, c'est que le reste de la division euclidienne est nul ...

**Q3.** Le plus petit entier (positif ou nul) à partir duquel on peut atteindre 31600 par pas de 23 est le reste de la division euclidienne de 31600 par 23.

$$31600 = (23 \times 1373) + 21$$

Donc le plus petit entier cherché est 21.

**Arithmétique - Questions complémentaires (5 points)**

**Q4.** Les différentes procédures élèves.

**Q4.a.** Pour l'exercice 1.a. nous sommes dans une situation numérique qui engage l'action élémentaire de l'addition itérée : on peut ajouter 23 plusieurs fois.

*Note : C'est, au CM2, l'équivalent (un peu formel) du « niveau 1 » dans l'analyse de Brissiaud (Confère le « livre du maître » de « J'apprends les maths » – Ed. Retz)*

**Q4.b.** Les valeurs numériques du 1.b provoquent naturellement chez les élèves des procédures de regroupement par paquets de multiples de 23 : 2300, 23000, etc... Les élèves sont naturellement amenés à utiliser des multiples de 23 et à pratiquer des encadrements pour affiner.

**Q4.c.** En CM2, les élèves peuvent utiliser la procédure experte qui consiste à faire la division euclidienne de 5727 par 23. Ici c'est le fait que « la course au nombre » part de 0 qui favorise ce changement de procédure.

**Q5.** Un exercice de CE2 (*on avait déjà dit des choses, donc à adapter en fonction de ce qu'on avait dit*)

**Q5.a.** Il s'agit de « courses à un nombre par pas constant », qui construisent (et utilisent) la notion de multiple dans un premier temps (CE2) avant d'aboutir à la division euclidienne au CM.

**Q5.b.** Une variable essentielle est le choix du pas : 10, 100 ou 5, qui permet d'éviter de calculer mais au contraire d'utiliser la numération décimale comme outil de résolution.

*Note : D'autres variables peuvent être notées, comme le fait que le texte propose une arrivée et qu'elle doit être atteinte : il n'y a pas le questionnement de savoir si on va atteindre ou pas un nombre. Cette « certitude » participe aussi de l'engagement dans l'action : on est sûr, avant de commencer, d'atteindre un but, ce qui rend l'exercice dynamique, moins conceptuel, sans questionnement sur une cible qui sera atteinte ou pas.*

**Q5.c.** Puisque nous sommes dans une logique de but à atteindre, on peut entrer dans un raisonnement d'élimination des cas (utilisation spontanée du tiers exclu) tout en renforçant – et en rendant opératoires – les connaissances de la numération.

Maud : en augmentant le nombre de centaines (et pas le chiffre), le nombre cherché est plus grand que celui au départ et doit se terminer par 25, de là, ne peut être que 18325.

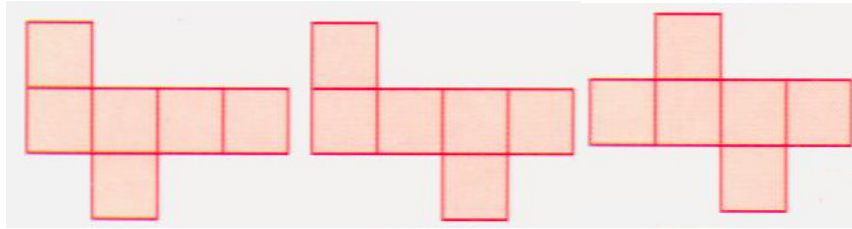
Cyril : même chose avec le chiffre des unités 4 qui est invariant. Donc la seule solution possible est 18214.

*Note : il peut être intéressant ici de remarquer (au moins comme étudiant en formation) qu'il y a là sujet à ambiguïté si on ne vérifie pas que le nombre convient bien. On pourrait préciser que compte tenu de la consigne, tout nombre entier plus grand que celui de départ finissant par 4 est atteignable. Comme il n'y en a qu'un, c'est bien l'étiquette d'arrivée.*

Magali : en augmentant de 5 en 5, le chiffre des unités du nombre est alternativement 2 et 7. Dans les étiquettes d'arrivée, il n'y en a pas qui se termine par deux, et parmi ceux qui se terminent par 7, un seul est plus grand que le nombre de départ. C'est donc 18 427.

