C.R.P.E.

Concours blanc de mathématiques

Corrigé

<u>Partie scientifique</u> (8 points)

<u>Exercice I</u>   3 points

1.   1,5 point (1 si 1 ou 2 résultats manquants, 0,5 si seulement une partie des résultats étayés par une démarche correcte)

• <u>1ère méthode</u> : Notons $\overline{abbc}$ les nombres à rechercher. On a ainsi codé le fait que «*les deux chiffres du milieu sont identiques* »
Comme il est divisible par 5, c = 0 ou c = 5
Comme il est divisible par 9 a + 2 b + c est divisible par 9

<u>1er cas</u> : c = 5
a + 2 b + 5 est un nombre compris entre 6 et 32.
Les valeurs de a et b à retenir sont donc celles pour lesquelles a + 2b + 5 vaut 9, 18 ou 27

	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b										
0		6	7	8	**9**	10	11	12	13	14
1		8	**9**	10	11	12	13	14	15	16
2		10	11	12	13	14	15	16	17	**18**
3		12	13	14	15	16	17	**18**	19	20
4		14	15	16	17	**18**	19	20	21	22
5		16	17	**18**	19	20	21	22	23	24
6		**18**	19	20	21	22	23	24	25	26
7		20	21	22	23	24	25	26	**27**	28
8		22	23	24	25	26	**27**	28	29	30
9		24	25	26	**27**	28	29	30	31	32

On obtient (0225), 1665, 2115, 3555, 4005, 4995, 5445, 6885, 7335, 8775, 9225
<u>2ème cas</u> : c = 0

a + 2 b est un nombre compris entre 1 et 27.
Les valeurs de a et b à retenir sont donc celles pour lesquelles a + 2b vaut 9, 18 ou 27

	a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b										
0		1	2	3	4	5	6	7	8	**9**
1		3	4	5	6	7	8	**9**	10	11
2		5	6	7	8	**9**	10	11	12	13
3		7	8	**9**	10	11	12	13	14	15
4		**9**	10	11	12	13	14	15	16	17
5		11	12	13	14	15	16	17	**18**	19
6		13	14	15	16	17	**18**	19	20	21
7		15	16	17	**18**	19	20	21	22	23
8		17	**18**	19	20	21	22	23	24	25
9		19	20	21	22	23	24	25	26	**27**

On obtient 1440, 2880, 3330, 4770, 5220, 5660, 6660, 7110, 8550, 9000, 9990

• 2ème méthode: une construction par ordre croissant

1440
1665
2115
2880
3330
3555
4005
4770
4995
5220
5445
6660
6885
7110
7335
8550
8775
9990
9000
9225

2. 0,75 point Comme 6 est le produit de deux nombre premiers entre eux (2 et 3) les multiples de 6 sont les multiples communs de 2 et de 3.
Il s'agit donc parmi les nombres pairs de rechercher les multiples de 3.
On peut alors tester tous les nombres pairs à 4 chiffres consécutifs avec le critère de divisibilité par 3

nombres	sommes des chiffres
1234	10
3456	18
5678	26

Seul 3456 convient.

3. 0,75 point Le fait que le nombre à 4 chiffres formé par le digicode de Gaston en base douze, se termine par deux zéros signifie exactement que ce nombre est un multiple de $144 = 12^2$

On examine alors les codes obtenus précédemment. Comme 4 est un diviseur de 144, les codes corrects multiples de 144 sont aussi multiples de 4. Simplement avec un critère de divisibilité (examen des 2 derniers chiffres), on peut d'emblée éliminer tous les codes qui ne sont pas multiples de 4.

1440
~~1665~~
~~2115~~
2880
~~3330~~
~~3555~~
~~4005~~
~~4770~~
~~4995~~
5220
~~5445~~
6660
~~6885~~
~~7110~~
~~7335~~
~~8550~~
~~8775~~
9000
~~9225~~
9990

