Corrigé

Premier volet (12 points)

Première épreuve (8 points)

Exercice 1

Question 1 a

Le triangle...	Est-il rectangle ?	Est-il isocèle ?	Est-il équilatéral ?
DJH	**Non**	**Oui**	**Non**
ACG	**Oui**	**Non**	**Non**
AFC	**Non**	**Oui**	**Oui**
EHG	**Oui**	**Oui**	**Non**
Plusieurs choix possibles comme BDH ou ACJ	Oui	Non	Non

Question 1 b:

(il faut penser à affirmer et réfuter):
AFC :
Les segments [AF], [FC], [AC] sont des diagonales respectives des faces EFBA, BFGC, ABCD
Puisque EFBA, BFGC, ABCD sont trois faces d'un cube, donc ce sont 3 carrés superposables (égaux), donc les segments [AF], [FC], [AC] sont isométriques (égaux).
Donc le triangle AFC est équilatéral, (donc isocèle) et non rectangle (ses angles sont 60°).

Autre réponse : avec Pythagore et le calcul de la longueur de la diagonale d'une face.

EHG :
Dans le carré EHGF, ce triangle est rectangle isocèle (deux côtés de l' angle droit isométriques.). Il est rectangle en H, donc non équilatéral.

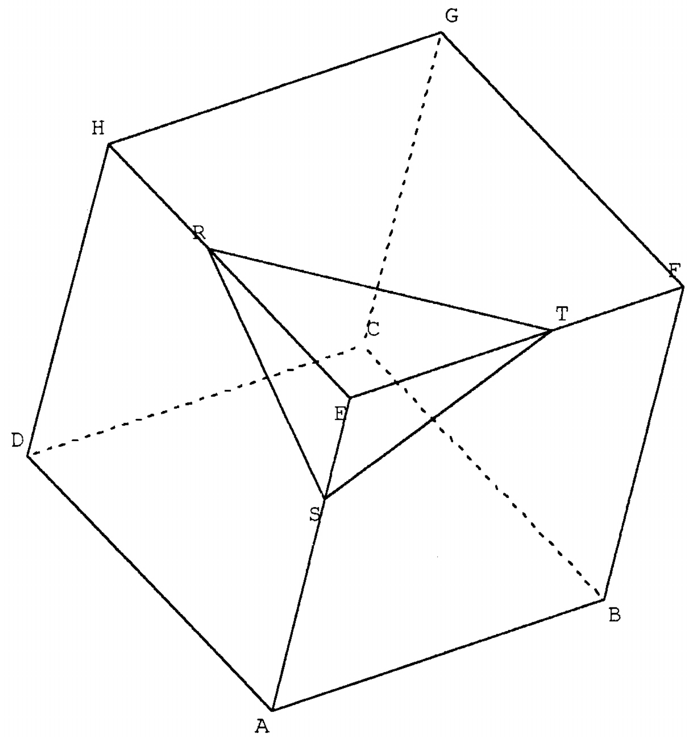
Question 2a : figure en page 2

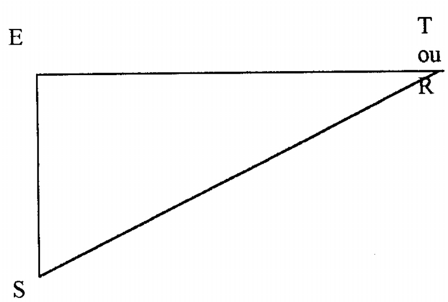
Les explications ci-dessous n'étaient pas demandées.
Le triangle ERT est isocèle rectangle (la longueur des deux côtés isométriques est de 6 cm).
On peut donc le construire pour obtenir la longueur RT.
Les deux triangles rectangles ERS et EST sont isométriques (les deux côtés de l' angle droit ont pour longueurs respectives 3 cm et 6 cm).
On peut donc les construire pour obtenir la longueur commune de ST et SR. Il suffit alors de **construire le triangle isocèle SRT par report des longueurs des côtés à l'aide du compas :** c' est le contour de la surface imprimée dessinée en taille réelle.

