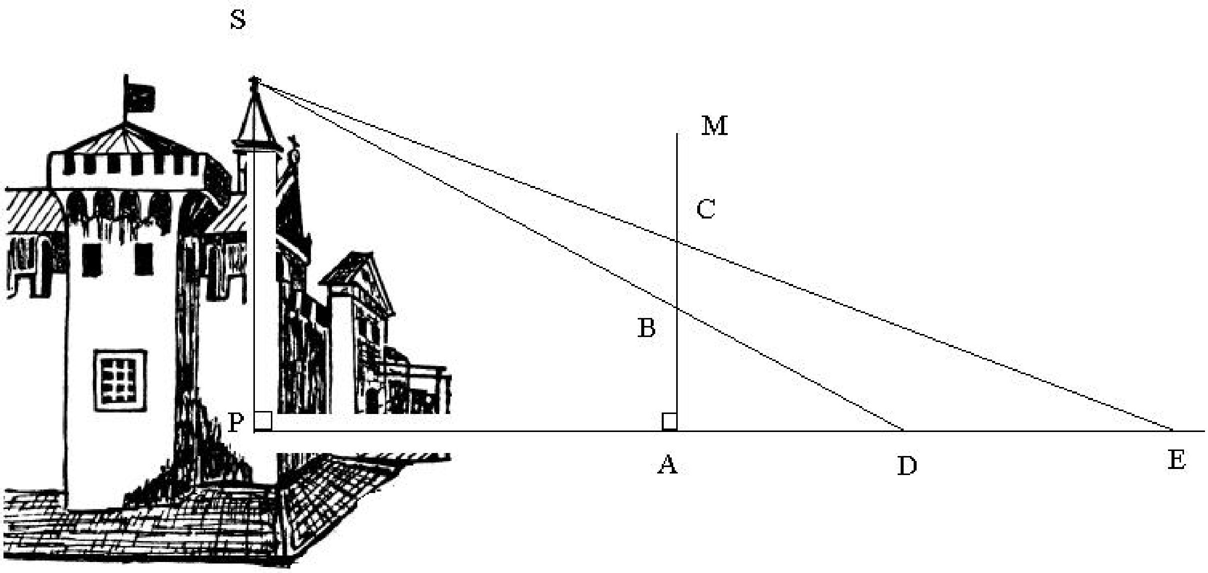
Devoir d'entraînement n°3
Corrigé

Problème 1



La modélisation de la situation permet d'affirmer que (SP) et (AC) ont (PE) pour perpendiculaires commune donc sont parallèles.

On applique le théorème de Thalès dans SPD
(SP) // (AB)
D, B, S sont alignés
D, A, P sont alignés par conséquent

$\frac{DA}{DP} = \frac{AB}{SP}$

On applique le théorème de Thalès dans SEP
(SP) // (AC)
E, C, S sont alignés
E, A, P sont alignés par conséquent

$\frac{EA}{EP} = \frac{AC}{SP}$

$\frac{DA}{DP} = \frac{AB}{SP}$ se traduit par $\frac{1}{1+AP} = \frac{1,25}{SP}$ puis par SP = 1,25 + 1,25 AP

$\frac{EA}{EP} = \frac{AC}{SP}$ se traduit par $\frac{2}{2+AP} = \frac{2,4}{SP}$ puis par SP = 2,4 + 1,2 AP

On obtient alors 1,25 + 1,25 AP = 2,4 + 1,2 AP
0,05 AP = 1,15 AP = 23

Finalement SP = 30 m

Problème 2

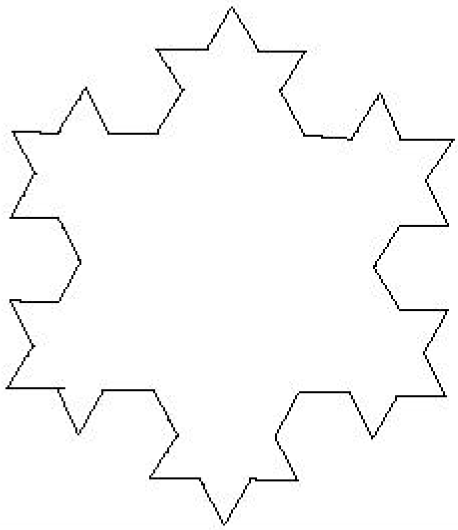
1°) Etape n = 1
Nombre de segments **:** 3
Longueur des segments a
Le périmètre vaut 3a