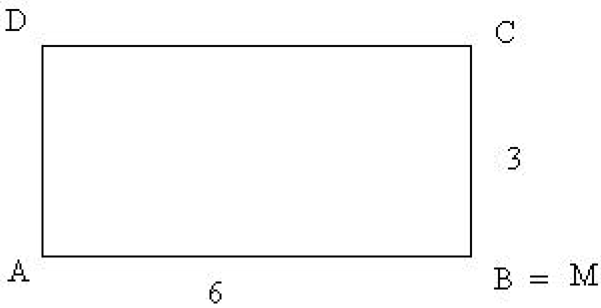
Parmi les valeurs restantes,

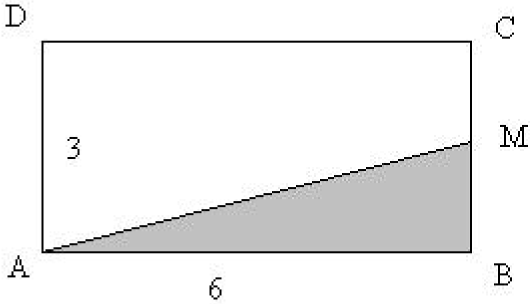
1440
2880
5220
6660
9000
9990

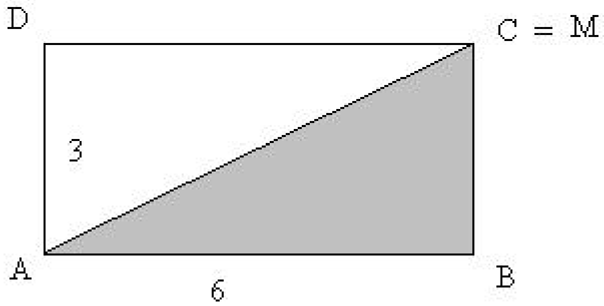
On vérifie que seuls 1440 et 2880 sont des multiples de 144 . Par ailleurs
$1440 = 10 \times 12^2 = \overline{(10)00}$ n'a que trois chiffres ((10), 0 et 0) en base douze. Il est donc à éliminer
$2880 = 20 \times 12^2 = \overline{18} \times \overline{100} = \overline{1800}$ a quant à lui bien 4 chiffres en base douze.
Le code de Gaston est donc 2880

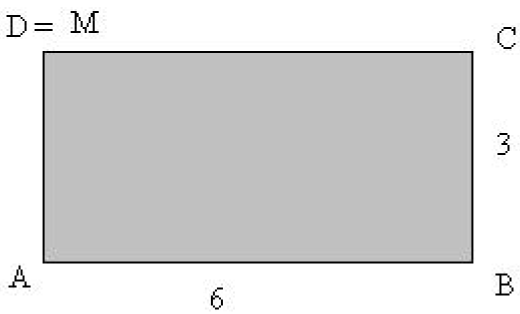
<u>Exercice II</u> (5 points)

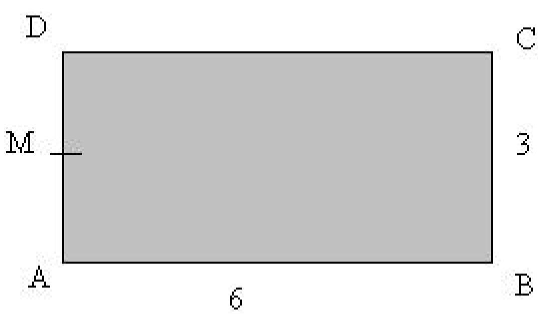
1. 1,25 point (0,25 X 5)











Position de M	Milieu de [AB]	B	Milieu de [BC]	C	D	Milieu de [AD]
Valeur de x	3	6	$6 + \frac{1}{2} \times 3 = 7,5$	$6 + 3 = 9$	$9 + 6 = 15$	$15 + \frac{1}{2} \times 3$ $= 16,5$
S(x)	0	0	$\frac{1}{2} \times (6 \times \frac{3}{2}) = 4,5$	$\frac{1}{2} \times (6 \times 3) = 9$	$6 \times 3 = 18$	18

2. 0,25 point
x peut prendre toutes les valeurs réelles comprises entre 0 et 18 (périmètre du rectangle ABCD)

3. 1 point (0,25 X 4)

a. $0 \leq x \leq 6$ M $\in$ [AB]   S(x) = 0

b. $6 \leq x \leq 9$ M $\in$ [BC]   S(x) correspond à l'aire du triangle ABM rectangle en B

$$S(x) = \frac{1}{2} \times AB \times BM = \frac{1}{2} \times AB \times (x - AB) = \frac{1}{2} \times 6 \times (x - 6) = 3(x - 6) = 3x - 18$$

c. $9 \leq x \leq 15$ M $\in$ [CD]   S(x) correspond à l'aire du trapèze rectangle ABCM