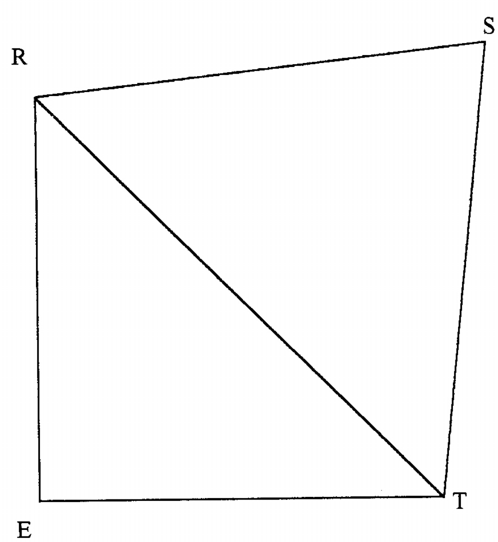
Question 2b
Dans le triangle ERT rectangle en E, appliquons le théorème de Pythagore on a:
$TR^2 = 6^2 + 6^2$ d' où $TR = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (en cm) (valeur approchée: 8,485 cm).

Ex 1 – Question 2a :

Le dessin en perspective ci-dessous n'était pas demandé.





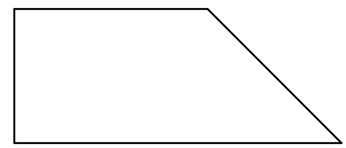


Exercice 2

Les explications ci-dessous n'étaient pas demandées.

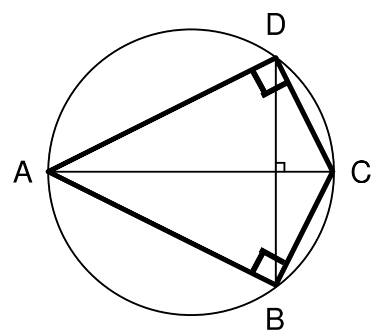
1°) a) Vrai : un rectangle est un quadrilatère convexe, il a 4 angles droits donc a fortiori il a deux angles opposés droits.

b) Faux : les trapèzes rectangles qui ne sont pas aussi des rectangles, n' ont pas deux angles opposés droits (leurs deux angles droits sont consécutifs).



c) Vrai : les carrés sont des rectangles, donc des « Amandins » (cf a) et ce sont aussi des losanges.

d) Faux : la figure ci-contre, constituée de deux triangles rectangles ACD et ACB non isocèles symétriques l' un de l' autre (appelée parfois « cerf-volant ») est bien un « Amandin » (deux angles opposés droits en B et en D), ses diagonales sont bien perpendiculaires, et ce n' est pourtant pas un losange.



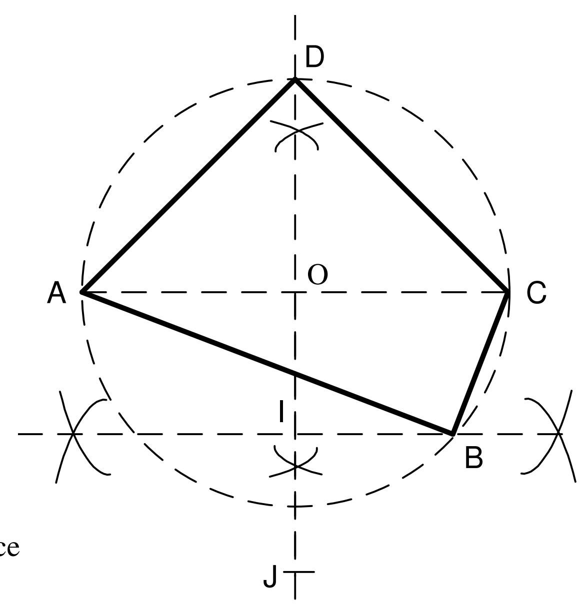
2) En utilisant les notations de la figure donnée dans le sujet :
- les triangles ADC et ABC étant rectangles respectivement en D et B, les points D et B sont sur le cercle de diamètre [AC].
- Si les diagonales sont de même longueur: AC = BD, donc [BD] est un diamètre du cercle,
donc [AC] et [BD] se coupent en leur milieu ;
- le quadrilatère ABCD dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur est un rectangle.