2°) Etape n = 2
Nombre de segments **:** $3 \times 4 = 12$
Longueur des segments $\frac{a}{3}$
Le périmètre vaut 4a

3°) Etape n = 3
Nombre de segments **:** $3 \times 4 \times 4 = 3 \times 4^2 = 48$
Longueur des segments $\frac{a}{3^2}$
Le périmètre vaut $48\times \frac{a}{3^2} = \frac{16}{3}a$

Sur chaque côté des triangles on continue à construire des triangles équilatéraux.

Exprime le périmètre de cette figure en fonction de a.



4°) Etape n = 20
Nombre de segments **:** 3×4^{19}
Longueur des segments $\frac{a}{3^{19}}$
Le périmètre vaut $3 \times 4^{19} \times \frac{a}{3^{19}} = \frac{4^{19}}{3^{18}}a$

.

Problème 3

On note H l'herbe présente sur un arpent, P l'herbe qui pousse sur un arpent en une semaine et B l'herbe mangée par un bœuf en une semaine

$3 \times 2 \times B = 2H + 2 \times 2 \times P$

$2 \times 4 \times B = 2H + 2 \times 4 \times P$

$6B = 2H + 4P$

$8B = 2H + 8P$

$3B = H + 2P$

$4B = H + 4P$

$12B = 4H + 8P$

$12B = 3H + 12P$

On en déduit que

$3H + 12P = 4H + 8P$

c'est à dire

$\mathbf{H = 4P}$

Puis de plus avec $3B = H + 2P$

$3B = 6P$ c'est à dire $\mathbf{B = 2P}$

On cherche alors x tel que $x \times 6 \times B = 6H + 6 \times 6 \times P$

i.e. $xB = H + 6P$

puis $xB = 10P$

puis $x \times 2P = 10P$ d'où $x = 5$

On peut aussi raisonner en utilisant la proportionnalité entre le nombre de bœufs et le nombre d'arpents.

	Bœufs	Arpents	Semaines
Hypothèse 1	3	2	2
Hypothèse 2	2	2	4
Corollaire 1	6	6	4
Corollaire 2	9	6	2

Corollaire 3 : d'après corollaires 1 et 2 : 3 bœufs se nourrissent pendant 2 semaines de ce qui pousse sur 6 arpents pendant 2 semaines

Hypothèse 1 : 3 bœufs se nourrissent de ce qui est sur 2 arpents et de ce qui y pousse pendant 2 semaines

Corollaire 4 : d'après hypothèse1 et corollaire 3, ce qui se trouve sur 2 arpents équivaut à ce qui pousse sur 4 arpents pendant 2 semaines

Corollaire 5 : d'après corollaire 4 , ce qui se trouve sur 1 arpent équivaut à ce qui pousse sur 2 arpents pendant 2 semaines

Corollaire 6 : d'après hypothèse1 et corollaire5, 3 bœufs se nourrissent donc pendant 2 semaines de ce qui se trouve sur 3 arpents

Corollaire 7 : d'après corollaire 5, ce qui se trouve sur 9 arpents équivaut à ce qui pousse sur 6 arpents pendant 6 semaines

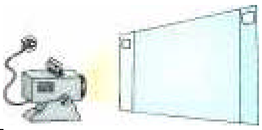
On cherche ainsi le nombre de bœufs qui peuvent se nourrir de 15 arpents pendant 6 semaines

Corollaire 8 : d'après corollaire 6, 15 bœufs se nourrissent donc pendant 2 semaines de ce qui se trouve sur 15 arpents.