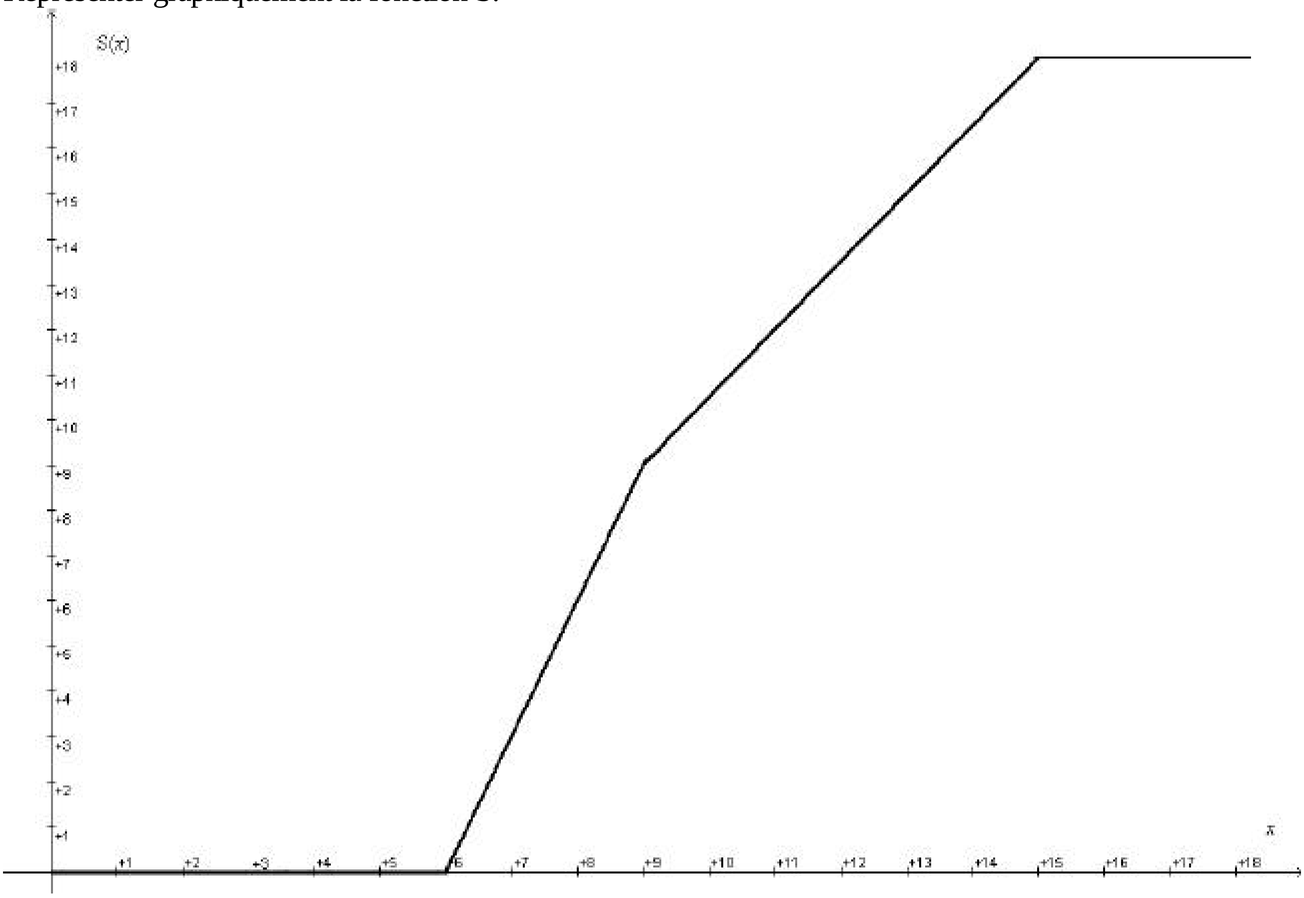
$$S(x) = \frac{1}{2} \times (AB + CM) \times BC = \frac{1}{2} \times (AB + (x - BC - AB)) \times BC = \frac{1}{2} \times (x - BC) \times BC$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \times (x - 3) \times 3 = \frac{3}{2}(x - 3) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

d. $15 \leq x \leq 18$ M $\in$ [AD] S(x) correspond à l'aire du rectangle ABCD

$$S(x) = AB \times BC = 18$$

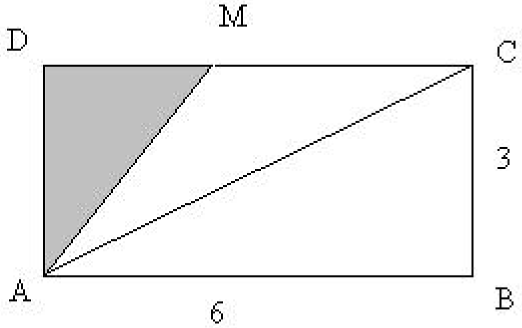
4. 1 point (0,5 pour l'exactitude + 0,5 pour un tracé qui rende compte des propriétés)
Représenter graphiquement la fonction S.



5. 1,5 point (0,5 X 3)

S(x) est égale aux trois quarts de l'aire de ABCD signifie $S(x) = \frac{3}{4} \times 18 = 13{,}5$