3) ***Les commentaires ci-dessous n'étaient pas demandés*****.**

- **Analyse de la figure** : On l' a déjà dit, l' « Amandin » est inscrit dans un cercle de diamètre [AC], donc de rayon 3 cm. La hauteur du triangle ABC mesurant 2 cm, le point B est situé sur une parallèle à (AC) située à 2 cm (Il y a deux tels parallèles, on choisira l' une des deux). Enfin, le triangle ADC étant isocèle, le point D est situé sur la médiatrice de [AC]. Enfin, en raison de la convexité, les points D et B sont de part et d' autre de (AC).

- **Programme de construction**

Tracer un segment [AC] de 6 cm.
Tracer la médiatrice de [AC]. Pour cela, tracer deux cercles centrés en A et en C et de même rayon, assez grand, pour que les deux cercles se coupent.. La droite qui joint les deux points d' intersection de ces cercles est la médiatrice cherchée.
Marquer le point O intersection de cette médiatrice et de (AC). C' est le milieu de [AC].
Marquer, sur la médiatrice un point I situé à 2 cm de O et un point J situé à 4 cm de O de sorte que O, I, J soient alignés dans cet ordre.
Tracer, par la méthode vue précédemment, la médiatrice de [OJ].
Tracer le cercle de diamètre [AC] (il est centré en O et passe par A).
Marquer B l' un des points d' intersection de la médiatrice de [OJ] avec ce cercle.
Marquer D, point d' intersection de la médiatrice de [AC] avec le cercle centré en O, en choisissant D dans le demi-plan limité par (AC) et ne contenant pas B.



Construction : les traits de construction sont en traits fins.

Exercice 3

1. Par hypothèse $a = 42q + 8$ et $100 < a < 200$
On en déduit: $100 < 42q + 8 < 200$
donc : $92 < 42q < 192$ d' où deux solutions $q = 3$ ou $q = 4$
c' est-à-dire pour a : $a = 42 \times 3 + 8 = \boxed{134}$ ou $a = 42 \times 4 + 8 = \boxed{176}$

2. a) Par hypothèse $a = 42\ q + 8$
donc $a + 28 = 42q + 36$
or $36 < 42$ donc $\boxed{\text{le quotient de } a + 28 \text{ par } 42 \text{ est } q \text{ et le reste est } 36}$
De la même manière
$a\cdot + 40 = 42q + 48$
$a + 40 = 42q + 42 + 6$
$a + 40 = 42\ (q + 1) + 6$ donc $\boxed{\text{le quotient de } a + 40 \text{ par } 42 \text{ est } q + 1 \text{ et le reste } 6}$

b) Puisque le quotient de $a + x$ par 42 est $q + 1$ on a :
$42\ (q + 1) \leq a + x < 42\ (q + 2)$
$42\ (q + 1) \leq 42q + 8 + x < 42\ (q + 2)$
$42 \leq 8 + x < 42 \times 2$
Donc $34 \leq x < 76$ c'est à dire $\boxed{34 \leq x \leq 75}$

3. Par hypothèse $a = b \times 42 + 8$
$0 \leq 8 < b$

a) Le plus petit entier b qui convient est 9.
$b \geq 9$
$42\ b \geq 42 \times 9$
$42\ b + 8 \geq 42 \times 9 + 8$
or $a = 42\ b + 8$ et $42 \times 9 + 8 = 386$ donc $a \geq 386$
Donc la plus petite valeur possible pour a est $\boxed{386}$

b) $a + 3 = b \times 42 + 11$ avec $0 \leq 8 < b$
Si le reste de la division de a + 3 par b est nul, c' est que 11 est divisible par b, donc b = 1 ou b = 11
Or $b > 8$ donc la seule possibilité est $\boxed{b = 11}$ D'où $a = 42 \times 11 + 8$ soit $\boxed{a = 470}$

Exercice 4

1) A = 125 B = 521 On calcule B – A = 521 – 125 = 396
2) Puisque A est un nombre entier ayant trois chiffres, on peut l'écrire sous la forme :
$100x + 10y + z$; le nombre B s'écrit alors $100z + 10y + x$
La différence entre A et B s'écrit :
$100x + 10y + z - (100z + 10y + x)$
$= 100x + 10y + z - 100z - 10y - x$
$= 99\ x - 99\ z$
$= 99\ (x - z)$
Donc cette différence est multiple de 99, et puisque 99 est lui même multiple de 9 et de 11, donc cette différence est multiple de 9 et de 11.