Conclusion : d'après corollaire 8, 5 bœufs se nourrissent donc pendant 6 semaines de ce qui se trouve sur 15 arpents

Cqfd …

Didactique



En fin de CM1, un maître conçoit, pour sa classe de 22 élèves, un dispositif expérimental lui permettant de travailler sur les ombres. Pour cela, il dispose d'une lampe, d'un support sur lequel il fixera des formes carrées découpées dans du carton et d'un écran sur lequel seront projetées les ombres des formes carrées. Ceci incite à s'interroger sur nos propres représentations sur les ombres (en cas de projection orthogonale il y a respect des angles et des proportions sinon cela ne préserve que l'alignement, le parallélisme et les proportions pour des points alignés : la projection d'un carré pourrait être un parallélogramme voire un segment.) Ici on va projeter de manière ultra classique donc cela ne posera pas problème sur la forme obtenue .

Par ailleurs, il faut se questionner sur le modèle mathématique sous-jacent : il n' y a pas de relations simples entre les longueurs projetées et la distance à l'écran qui sont cependant deux grandeurs liées tandis qu'il y a inverse proportionnalité entre les longueurs projetées et la distance au projecteur. A distance constante, il y a proportionnalité entre les longueurs de l'objet et les longueurs projetées. C'est ce dernier point qui sera utilisé.

On supposera que :

- *le dispositif est opérationnel et permet d'obtenir des ombres aux contours nets, sur lesquelles il est possible d'effectuer des mesures de longueurs précises au mm près ;* On perçoit les problèmes importés au sein des maths par un dispositif physique.

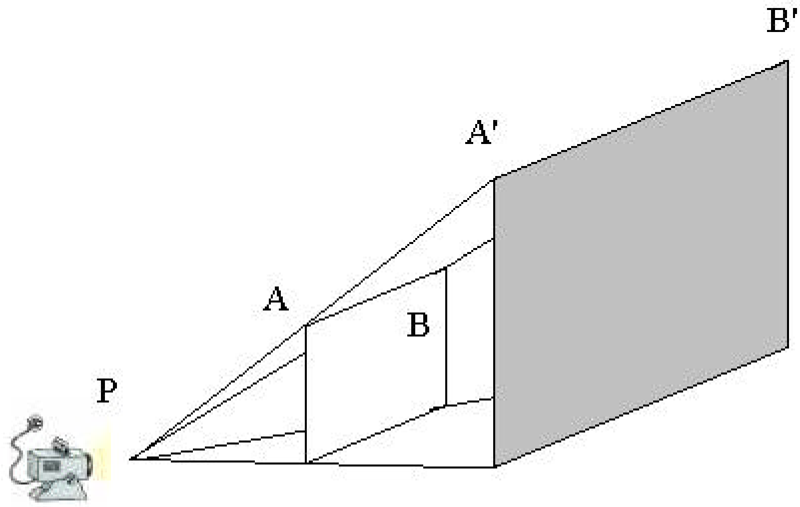
- les élèves ont déjà travaillé sur les ombres d'un point de vue géométrique. I1s savent, en particulier, qu'il existe des positions relatives de la lampe, du carton carré et de l'écran pour lesquelles l'ombre d'un carré est un carré ; La dévolution de la situation physique est facilitée cependant on peut redouter une rivalité entre le point de vue physique et le point de vue mathématique relativement au contrat didactique.

▸ *les distances, d'une part entre la lampe et le carton, d'autre part entre le carton et l'écran, sont maintenues constantes tout au long de la séance* ; On s'intéressera donc à la proportionnalité entre les longueurs de l'objet et les longueurs projetées. Ceci fait quand m^me penser que les élèves ne devront pas s'intéresser aux surfaces.