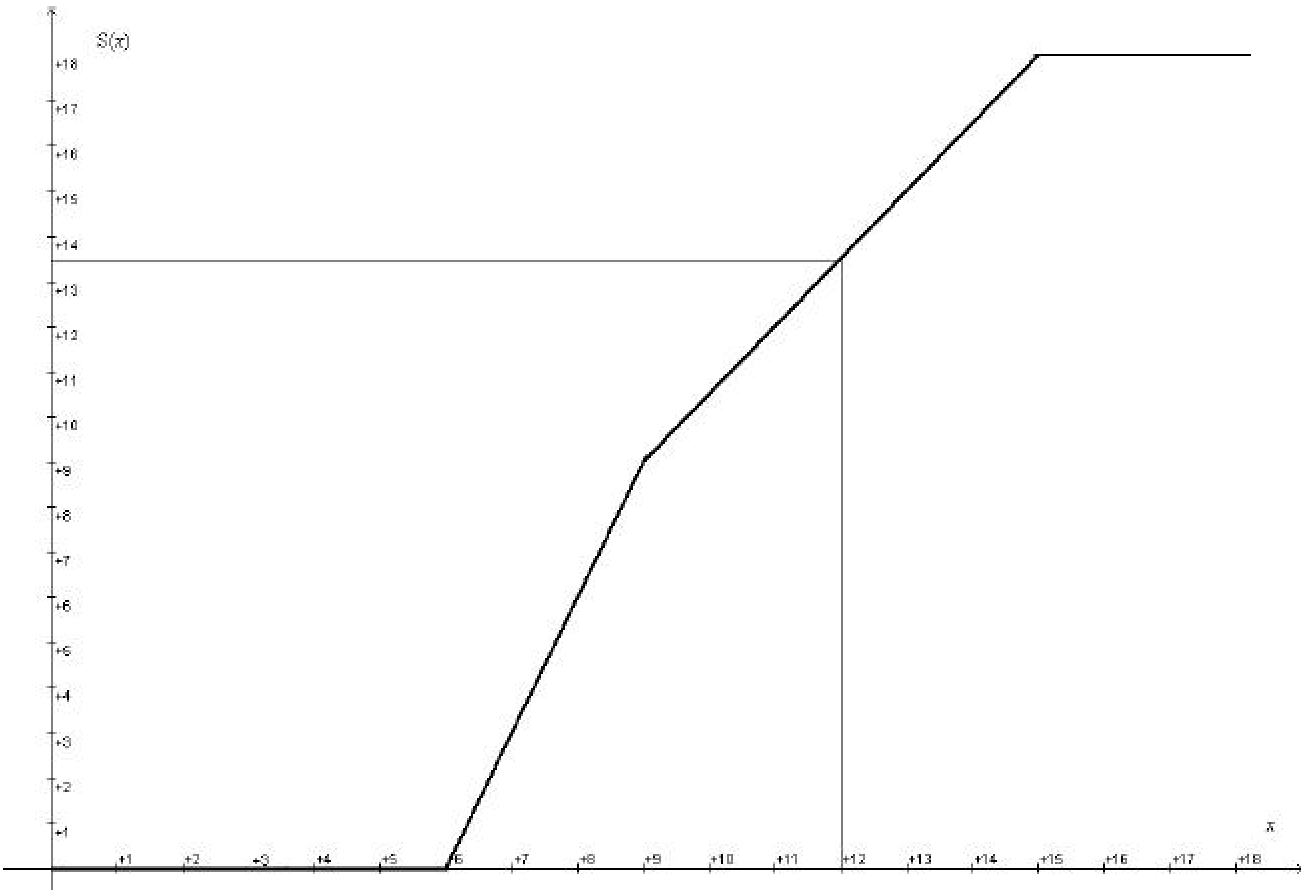
• Géométriquement: Cela signifie que M appartient au segment [DC] et par conséquent que l'aire de ADM vaut un quart de l'aire de ABCD c'est à dire la moitié de l'aire de ADC.



Comme ADC et ADM sont deux triangles rectangles qui ont [AD] pour côté commun adjacent à leur angle droit, on obtient nécessairement que DM = $\frac{1}{2}$ DC c'est à dire ici que M est le milieu de [DC].

• Graphiquement

On trouve x = 12 ce qui montre que M est le milieu de [DC]



