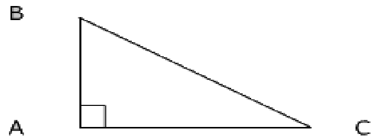
Théorême de Pythagore

Remise à niveau / Maths / Chapitre 24

Théorême

Le théorème de Pythagore s'applique toujours dans un triangle rectangle.

Soit ABC un triangle rectangle en A.



On peut écrire que $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Réciproque :
Si dans un triangle ABC, nous pouvons vérifier que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors nous pouvons conclure que ce triangle est rectangle en A.

Propriétés

On utilise le théorème de Pythagore pour calculer une longueur.
On utilise sa réciproque pour démontrer qu'un triangle est rectangle

Propriété à connaître pour vos futures démonstrations:
D'après Pythagore : dans un carré de côté « a », la diagonale vaut toujours $a\sqrt{2}$

Exercice

2) ABC est un triangle rectangle en A. AB=6cm et AC=12cm. E est un point du segment [AB] distinct de A et B.

La parallèle à la droite (AC) passant par E coupe la droite (BC) en F

La parallèle à la droite (AB) passant par F coupe la droite (AC) en G

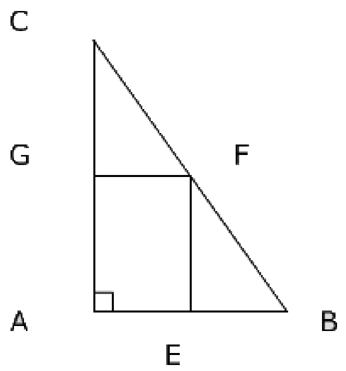
La quadrilatère AEFG obtenu est un rectangle.

a) Justifier les égalités $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$

b) Comparer les quotients $\frac{GF}{AB}$ et $\frac{CG}{CA}$

Corrigé

2) La figure ci dessous n'est pas à l'échelle, elle vous donne uniquement une idée des étapes de construction



a) Les droites (EF) et (AC) sont parallèles par construction. Appliquons le théorème de Thalès :

$\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$ donc $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$

b) De même les droites (GF) et (AB) sont parallèles. Appliquons le théorème de Thalès :

On peut écrire que $\frac{CG}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{GF}{AB}$

Nous pouvons donc dire que les rapports $\frac{GF}{AB}$ et $\frac{CG}{CA}$ sont égaux.

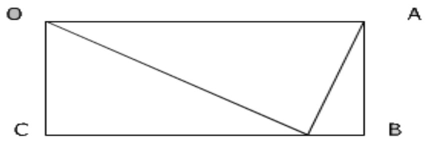
Exercice

3) a) Construire un rectangle OABC tel que : OA=10cm et OC=4cm
Placer le point M du segment [BC] tel que BM=2cm

b) Calculer AM et OM
Le triangle OAM est-il rectangle ? (prouver votre réponse)

Corrigé

3) a) La figure ci dessous n'est pas à l'échelle, elle vous donne uniquement une idée des étapes de construction



b) Pour calculer AM appliquons le théorème de Pvthagore dans le triangle ABM rectangle en B (puisque OABC est un rectangle) :

$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

Pour calculer OM appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle OCM rectangle en C (puisque OABC est un rectangle) :

$OM^2 = OC^2 + CM^2 = 4^2 + 8^2 = 80$ $OM^2 = 80$

Pour prouver que le triangle AMO est rectangle en M, calculons AO^2 puis $OM^2 + AM^2$ et voyons s'il y a égalité.

$AO^2 = 10^2 = 100$

$OM^2 + AM^2 = 80 + 20 = 100$

$AO^2 = OM^2 + AM^2$ donc le triangle AMO est rectangle en M.

Exercice

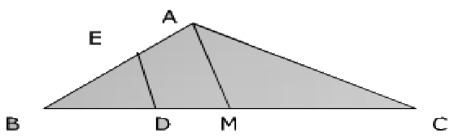
4) a) Tracer un segment [BC] tel que BC=8cm
Placer un point A tel que AB=5cm et AC=6cm
Placer D le point du segment [BC] tel que BD=2,4cm et E le point du segment [AB] tel que BE=3cm.
Placer M le milieu du segment [BC]

b) Calculer $\frac{BD}{BM}$ et $\frac{BE}{BA}$

Que peut-on déduire pour les droites (ED) et (AM) ?

Corrigé

4) a) La figure ci dessous n'est pas à l'échelle et n'est pas rigoureusement précise, elle vous donne uniquement une idée des étapes de construction



Pour tracer A il suffit de tracer un arc de cercle de centre B et de rayon 5cm puis un arc de cercle de centre C et de rayon 6cm. A est le point d'intersection de ces deux arcs.

b) $\frac{BD}{BM} = \frac{2,4}{4} = 0,6$ et $\frac{BE}{BA} = \frac{3}{5} = 0,6$

Nous en déduisons que $\frac{BD}{BM} = \frac{BE}{BA}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, nous pouvons conclure que les droites (AM) et (ED) sont parallèles.