**Géométrie (7 points)**

**Q1.** Les patrons corrects proposés dans les annexes 2 et 3, avec la nomenclature de l'exercice 2 de l'annexe 3, sont les figures B, C, D, E, G. On sait qu'il y a 11 patrons de cube (à isométrie près). Donc parmi les 6 restant on peut citer les plus simples :



*Justification de ce choix : en pratique on considère les variantes de B et E en retenant pour les 4 carrés consécutifs, ce que l'on appelle, dans le langage courant, la « surface latérale ». Les deux autres carrés sont des variantes pour « fermer la boîte » en haut et en bas.*

*Note : un site particulièrement intéressant à consulter, pointé ici sur les patrons du cube dynamiques, qui se plient sur un cube*

*[http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/truc\\_mat/textes/platon.htm](http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm)*

*Et là sur les patrons des solides de Platon (toujours en dynamique)*

*[http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/truc\\_mat/textes/platon.htm](http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm)*

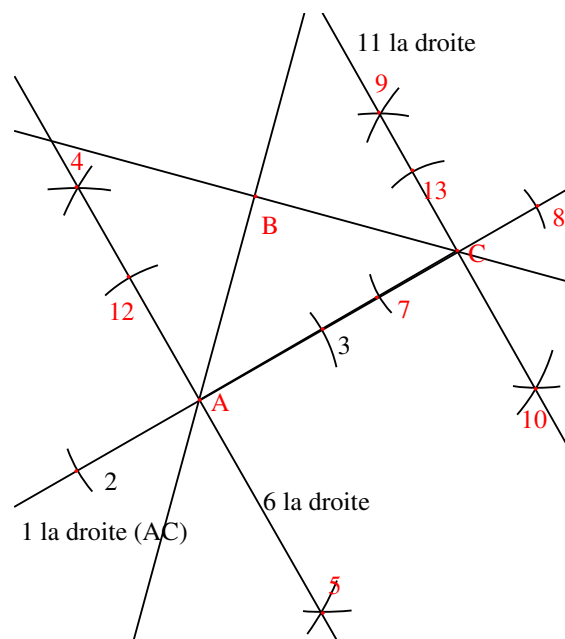
**Q2.a.** Le triangle ABC est rectangle (en B) et isocèle car c'est le carré ABCD partagé en deux par sa diagonale [AC].

**Q2.b.** On sait (cours – se retrouve par l'application du théorème de Pythagore) que la diagonale d'un carré de côté  $a$  est  $a\sqrt{2}$ .

**Q2.c.** Il s'agit de construire un triangle rectangle isocèle ABC connaissant l'hypoténuse [AC]. Au moins deux constructions sont possibles :

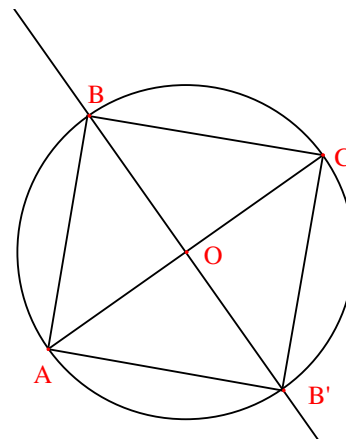
*Option 1 : construire, sur [AC], un triangle isocèle dont les angles à la base font  $45^\circ$  : pour cela on prend au compas la perpendiculaire à la droite (AC) en A puis en C, en prolongeant le segment, puis deux bissectrices des angles droits.*

*Ci contre on a détaillé les constructions des droites 6 et 11. Les droites finales (AB) et (BC) se font de même comme médiatrices (ou bissectrices) des points notés 3 et 12 d'une part, 7 et 13 d'autre part.*



**Option 2 :** on construit la moitié d'un carré de diagonale [AC] : on sait que c'est un parallélogramme dont les diagonales sont orthogonales et de même longueur :