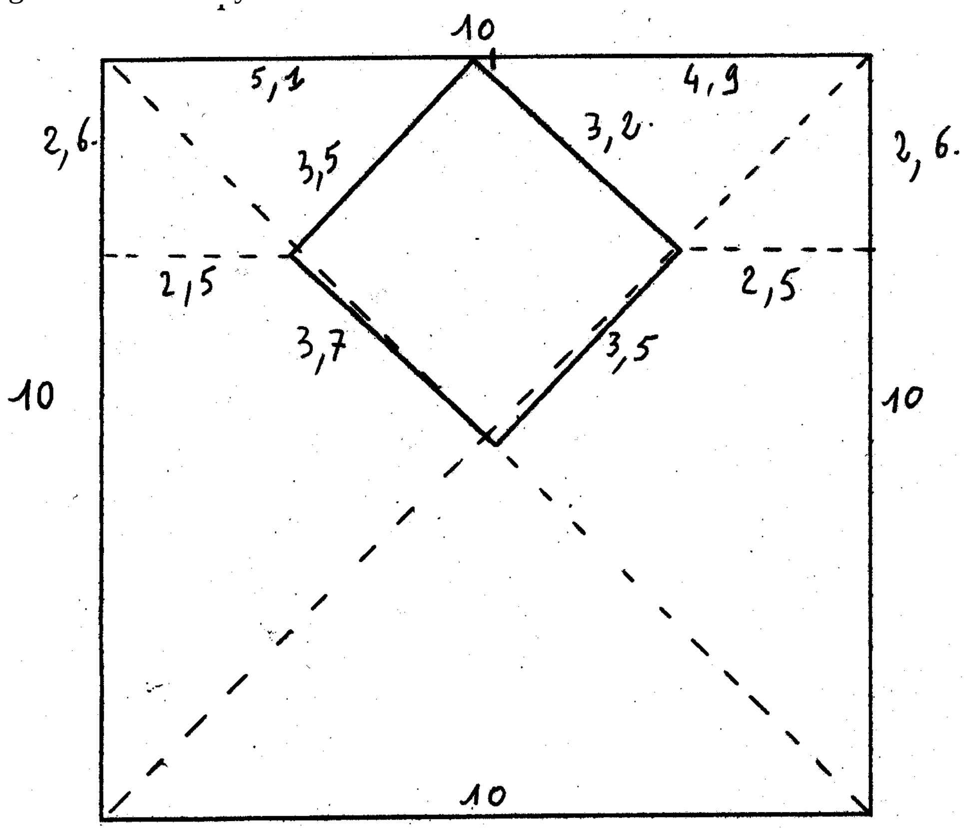
• Par le calcul

S est une fonction croissante, or S(9) = 9 et S(15) = 18 donc M appartient à [CD]
On a donc à résoudre 1,5 x – 4,5 = 13,5 soit 1,5 x = 18 puis x = 12.
M est au milieu de [CD].

<u>Analyse de productions d'élèves</u> (4 points)

1 point par production

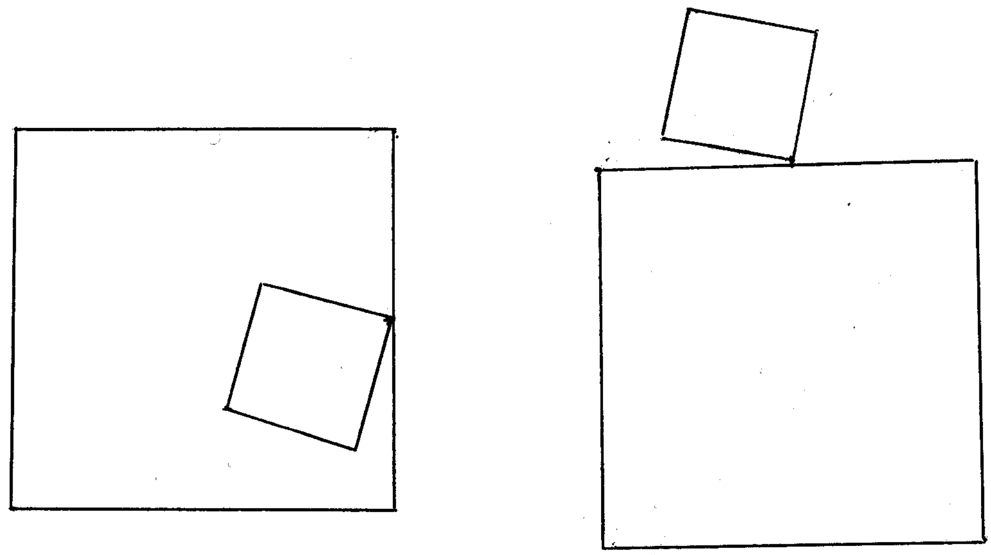
Figure d'aide à l'analyse



Production A

• <u>Perception</u> : L'élève a bien perçu la figure comme la juxtaposition de deux carrés tous deux définis par la longueur de leur côté (en dépit pour le carré intérieur de l'imprécision des mesures). Il a conscience de l'enjeu de positionnement du carré intérieur (sommet au milieu du côté du grand).

• <u>Fonctionnement</u> : Son message permet de réaliser des figures mais le récepteur a une latitude d'interprétation en particulier sur le fait que le petit carré soit intérieur



• <u>Informations</u> : Les informations sur les propriétés du premier carré peuvent paraître surabondante (*4 côtés égaux, 4 angles dr*oits).
Le fait que le second carré soit à l'intérieur du premier est implicite.
Son positionnement exact (difficile à exprimer en toute rigueur du fait de l'imprécision du dessin proposé) est une information manquante mais la figure présente un axe de symétrie : l'explication du positionnement de l' équerre le sous-entend.

• <u>Vocabulaire géométrique</u>: Recension : *carré, côté, égaux, angles droits, mesure, règle, équerre, traits.*
A l'exception du mot *traits* (pour demi-droite) et de la *pointe* de l'équerre, le vocabulaire utilisé est de bonne qualité du point de vue géométrique.