Deuxième épreuve : travaux d'élèves (4 points)

1) Comparaison des procédures de Sarah et **d'Aurélie**

Aurélie utilise la technique sans poser de soustractions (technique qui n'est plus au programme).

Cette technique exige d'effectuer simultanément la recherche des chiffres du quotient, des multiplications et des soustractions ; elle est plus complexe : l'imbrication multiplications-soustractions nécessite un apprentissage spécifique
exemple: $6 \times 7 = 42$, ôté de 42, il reste 0 et je retiens 4, $2 \times 7 = 14$, $14 + 4 = 18$, 18 ôté de 18 il reste 0

Cette technique nécessite d'être performant en calcul mental, une bonne connaissance des tables, le maintien en mémoire de nombreux résultats partiels ; elle ne peut être utilisée efficacement par tous les enfants : son coût mental est important (fatigabilité), le risque d'erreurs y est important et les contrôles locaux peu évidents.

Sarah utilise une technique consistant à écrire les soustractions ainsi que les multiplications (instructions officielles de 2002). Elle réutilise telles quelles les techniques de ces deux opérations ce qui, si elles sont déjà assez bien maîtrisées, la rend plus disponible pour gérer les éléments de technique à propos de la division euclidienne.
Ces éléments sont
- l'enchaînement des diverses phases de calculs et leur gestion à l'écrit
- la recherche des quotients partiels par approximation (essai $26 \times 5 = 130$, comparaison avec 182, jugement : l'écart entre 182 et 130 est supérieur à 26, ajustement, nouvel essai $26 \times 7 = 182$.)

Sa technique est plus simple, elle est plus facilement calculable par l'enfant. Celui-ci peut la faire évoluer vers une technique n'utilisant qu'occasionnellement l'écriture des multiplications et des soustractions, selon l'évolution de ses propres habiletés et sous sa responsabilité.

2) Erreurs et interprétations

Stève utilise la technique usuelle, mais il oublie le 0 intercalaire entre les chiffres 1 et 7 du quotient.
Il a retenu le moyen de passer d'une étape à la suivante : en abaissant un certain chiffre du dividende, on peut de nouveau trouver "en ... combien de fois.."
en 27 combien de fois 26, il y va 1 fois ; $27 - 26 = 1$; j'abaisse le 8 ;
en 18 combien de fois 26, je ne peux pas, j'abaisse le 2 ;
en 182 combien de fois 26, je peux, il y va...

Son erreur peut être expliquée par:
- la non compréhension de la signification des différents calculs dans la technique d'ensemble, notamment les rapports avec la numération ;
- pour l'élève « je ne peux pas » signifie qu'il n'y a pas d'action à effectuer ; il ne l'interprète pas comme « il y va zéro fois »
- l'absence d'anticipation de l'ordre de grandeur du résultat trouvé ou sa non prise en compte
- l'absence de contrôle de la vraisemblance du résultat par un calcul approché.

Lucie utilise aussi la technique usuelle mais comme Stève elle oublie le 0 intercalaire entre les chiffres 1 et 5 du quotient.
De plus, le chiffre des unités du quotient 5 qu'elle choisit est inférieur à 7, le chiffre exact, et elle obtient de ce fait un reste 52 supérieur au diviseur 26.

Pour Lucie, la méthode de recherche d'un chiffre par approximations successives (essai, contrôle, interprétation, réajustement) n'est pas opérationnelle ; la raison pourrait être :
- la conception de ce qu'est un calcul ; un résultat se trouve d'un seul coup ; tâtonner c'est se tromper, ne pas savoir ;
- contrôler le résultat ne fait pas partie des procédures de calculs ; c'est une autre tâche réservée à l'enseignant;
- l'élève ignore que le reste doit être inférieur au diviseur et il ne compare pas 52 et 26
- l'élève a conscience de l'invraisemblance du reste ainsi obtenu, mais il ne sait que faire et en reste là.

Laetitia ignore l'existence du 6 de 26 ; elle effectue de fait et correctement la division de 2782 par 2. Pourquoi ?
- La technique usuelle procède en ne prenant en compte qu'une "partie" des chiffres du nombre en jeu : dans 2782 on ne prend que 27 ; puis pour estimer le chiffre du quotient on peut "supprimer" le même nombre de chiffres à droite du dividende et du diviseur (en 27 combien de fois 26 ? Revient à en 2 combien de fois 2 ?).