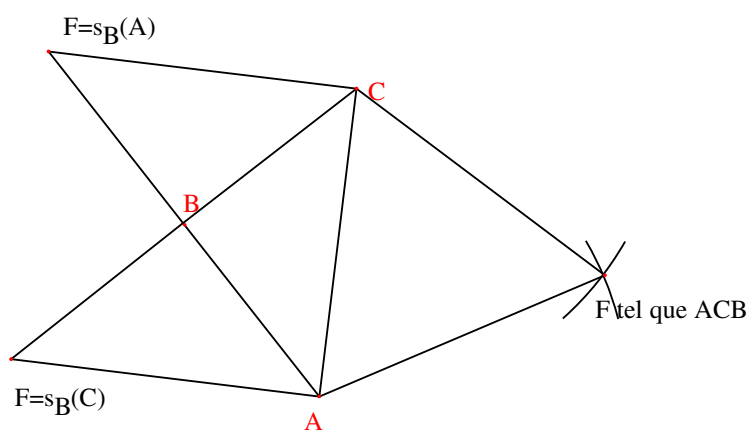
On construit d'abord, au compas, la médiatrice de [AC]. Elle coupe [AC] en O. Le cercle de centre O passant par A coupe la médiatrice en deux points B et B' qui donnent deux triangles ABC et AB'C solution car on a construit le carré ABCB'.



**Q3.a.** Patron de la pyramide FABC.

La face FAC est un triangle équilatéral de côté AC. Les trois autres faces sont des triangles rectangles isocèles identiques au triangle ABC.

Elles peuvent se construire par symétrie (centrale pour le point F, ou axiale pour la face, selon le point de vue). On peut obtenir, parmi les différentes solutions, celle-ci :



**Q3.b.** Le volume de la pyramide se calcule très simplement si on «pose» la pyramide non pas sur son plus grand triangle ACF – auquel cas il faudrait calculer, par Pythagore dans l'espace, la hauteur issue du sommet B –, mais bien si on la «pose» sur une de ses faces isocèles. Dans ce cas la base a pour aire un demi carré et la hauteur est le côté du carré :

L'aire est  $\frac{a^2}{2}$ , la hauteur  $a$  et donc le volume est  $V = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a^2}{2}$  soit  $V = \frac{a^3}{6}$ .

**Q4.a.** Pour  $a = 6$  cm, on trouve  $V = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{6^2}{2}$  soit  $V = 36$  cm<sup>3</sup>.

**Q4.b.** Chaque dimension doit être multipliée par 200 pour être en vraie grandeur. Le volume exact est donc  $200^3$  soit 8 000 000 fois plus grand que celui de la maquette. Comme  $1\text{m}^3 = 1\,000\,000$  cm<sup>3</sup>, le volume est donc de  $36 \times 8 = 288$  m<sup>3</sup>.

**Q5.** Parmi les assemblages proposés, le c) a un carré de trop pour être un patron de cube, de même le d) ne peut convenir car il faut qu'il y ait au plus 3 angles droits autour d'un sommet et un sommet en a 4 : on ne peut pas plier l'assemblage pour en faire un patron.

Toujours visuellement, le b) ne peut convenir car sur un pliage de 4 carrés consécutifs, il faut qu'il y ait une face supérieure et une face inférieure : les deux carrés du dessus se replient sur la même face du cube.

Donc si on doit chercher «les deux assemblages qui permettent » cela ne peut être que le a) et le e). On peut aussi reconnaître, culturellement, des patrons de cube.

*Note : on peut passer du e) – bien connu – au a) – moins connu – en faisant «rouler» les trois carrés de droite ainsi : celui du haut vers la gauche en haut (deux rotations d'un quart de tour vers la gauche) et les deux autres, de manière solidaire, vers le bas, un quart de tour vers la droite : on passe ainsi du patron e) à la figure a) ce qui valide le a) comme patron. Ceci est visualisable dynamiquement dans le site mentionné plus haut.*

**Géométrie - Questions complémentaires (5 points)**

**Q6.** Il s'agit de comparer les exercices 2 et 4 au niveau

**Q6.a. de la présentation :** l'exercice 2 est uniquement dans le plan et ne fait pas référence à un cube «représenté dans l'espace» comme l'exercice 3. On notera que l'exercice 3 est, lui, complètement «dans l'espace» puisque les feuilles de papier représentant les patrons ont elles aussi des ombres, comme le cube : l'intention des auteurs n'est probablement pas qu'esthétique, elle peut être de représenter une feuille de papier dans l'espace pour inciter, par exemple, à percevoir et effectuer plus rapidement les pliages.