· *<u>Compétences/connaissances :</u> Connaissance sur les figures géométriques de base (carré* bien reconnu dans sa position « prototypique » (« sur un côté ») que « non-prototypique » (« sur un sommet ») un carré a 4 cotes isométriques et 4 angles droits ; un carré est défini par la mesure de son côté)
Compétence de décentration (plus que simplement descriptif le texte est assez précis sur un programme de construction avec des précisions sur l'usage des instruments –équerre- et une chronologie relativement efficace). Capacité à prendre certaines mesures (La règle graduée est l' outil qui permet de mesurer des segments I'équerre est I'outil qui permet de tracer des angles droits)

Production B

• <u>Perception</u> : L'élève s'il a perçu le grand carré mène une démarche beaucoup plus analytique (point par point) pour le quadrilatère intérieur (rectangle construit sommet par sommet) . L'imprécision des mesures et la nécessité de le positionner correctement peut être une cause. In fine cependant, il le qualifie de *rectangle*

• <u>Fonctionnement</u> : Son message permet de réaliser la figure à condition d'interpréter correctement les indications *en partant de la gauche et en partant du haut* (ce qui s'apparente mathématiquement à l'usage de deux repères de centres les sommets supérieurs du grand carré et de direction verticale et horizontale matérialisées par deux côtés consécutifs du grand carré). Le message fonctionne donc aux informations implicites près de l'orientation du carré dans la feuille de papier et des systèmes de repérages des deux derniers points marqués.

- Informations : Les informations sont suffisantes si l'on parvient à interpréter les imprécisions langagières et géométriques. A la fin les mesures et le parallélisme des côtés sont superflus.

- Vocabulaire géométrique: Recension : *carré, côté, milieu, points, rectangle, parallèles, mesure*

On peut noter l'usage d'un vocabulaire non spécifiquement géométrique relatif à l'orientation (*gauche, haut, droite*) pour placer les sommets du quadrilatère intérieur. Il semble d'ailleurs qu'il y ait une confusion droite/gauche.
Il y a une imprécision dans l'emploi du mot *milieu* pour *centre* du grand carré. La confusion la plus importante (qui paraît une inattention car le mot *côté* est connu)) concerne l'usage du mot *parallèle* relativement à des points

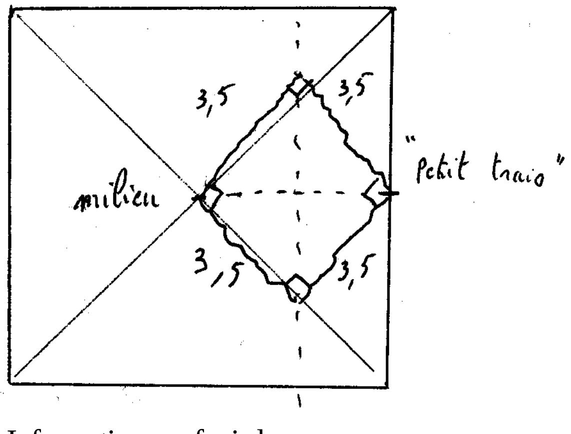
- Compétences/connaissances : Connaissance sur les figures géométriques de base (carré, rectangle). D'ailleurs le mot rectangle est employé de manière cohérente vues les propriétés utilisées – côtés opposés isométriques et côtés parallèles- (malgré une erreur de mesure 3,2 pour 3,7)

Compétence de décentration (plus que simplement descriptif le texte est assez précis sur un programme de construction avec une chronologie efficace).
Capacité à prendre certaines mesures.

Production C

- Perception : L'élève perçoit deux carrés dont le plus petit est positionné par deux de ses sommets opposés confondus respectivement avec le milieu d'un côté et le centre du grand carré comme l'avait anticipé le maître.

- Fonctionnement : Son message risque d'être inefficace car l'indication relative au milieu d'un des côtés du grand carré est très imprécise (*petit trait au bout de 5 cm).* Par ailleurs, seule la référence à la longueur du côté du petit carré permet de considérer les deux points initialement déterminés comme deux sommets opposés. Et il peut alors être difficile d'obtenir le carré indiqué.



- Informations : cf. ci-dessus.

- Vocabulaire géométrique: Recension : *carré, diagonales, milieu, côté*

On peut noter l'usage de *petit trait* pour indiquer la manière de marquer un point sur un segment.