Comme pour Steve et Lucie, il n'y a pas anticipation d'un ordre de grandeur du résultat, ni contrôle de la signification du résultat.

Deuxième volet (8 points)

Mise en oeuvre de l'activité de découverte.

Question 1

L'objectif spécifique de cette activité de découverte est, du point de vue du professeur, de proposer une situation d'approche de la division euclidienne. La situation favorise une approche par additions successives ou par multiplication de 24 par un nombre afin d'approcher 5940. Elle se prête moins à une approche par soustractions successives.

Question 2

Dans le moment d'exploration collective, le professeur peut s'attendre à des réactions des élèves dues à la difficulté de passer d'une histoire habituelle à une question de mathématiques. Cela peut se traduire par des questions comme:
- Le géant doit-il arriver juste au pied du château ?
- Le géant peut-il faire un pas plus petit à la fin ?
- Pourquoi le géant devrait-il reculer ?

D'autres questions, dues aux outils mathématiques pouvant être mis en oeuvre, peuvent apparaître :
- A-t-on le droit de faire des multiplications ?
- Faut-il trouver en une seule opération ?

Evidemment d'autres questions non mathématiques peuvent surgir comme des questions sur le Russie, les verstes, l'obstacle constitué par les montagnes etc.

Question 3 a)

Le professeur peut envisager les procédures suivantes :

<u>Procédure 1</u> : additionner 24 autant de fois qu'il le faut pour s'approcher de 5940.

Cette procédure pourra être commencée. Elle a peu de chances d'aboutir, car elle nécessite trop de calculs.

Procédure 2 : additionner 24 puis changer la procédure pour s'approcher plus rapidement de 5940, par exemple
$24 + 24 = 48$
$48 + 48 = 96$
$96 + 96 = 192$, etc.
Il s'agit d'une amélioration de la procédure 1, mais qui reste dans le champ additif.

Procédure 3 : (qui peut être issue des premières) : utiliser la multiplication et faire des essais successifs pour approcher $24 \times 200 = 4800$
$24 \times 250 = 6000$
$24 \times 240 = 5760$, etc.

Procédure 4 : utiliser la multiplication et des multiplicateurs puissances de dix et tenir compte des résultats déjà obtenus :
$24 \times 100 = 2400$
$2400 + 2400 = 4800$
$24 \times 50 = 1200$
$4800 + 1200 = 6000$
$24 \times 40 = 960$
$4800 + 960 = 5760$, etc.

Procédure 5 : les procédures dites par soustractions successives
Soustraire 24 à 5940 et ainsi de suite : $5940 - 24 = 5916$, $5916 - 24 = 5892$, etc. .
Cette procédure pourra être commencée. Elle a peu de chances d'aboutir.
Soustraire des paquets de 24 à 5940 : ($n \times 24$) soustrait de 5940. Selon le choix de n et la décision de modifier cette valeur (ou non) en cours de recherche, les procédures varieront.
Exemple d'une procédure, si n = 100 :
$5940 - 2400 = 3540$; $3540 - 2400 = 1140$; puis n = 10: $1140 - 240$, etc.

Question 3 b)

Pré requis pour ces procédures

Procédure 1 : savoir additionner, comptabiliser le nombre d'additions effectuées, et savoir quand s'arrêter.

Procédure 2 : savoir additionner, évaluer l'ordre de grandeur, savoir comptabiliser le nombre d'occurrences de 24, et savoir quand s'arrêter.

Procédure 3 : savoir multiplier, évaluer l'ordre de grandeur d'un produit et savoir agir sur la multiplicateur pour ajuster. Savoir quand on a fini.

Procédure 4 : savoir multiplier, comptabiliser le nombre d'occurrences de 24 pour les additionner en final, après avoir su quand il fallait s'arrêter.

Procédure 5 : savoir soustraire, évaluer l'ordre de grandeur d'un produit et savoir agir sur le multiplicateur pour ajuster, tenir une comptabilité du nombre d'occurrences de 24 et savoir quand on s'arrête.

Question 4

Les traces écrites que le professeur peut envisager sont issues des productions des élèves. Pour chaque procédure apparue dans la classe, le professeur pourra choisir un travail d'élève reconnu « facile à lire », « bien présenté », en vue d'une utilisation ultérieure, car dans l'esprit de l'activité et de la progression envisagée, on est loin de l'institutionnalisation.