Par ailleurs les carrés de l'exercice 2 sont vraiment petits pour une utilisation en classe.

**Q6.b. de la consigne :** nous avons rédigé la solution que Q5 explicitement en utilisant une certaine fermeture de la question 4 qui permet le raisonnement par recherche des intrus puisque le nombre de solution est donné dans la consigne... L'exercice 2 n'a pas cette fermeture, les élèves ont à chercher eux-mêmes le nombre de solutions.

D'autre part, la consigne de l'exercice 2 est un travail sur l'espace («en essayant de construire le cube»), avec des dessins dans le plan alors que celle de l'exercice 4 propose au final un travail dans le plan («reproduis-les» à partir de dessins plus installés dans la représentation plane de l'espace.

Enfin, la mention du papier quadrillé dans l'exercice 2 est une variable didactique importante pour la reproduction qui favorise l'entrée des élèves dans l'action (la tâche de reproduction est plus élémentaire) : il y a clairement ici une place à la manipulation.

*Note : la consigne étant suffisamment ouverte pour permettre une phase d'anticipation (à la charge alors du maître de séparer l'activité en deux parties : anticipation et vérification). Cette dernière remarque va nous permettre de proposer deux approches différentes de la question 7.*

**Q6.c. de la vérification :** comme mentionné plus haut, la vérification de l'exercice 2 est physique, *constructive*, les élèves doivent tenter de construire un cube (le monde sensible est un critère de validation) alors que dans l'exercice 4, l'implicite de «trouve –les» n'est pas constructif mais plus déductif, on envisage plus d'installer les élèves dans une démarche de raisonnement : non seulement la consigne, mais le choix des assemblages s'y prête également.

**Q7. Une organisation des exercices**

|  |  |
|--|--|
| Choix 1 : l'exercice 2 n'est qu'un exercice de manipulation  | Choix 2 : l'exercice 2 est un considéré comme un exercice d'anticipation   |
| Choix proposé : 2 – 1 – 4 – 3  | Choix proposé : 1 – 4 – 2 – 3 (ou 3 – 2)   |
| Exo 2 : car alors suite naturelle de la phase 1, l'élève se lance dans la construction des patrons et valide | Exo 1 : Manipulation de cubes, et lecture de la perspective cavalière (on notera qu'il y a 2 solutions A et B et non pas une seule). |
| Exo 1 : Lien entre l'objet et la lecture de perspective (voir ci-contre)                                     | Exo 4 : Anticipation fermée  |
| Exo 4 : Considéré comme plus simple (que le 3) de par la fermeture de la consigne.                           | Exo 2 : Considéré alors comme un exercice d'anticipation ouvert (voir Q6)  |
| Exo 3 : Exercice d'anticipation comme application des précédentes.   | Exo 3 : exercice d'anticipation, comme application des précédents  |

On peut choisir aussi « 3 – 2 » en intervertissant les rôles dans le choix 2 : 3 car anticipation avec réinvestissement du 1, et 2 car plus ouvert (le réinvestissement du 1 vu comme aide pas une difficulté)

Gérard :

Pour la question 7 de géométrie (chronologie des exercices), nous ne considérons l'exercice 1 que comme une lecture de perspective mais on peut avoir deux interprétations, comme pour l'exo 2 : si la vérification (lien entre objet et perspective) n'est faite qu'après avoir répondu à la question (A quel cube correspond ce patron ?...) l'activité est alors le passage d'une représentation (patron) à une autre (perspective).

Ce qui nous fait deux autres chronologies possibles.

## Complément au corrigé par J. Luc Poncin

### Arithmétique

#### Question 4

Il y a je pense deux variables didactiques essentielles qui permettent de prévoir différentes procédures comme elles sont indiquée dans le corrigé.

- **Le fait que l'énoncé propose ou non une situation « standard » de division euclidienne.**

C'est le cas dans l'énoncé c) parce que le nombre de départ est zéro, et c'est pourquoi on peut s'attendre, en CM2, à l'utilisation probable de la procédure experte de la division euclidienne. Dans les énoncés a) et b) ce ne sont pas des situations « standard » de division euclidienne parce que le nombre de départ n'est pas zéro, et cela explique qu'on peut s'attendre à des procédures personnelles.