▸ *dans cette classe, les élèves recourent librement à la calculatrice. Ceci devrait diversifier les* procédures en minimisant les variables didactiques des rapports entretenus par les nombres entre eux. Cependant nous verrons les problèmes d'usage de la calculatrice…

1.1. Aucun élève n'a répondu au maître qu'il était impossible de prévoir la mesure du côté de l'ombre par un effet de contrat didactique. Ils ont déjà travaillé sur les ombres et la question du maître appelle une réponse ; par conséquent, ils se sentent mis en demeure de répondre et se comportent scolairement par rapport à cette injonction. Pour répondre, outre le hasard, on peut penser qu'ils mobilisent une image mentale héritée de leurs expériences récentes de la situation pour proposer un ordre de grandeur vraisemblable. La variété des réponses montre cependant que leurs représentations sur les ombres en terme de grandeur ne sont pas fixées (ombre plus grande ou plus petite que le carton)

1.2. Le maître a probablement le projet de se servir de la proportionnalité entre les longueurs de l'ombre et les longueurs du carton pour faire anticiper les dimensions des ombres en fonction des dimensions des carrés en carton et utiliser le dispositif pour valider.



Il s'agit en fait d'une homothétie (agrandissement) de rapport positif dont le centre est le projecteur. A distance constante entre le carton le projecteur et l'écran son rapport vaut A'B'/AB. Ce rapport dans la situation modélisée est le coefficient de proportionnalité.

1.3 Pour ranger les estimations des élèves de la moins bonne à la meilleure, deux options sont envisageables.

La première consisterait à prendre en compte les procédures d'obtention indépendamment des résultats. A ce stade c'est très délicat : problème de restitution de la part des élèves, problèmes d'un argument d'autorité par le maître etc.

La seconde est de mesurer l'écart à la valeur exacte. Le fait de placer les nombres sur la droite numérique facilite cette approche par exemple l'équivalence entre 18 et 30 par rapport à 24. elle méconnaît cependant une prise en compte non numérique du contexte (l'ombre doit être plus grande).

2. 1.

Carton	9 cm	6 cm
ombre	24 cm	(16 cm)

15 cm peut s'analyser comme la combinaison additive soustractive de deux des nombres présents (24 –9 ; 9 + 6) ce qui témoignerait d'un niveau très faible de représentation.

21 cm pourrait
ou bien utiliser le 15 obtenu précédemment (par exemple avec 24 – 9) et une addition du type 6 + 15 (au quel cas les trois nombres sont utilisés)
ou bien mobiliser une structure additive du type
9 – 3 = 6
24 – 3 = 21
quoiqu'il s'agisse d'une erreur de conception, elle est beaucoup moins fortuite que la précédente et recoupe un type de procédures fréquemment utilisé par des élèves déstabilisés dans une tâche de proportionnalité.

On peut d'ailleurs observer que sauf à être convaincu que la situation relève de la proportionnalité, il n'est pas possible d'infirmer à ce stade (sans valider effectivement) la procédure

9 + 15 = 24
6 + 15 = 21

2.2. Le maître refuse que les élèves discutent des raisons qui ont motivé leurs anticipations car il ne veut pas *fermer* la situation. En effet, outre des procédures empiriques sur les nombres (auxquelles des élèves renonceraient facilement sans réflexion du fait qu'elles ne renvoient à aucune représentation généralisable) les autres procédures ne peuvent être comparées sans argument d'autorité. Or le maître a bâti cette situation pour que les conceptions des élèves apparaissent explicitement et se modifient du fait du milieu lui-même et non de son intervention

2.3. Les élèves à ce moment de la séance pouvaient « deviner juste » car en CM1, ils disposent de connaissances sur la proportionnalité. Cependant la probabilité pour que cela advînt était faible : Pourquoi auraient-ils reconnu une situation de proportionnalité ? Pourquoi auraient-ils réinterprété le mot *deviner* de la consigne ? Par ailleurs passer d'un carton de 9 cm à 6 cm ne facilite pas une mobilisation automatique de compétences sur la linéarité (à comparer à passer d'un carton de 9 cm à un carton de 18 cm) ce qui est fait en connaissance de cause par le maître.