Question 5

Les exercices 3, 4, 5 et 6 font apparaître une division qui tombe juste.

<u>Spécificité de l'exercice</u> 3
L'exercice utilise des termes typiques de la division « divise exactement », « reste ».
Cet exercice vise à trouver une division à reste nul.

<u>Spécificité de l'exercice</u> 4
Dans cette situation, le résultat tombe juste (15).
Il s'agit de trouver le nombre de part (ici, le nombre de présentoirs).

<u>Spécificité de l'exercice</u> 5
Il s'agit de trouver le nombre de part (le nombre de catalogues).
Dans cette situation, le résultat tombe encore juste (35). Intervient ici la question de changement d'unités : il est utile de passer de 22 kg 575 g à 22575 g, pour ensuite effectuer la division de 22575 par 645.

<u>Spécificité de l'exercice</u> 6
Il s'agit de trouver la valeur d'une part (une mensualité). (684 euros.)

Question 6

Cette situation de découverte est trop complexe pour être placée en début de progression sur l'apprentissage de la division pour deux raisons
- le choix du contexte
- le choix des valeurs numériques

D'une manière générale l'introduction des nouvelles notions se fait dans un contexte « quantité objet » afin que les élèves puissent engager des manipulations ou leur simulation, ce qui implique que les valeurs numériques ne soient pas trop importantes.

Dans une progression usuelle cette 1ère approche serait suivie d'une situation, placée dans le même contexte avec des valeurs numériques qui feront évoluer les procédures. Ensuite, seulement le contexte évolue vers les prix et les mesures.

De ce point de vue cette situation (« le géant ») est loin dans la progression et peut être suivie d'une institutionnalisation.

Barème

1er VOLET- 1ère EPREUVE (8 points)

Exercice 1 : 2,5 points

Question 1a : 0,5 point
1 erreur 0,5 point ; 2 erreurs 0,25 point ; 3 erreurs 0 point
Question 1b : 0,75 point
triangle AFC 0,5 point ; triangle EHG 0,25 point
Question 2a : 1 point
Question 2b : 0,25 point

Exercice 2 : 2,5 points

Question 1 : 1 point
$4 \times 0{,}25$
Question 2 : 1 point
Question 3 : 0,5 point

Exercice 3 : 2,25 points

Question 1 : 0,5 point $= 2 \times 0{,}25$
Question 2a : 0,5 point
0,25 point pour chaque calcul
Question 2b : 0,5 point
Question 3a : 0,25 point
triangle AFC 0,5 point
Question 3b : 0,5 point

Exercice 4 : 0,75 point

Question 1 : 0,25 point
Question 2 : 0,5 point

1er VOLET - 2e EPREUVE (4 points)

Question 1 : 1,5 point
Aurélie et Sarah : pour chaque élève 0,25 point pour la description et 0,5 point pour compétences / connaissances
Question 2 : 2,5 point
Trois erreurs à relever dont une apparaît deux fois.
Steve, Lucie ne mettent pas de zéro au chiffre des dizaines du quotient 2 x 0,25 = 0,5 point
Lucie : 182 - 5 x 26 = 52 sur 0,25 point.
Laetitia calcule en fait 2782 / 2 sur 0,25 point.
Explications sur ces 3 erreurs : 0,5 x 3 = 1,5 point.

2e VOLET (8 points)

Question 1 : 1 point
Division euclidienne : 0,5 point
Précision comme "procédure personnelle", "situation d'approche" : 0,5 point

Question 2 : 1 point
questions mathématiques 0,5 point
questions non mathématiques 0,5 point.

Question 3a : 2 points
0,5 point par procédure décomposé comme suit :
0,25 point pour citer la procédure ;
0,25 point pour l'exemple, la pertinence (parce qu'il ne suffit pas de "ressortir" les procédures citées dans le cours mais de les évoquer en fonction du contexte de l'activité).

Question 3b : 1 point = $4 \times 0{,}25$

Question 4 : 0,5 point
Trace écrite issue d'une production d'élève
en vue d'une utilisation ultérieure

Question 5 : 1 point
0,25 point par exercice ; 4 x 0,25 = 1 point

Question 6 : 1,5 point
Situer la séquence dans la progression : 0,5 point
Séquence précédente : 0,5 point
Séquence suivante : 0,5 point