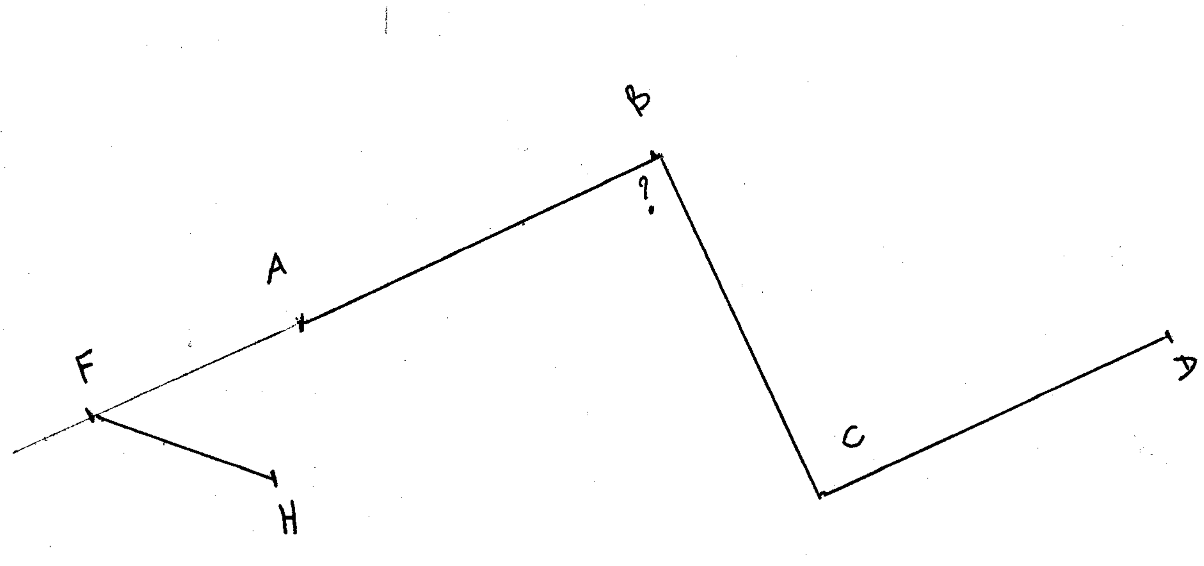
- Compétences/connaissances : Connaissance sur le carré (reconnaissance perceptive et usage des diagonales pour déterminer le centre). Le carré est aussi bien reconnu dans sa position prototypique (« sur un côté ») que non-prototypique (« sur un sommet »)

Capacité à prendre certaines mesures.

Production D

• Perception : L'élève analyse les mesures et se focalise sur les angles droits. La figure est perçue (ou décrite) comme une série de segments définis par leurs extrémités qui sont nommées par des lettres, par leur longueur et par les angles droits) qu'il forment deux par deux.
La première série de 4 segments de même longueur (10 cm) et formant des angles droits correspond au grand carré.
Une seconde série de deux segments de même longueur (5,1 cm) se coupant à angle droit (implicite) et (presque en leur milieu (2,6 cm) correspondent aux diagonales du petit carré.

• Fonctionnement : Le fonctionnement paraît très compromis surtout pour la seconde partie. Ci-dessous un suivi pas à pas en multipliant les erreurs. Par exemple d'une part les vérifications d'angle droit ne se ramènent pas strictement au tracé de perpendiculaires d'autre part la figure globale n'aide pas l'anticipation mentale (*trace A-D et vérifie l'angle droit* se rapporte peut-être aux diagonales mais comment le savoir). Enfin le tracé des segments laisse souvent ouvertes deux possibilités.
La seconde partie fonctionnerait moyennant les informations implicites suivantes : chaque nouveau segment tracé est perpendiculaire au précédent, le dernier segment tracé admet le précédent comme axe de symétrie.



• Informations : Ce sont des informations sur des mesures et des angles droits : elles ne permettent pas d'anticiper le résultat et laissent une marge d'interprétation très grande. Même si l'on a tracé le carré ABCD et les points F et H correctement, comment interpréter *à partir de cette droite à 2,6 cm trace une autre droite* ?

• Vocabulaire géométrique: Recension : *point, droite, angle droit, règle, équerre*
On peut noter la désignation des points A, B, C, D, F, G, H et I).
Le mot *droite* est employé systématiquement pour *segment*.

- <u>Compétences/connaissances :</u> Connaissance sur les angles droits, capacité de mesurer (l'équerre est l'outil qui sert à vérifier les angles droits dont on peut penser qu'ils sont tracés par appréciation visuelle et/ou repérage par rapport aux bords de la feuille) , démarche analytique complète.

<u>Partie didactique</u> (8 points)

1ère partie :

1. 0,5 point
Cela oblige les élèves à mobiliser une procédure en lien direct avec la proportionnalité. En effet s'il y a correspondance les élèves peuvent réussir la tâche sans utiliser des procédures directement liées à la proportionnalité :
- classer les poids et les prix par ordre croissant puis associer les poids et les prix en fonction de ce classement (le plus lourd avec le plus cher, …)
- à la fin lorsqu'il ne reste plus qu'un prix et un poids l'élève les associe sans calcul.

2.a. 0,5 point (0,25 par procédure) Procédure la plus probable : pour 100g on paie 8 €, 300 g étant trois fois plus lourd on va payer trois fois plus cher donc 24 €. Il s'agit de l'application de la propriété multiplicative de la linéarité.
Il peut y avoir un retour à l'unité (beaucoup moins probable compte tenu des nombres) : pour 1g on paie 0,08 € donc pour 300 g on paie
$0{,}08 \times 300 = 24$ €.
Etant donné que c'est le début de l'approche de la proportionnalité on ne peut guère trouver d'autres procédures correctes.

