

Résolutions de problèmes

Remise à niveau / Maths / Chapitre 29

I) Rappel

• Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ avec $b \neq 0$; $d \neq 0$; $f \neq 0$

• alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

• Exemple : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1+2+3}{2+4+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

II) Application à des problèmes de partage proportionnels et inversement proportionnels

A) partager une somme en parties proportionnelles à une suite de nombres

Partager une somme de 160€ en 3 parties respectivement proportionnelles aux nombres 7 ; 3 et 6, années d'ancienneté de 3 employés d'une entreprise.

Résolution :

Si, A, B, C sont les parts respectives, on a $\frac{A}{7} = \frac{B}{3} = \frac{C}{6}$

$$\frac{A}{7} = \frac{B}{3} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{7+3+6} = \frac{160}{16} = 10$$

• D'où $\frac{A}{7} = 10$ donc $A = 7 \times 10 = 70$

• et $\frac{B}{3} = 10$ donc $B = 3 \times 10 = 30$

• et $\frac{C}{6} = 10$ donc $C = 6 \times 10 = 60$

A recevra 70€

B recevra 30€

C recevra 60€

Remarque:

- Nous vérifions que $A + B + C = 70 + 30 + 60 = 160$

B) partager une somme en parties proportionnelles à plusieurs grandeurs

Exemple :

- Répartir une prime de 1500€ entre 3 employés, proportionnellement à leurs rémunérations (1500€, 1200€, 1400€) et à leur ancienneté (2 ans, 3 ans et 6 ans).

Résolution :

- Les parts A, B, C sont proportionnelles aux produits des deux nombres correspondants car, lorsqu'un partage doit s'effectuer relativement à plusieurs séries de grandeurs, la répartition s'effectue proportionnellement aux produits des nombres qui mesurent ces grandeurs.

• On a
$$\frac{A}{1500 \times 2} = \frac{B}{1200 \times 3} = \frac{C}{1400 \times 6}$$

- Pour simplifier remarquons que les parts A, B, C sont proportionnelles à 1500, 1200 et 1400, donc à 15, 12 et 14

- On obtient

$$\frac{A}{15 \times 2} = \frac{B}{12 \times 3} = \frac{C}{14 \times 6} = \frac{A+B+C}{30+36+84} = \frac{1500}{150} = 10$$

D'où $\frac{A}{30} = 10$ donc $A = 30 \times 10 = 300$ A recevra 300€

De même $B = 36 \times 10 = 3600$ B recevra 360€

et $C = 84 \times 10 = 840$ C recevra 840€

Remarque:

Nous vérifions que $A + B + C = 300 + 360 + 840 = 1500$

C) partager une somme en parties inversement proportionnelles à une suite de nombres

Exemple :

Distribuer 999 en 3 parts inversement proportionnelles aux nombres 4, 5 et 6.

Résolution :

Les parts A, B et C sont directement proportionnelles aux inverses de 4, 5 et 6.

C'est à dire
$$\frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{1}{5}} = \frac{C}{\frac{1}{6}}$$

On obtient

$$\frac{A}{\frac{1}{4}} = \frac{B}{\frac{1}{5}} = \frac{C}{\frac{1}{6}} = \frac{A+B+C}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{999}{\frac{37}{60}} = 1620$$

D'où $\frac{A}{\frac{1}{4}} = 1620$ donc $A = 1620 \times \frac{1}{4} = 405$ A recevra 405€

De même $\frac{B}{\frac{1}{5}} = 1620$ $B = 1620 \times \frac{1}{5} = 324$ A recevra 324€

Et $\frac{C}{\frac{1}{6}} = 1620$ $C = 1620 \times \frac{1}{6} = 270$ A recevra 270€

Remarque:

Nous vérifions que $A + B + C = 405 + 324 + 270 = 999$

D) partager une somme directement proportionnelle à une suite de nombre et inversement proportionnel à une autre suite de nombres

Exemple :

Partager une gratification de 185€ entre trois travailleurs A, B et C en parts directement proportionnelles à leurs anciennetés qui sont respectivement de 5, 8 et 2 ans, et inversement proportionnelles à leurs nombres de journées d'absence qui sont respectivement de 2, 10 et 5 jours.

Résolution :

Les parts A, B et C sont :

Directement proportionnelles aux nombres 5, 8 et 2.

Directement proportionnelles aux inverses de 2, 10 et 5, c'est à dire à

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{5}$$

De plus, lorsqu'un partage doit s'effectuer relativement à plusieurs séries de grandeurs, la répartition s'effectue proportionnellement aux produits des nombres qui mesurent ces grandeurs.

Nous en concluons que
$$\frac{A}{5 \times \frac{1}{2}} = \frac{B}{8 \times \frac{1}{10}} = \frac{C}{2 \times \frac{1}{5}}$$

On obtient
$$\frac{A}{5} = \frac{B}{8} = \frac{C}{2} = \frac{A}{25} = \frac{B}{8} = \frac{C}{4} = \frac{A+B+C}{37} = \frac{185}{37} = 50$$

D'où $\frac{A}{5} = 50$ donc $A = 50 \times 5 = 125$ A recevra 125€

De même $\frac{B}{8} = 50$ donc $B = 50 \times 8 = 400$ B recevra 40€

Et $\frac{C}{2} = 50$ donc $C = 50 \times 2 = 100$ C recevra 20€

Remarque:

Nous vérifions que $A + B + C = 125 + 40 + 20 = 185$