- **Le rôle de l'éloignement des nombres**

Dans les trois énoncés cet éloignement est respectivement :

en a) 108, en b) 29403, en c) 5727.

C'est la grande différence entre ces nombres 108 et 29403 qui explique les deux types de procédures indiquées dans le corrigé

a) additions itérées de 23 au nombre de départ

b) additions par paquets

#### Question 5a

On pouvait aussi évoquer un comptage de  $n$  en  $n$  à partir d'un entier naturel donné ( $n$  étant un entier naturel) ou d'additions successives d'un même nombre entier naturel à un entier naturel de départ.

### Géométrie

#### Question 1

Voir les 11 patrons du cube dans Charnay, tome 2, chap 8, corrigé de l'exercice 30 p.217. Les 2 autres patrons qui pouvaient être proposés sont le 2<sup>e</sup> et le 3<sup>e</sup> patron de la 2<sup>e</sup> ligne.

#### Question 4b

Puisque les dimensions de l'objet ont été divisées par 200, on multiplie l'arête  $a$  par 200 :

$$6 \text{ cm} \times 200 = 1200 \text{ cm} = 12 \text{ m}$$

$$12^3 : 6 = 288 \quad \text{d'où le résultat.}$$

On peut aussi utiliser la propriété « Si on multiplie les dimensions d'un solide par  $k$ , alors son volume est multiplié par  $k^3$  »

**Question 6**

Comparaison des exercices 2 et 4 au niveau de la présentation, de la consigne, de la vérification.

**Question 6a – présentation**

Aspects communs aux deux exercices :

- la consigne est au dessus du dessin
- les patrons sont nommés par des lettres

Différences :

- présence du cube en perspective dans l'exercice 4
- il y a des ombres dans l'exercice 4 (peu visibles sur le sujet)
- nombres de patrons différents
- présence des pointillés sur les patrons de l'exercice 2
- dans l'exercice 4, il y a un assemblage de 7 carrés
- les carrés sont plus petits dans l'exercice 2

**Question 6a – consigne**

Aspects communs aux deux exercices :

- tutoiement de l'élève

Différences :

- question fermée dans l'exercice 4
- le mot *figure* est employé dans l'exercice 2 et l'expression *assemblage de carrés* est utilisée dans l'exercice 2
- la réponse attendue dans l'exercice 2 est de citer les lettres correspondant aux patrons choisis, et dans l'exercice 4, la réponse doit être donnée sous forme d'assemblages reproduits.
- La consigne de l'exercice 2 indique l'utilisation de papier quadrillé
- La consigne de l'exercice 2 indique de construire le cube

**Question 6c – vérification**

On peut aussi considérer que l'exercice 2 propose une vérification et que l'exercice 4 n'en propose pas.

**Commentaires après correction des copies du groupe 5**

Répartition des notes dans le groupe 5 :

| Intervalles de notes | Effectifs |
|----------------------|-----------|
| [0 ; 2[              | 0         |
| [2 ; 4[              | 0         |
| [4 ; 6[              | 0         |
| [6 ; 8[              | 4         |
| [8 ; 10[             | 0         |
| [10 ; 12[            | 5         |
| [12 ; 14[            | 3         |
| [14 ; 16[            | 3         |
| [16 ; 18[            | 11        |
| [18 ; 20]            | 2         |

Moyenne du groupe 14,04

**Arithmétique – question 5**

Dans certaines copies l'expression *addition par paquets* a été employée à propos de la procédure consistant à ajouter 23 plusieurs fois à partir de 17584. Si l'on précise addition « par paquet de 23 », l'expression peut convenir, mais l'*addition par paquets* désigne plutôt le procédé donné dans le corrigé à propos de l'énoncé b).

**Géométrie – question 3b**

Certains d'entre vous ont entamés le calcul comme ci-dessous et se sont arrêtés à  $\frac{a^3}{2}$

$$\frac{a^2}{2} \times a = \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Explication de la 2<sup>e</sup> égalité :  $\frac{a^3}{2}$  signifie  $\frac{a^3}{2}$  divisé par 3 et cette division par 3 revient à une multiplication par l'inverse de 3, c'est à dire à une multiplication par  $\frac{1}{3}$ .