

Démontrer en géométrie

Remise à niveau / Maths / Chapitre 31

I) Définition

- démontrer une affirmation donnée dans l'énoncé
- avoir une cohérence, suivre un enchaînement logique

II) Etape 1 : bien connaître les propriétés des figures

	Droites particulières	Angle	Côté
Triangle quelconque	Médiane : milieu au sommet Médiatrice : milieu perpendiculaire Hauteur : sommet perpendiculaire Bissectrice : deux secteurs	La somme des angles est égale à 180° .	Quelconque. Inégalité triangulaire : si $AB = AC + CB$, dans ce cas, les trois points sont alignés et ne forment pas un triangle.
Triangle isocèle	Les 4 droites particulières issues du sommet qui définit le triangle comme isocèle sont confondues.	2 angles égaux	2 côtés égaux
Triangle rectangle	Deux des hauteurs sont confondues avec les côtés (du fait de l'angle droit).	Un angle de 90°	Le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des côtés opposés.
Triangle équilatéral	Les droites particulières du triangle sont confondues.	Les trois angles mesurent 60° .	Les trois côtés sont égaux.
Parallélogramme	Les diagonales se coupent en leur milieu. Réciproque de Thalès	Les angles opposés sont égaux. La somme des angles est égale à 360° (comme tous les quadrilatères).	Les côtés sont égaux deux à deux. Les côtés sont parallèles deux à deux.
Rectangle	Parallélogramme + diagonales ont même longueur	4 angles droits Parallélogramme + un angle droit	Idem parallélogramme
Carré	Rectangle avec diagonales perpendiculaires	Idem rectangle	4 côtés égaux
Losange	Parallélogramme + diagonales perpendiculaires. Parallélogramme + deux côtés consécutifs égaux.	Idem parallélogramme	Idem carré
Trapèze		Quelconque	2 côtés parallèles.
Cercle et triangle	Le centre du cercle circonscrit au triangle est l'intersection des médiatrices. Dans le cas d'un triangle rectangle, le centre est le milieu de l'hypoténuse.		

III) Etape 2: comment démontrer

Quand on a à démontrer que deux droites sont **parallèles**, on peut utiliser :

- les propriétés d'une figure (parallélogramme, trapèze)
- le théorème de Thalès (en rappelant les conditions d'utilisation)
- la transitivité : deux droites parallèles entre elles le sont à une troisième, ou deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

Quand on a à démontrer que deux droites sont **perpendiculaires** entre elles, on peut utiliser :

- deux droites parallèles, si la première est perpendiculaire à une autre, la seconde aussi.
- Pythagore : quand on dispose de toutes les mesures des côtés.
- Hauteur d'un triangle ou médiatrice, une droite particulière d'un triangle isocèle ou d'un triangle équilatéral.
- Un triangle inscrit dans un cercle dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle.
- Propriétés d'une figure : diagonales d'un carré ou d'un losange.

Pour **mesurer des segments**, on peut utiliser :

- Thalès quand on a deux droites parallèles au sein d'un triangle (préciser les conditions)
- Pythagore dans le cas d'un triangle rectangle (à préciser)
- la propriété des médianes d'un triangle qui se coupent au $1/3$.
- Les propriétés des figures : 4 côtés égaux pour un carré ou un losange, deux côtés égaux pour un trapèze ou un rectangle isocèle.
- La hauteur d'un triangle si on connaît l'aire ainsi que l'un des côtés.

Pour donner la valeur d'un angle :

- On peut s'appuyer sur les propriétés des figures (ex : triangle équilatéral, isocèle)
- Appliquer la propriété des bissectrices
- Appliquer la propriété des droites particulières
- Connaître la valeur des angles dans des conditions particulières : angle plat = 180° , somme des angles d'un triangle, triangle équilatéral, angles égaux deux à deux dans un parallélogramme...

Pour démontrer qu'on a un type de figure précis, il faut faire appel aux propriétés de cette figure (voir tableau).

Exemples :

Il est important de connaître les **conditions suffisantes** pour affirmer que tel polygone est cette figure, cela évite de s'embrouiller dans des explications confuses et de perdre du temps.

Pour dire qu'on a un parallélogramme, deux côtés parallèles deux à deux suffit, ou deux côtés de même longueur et parallèles.

Pour dire qu'une figure est un rectangle, il suffit de dire que c'est un parallélogramme et qu'il y a un angle droit (un seul suffit pour avoir un rectangle).

Pour dire qu'une figure est un losange : des angles opposés égaux deux à deux et deux côtés consécutifs de même longueur. Ou diagonales perpendiculaire se coupant en leur milieu.

Pour dire qu'une figure est un triangle équilatéral : 3 angles égaux, ou trois côtés égaux, ou le centre de gravité est confondu avec l'orthocentre.

Quand vous cherchez à démontrer qu'on a telle figure vérifiez que les propriétés que vous avancez sont suffisantes.

Ex : un quadrilatère qui a deux côtés consécutifs de même longueur n'est pas forcément un parallélogramme (cela peut être un trapèze).

Un quadrilatère ayant des diagonales perpendiculaires (sans préciser sécantes en leur milieu), et deux côtés consécutifs de même longueur n'est pas forcément un losange (cela peut être un cerf-volant ou un trapèze).