Commentaires : *Les procédures telles que produit en croix (hors programme de l'école) ou calcul du coefficient de proportionnalité seront pénalisées si elles sont citées par des étudiants.*

2.b. 0,5 point (0,25 par procédure)
Pour 250 g les élèves peuvent calculer le prix pour 50 g (en utilisant la propriété multiplicative de la linéarité : c'est la moitié de 50 g donc le prix est la moitié de 8 € donc 4 €) puis :
- soit retrancher le prix trouvé au prix de 300 g car 250 g = 300 g – 50 g (ils utilisent la propriété additive de la linéarité)
- soit ajouter le prix de 50 g au double du prix de 100g (ils utilisent la propriété additive de la linéarité).

3.a. 0,75 point(0,25 pour l'erreur classique (0 sinon) + 0,5 pour l'analyse
Pour 104 g l'élève trouve 12 €.
Procédure : il constate qu'il faut ajouter 4 g à 100 g pour obtenir 104 g, il pense donc qu'il faut ajouter 4 € à 8 €. Il applique le modèle additif qui est induit par le fait qu'il est bien plus facile de calculer la différence de ces deux nombres que de calculer le coefficient directeur.

3.b. 1 point (0,5 par argument)
Arguments possibles pour invalider 12 € :
- Pour 150 g on trouve 12 € donc ce ne peut pas être le prix également de 104 g
- Calcul de l'ordre de grandeur du résultat : 104 g c'est très proche de 100 g donc le prix doit être proche de 8 €.
- Si avec 4 g on paie 4 € de plus cela signifie qu'1g coûte 1 € donc 100 g coûteraient 100€.

4. 0,25 point
Objectifs de l'activité : Savoir résoudre un problème de proportionnalité à l'aide des propriétés additive et multiplicative de la linéarité .

5. 0,5 point
Commentaires : il s'agit de proposer des exercices qui réinvestissent les propriétés additive et multiplicative de la linéarité avec des coefficients simples pour la propriété multiplicative puis des exercices un peu plus complexe pour différencier mais en faisant en sorte que les propriétés de linéarité soient toujours utilisables.

Exemple possible : prix pour 200 g, 450 g, 75 g et 1kg.
Puis prix de 375 g, 800g, 625 g pour différencier.

Commentaire : il faut justifier ce choix.

2ème partie :

6. 1,75 point (0,25 sur l'aspect maths + 0,5 sur la différence des procédures + 0,75 sur les différences de contexte + 0,25 sur la validation)

	Prix des morilles	Recette de cuisine
Notion mathématique en jeu	La proportionnalité	La proportionnalité
Procédure	Propriétés additive et multiplicative de la linéarité	Propriétés additive et multiplicative de la linéarité et utilisation du coefficient de proportionnalité (par exemple entre le poids de beurre et celui de sucre).
Contexte	Des prix . Dans ce cas la proportionnalité s'appuie sur une convention sociale. Dans ce cas l'élève peut avoir cette connaissance sociale à travers l'expression : s'il y en a deux fois plus c'est deux fois plus cher. L'élève doit choisir parmi des réponses. Il y a deux grandeurs en jeu qui ne sont pas de même nature : prix et poids	Une recette de cuisine. Dans ce cas la proportionnalité est un outil de modélisation qui permet effectivement de conserver le goût. Ce n'est pas du tout évident que les élèves aient cette connaissance. L'élève doit calculer les réponses. Il y a 3 grandeurs dont deux sont de même nature.
Validation	Il n'y a pas vraiment de validation plutôt des outils de vérification par retour à l'ordre de grandeur.	Idem

7. 0,5 point
Deux choses peuvent soit inciter les élèves au passage par un tableau soit pour les aider à comprendre l'intérêt d'un tableau :

- il y a trois grandeurs à distinguer dont deux sont de même nature
- il est demandé aux élèves d'écrire comment ils ont fait.

8. 0,75 point (0,25 par méthode)
Méthode 1 : revenir à la même quantité d'eau
Pour la boisson A : 12 verres d'eau correspondent à 6 morceaux sucres. Donc la boisson A est moins sucré que B car dans B pour 12 verres il y a 10 sucres.

Méthode 2 : revenir à la même quantité de sucre
Pour la boisson A : 10 sucres correspondent à 20 verres d'eau. Donc la boisson A est moins sucrée que la boisson B car dans B il y a moins d'eau pour 10 sucre.

Méthode 3 : Pour la boisson A il y a deux fois plus de verres d'eau que de morceaux de sucre alors que pour B il y a 1,2 fois plus de verres d'eau que de sucre.

9.a. 0,75 point (0,25 pour l'argument + 0,5 pour la modification)
Sophie a raison car il y a plus de sucre dans la bouteille B.

On peut prendre les données suivantes :
Boisson A : 6 verres et 3 morceaux de sucre
Boisson B : 2 verres et 2 morceaux de sucre.

9.b. 0,25 point
Il y a plus d'eau dans B mais il y a également plus de sucre.