2.4. Les élèves ne parviennent pas à entrer dans les intentions du maître. Le mot *deviner* n'est d'ailleurs pas de nature à les aider. Ainsi toutes les procédures (penser à une valeur, faire des calculs plus ou moins sous-tendus par une stratégie) sont légitimes à leurs yeux. Le jeu semble donc être géré par le groupe classe comme un jeu de hasard.

2.5. Le maître espérait grâce à la validation pouvoir valoriser un type de stratégie calculatoire et de ce fait implicitement faire émerger la modélisation sous-jacente dans le domaine de la proportionnalité. L'élève qui propose le résultat juste n'a malheureusement pas de stratégie. Le maître se trouve donc dans l'incapacité de renégocier son contrat didactique avec la classe.

En terme de choix, il pourrait fermer le problème en déclarant que les longueurs sont proportionnelles, puis valoriser d'autorité un type de procédure. Un tel choix outre le fait qu'il rend inutile tout ce qui a été fait avant risque d'engendrer des résultats décevants car les élèves peuvent avoir du mal à intégrer cette conception et à renoncer à celles qu'ils ont commencé à mobiliser.

Il pourrait également relancer avec d'autres valeurs, par exemple des multiples de 6

Ainsi pourrait-il proposer 12 cm, 18 cm puis 21 cm. Il insisterait alors sur les valeurs numériques en différant les 3 validations après l'anticipation. Cette démarche est certes un peu artificielle mais il est contraint d'intervenir et cela permettrait aux élèves de rentrer dans le contrat.

On pourrait imaginer qu'il propose diverses anticipations sous-tendue par des stratégies différentes et qu'il fasse commenter les stratégies.

<u>Première conception :</u> 6 + 6 = 12 donc 16 + 6 = 22 ou 6+ 10 =16 donc 12 +10 = 22

Carton	6 cm	12 cm	18 cm	21 cm
ombre	16 cm	**22 cm**	**28 cm**	**31 cm**

<u>Deuxième conception :</u> Exacte

Carton	6 cm	12 cm	18 cm	21 cm
ombre	16 cm	**32 cm**	**48 cm**	**56 cm**

<u>Troisième conception :</u> Erronée sur la situation physique avec approximation

Carton	6 cm	12 cm	18 cm	21 cm
ombre	16 cm	**8 cm**	**5 cm**	**4 cm**

3 .1. L'interprétation mathématique correcte de cette réponse est l'usage de la linéarité multiplicative (scalaire 3)
$6 \times 3 = 18$
$16 \times 3 = 48$

3.2. La différence de 1 mm ne représente qu'une erreur de 0,5 %. Elle peut s'expliquer par une imprécision lors de la mesure (position du zéro de la règle, position du regard etc.)

Sans aller si loin il est difficilement imaginable que le dispositif offre une précision à 0,5 % près (flou, positionnement du carton etc.)

3.3. L'écart entre le prévu et le mesuré fragilise l'utilisation du dispositif pour valider mathématiquement les anticipations. Déjà aux prises avec la difficulté de faire évoluer les représentations des élèves sur les procédures et la modélisation le maître se trouve embarrassé par cette nouvelle contrainte externe à sa problématique mathématique.

3 .4. L'élève mobilise une conception correcte par retour à l'unité. Malheureusement les nombres s'y prêtent mal car 24/9 n'est pas un nombre décimal. Cette méthode aurait l'intérêt d'être relativement systématique et d'alléger la réflexion pour traiter tous les autres cas puisqu'elle revient à la détermination du coefficient de proportionnalité.

3.5. Le maître se heurte à la difficulté d'une procédure correcte difficile à gérer dans le domaine numérique. Il avait peut-être l'espoir de voir surgir essentiellement des démarches investissant la linéarité. Il ne peut reléguer cette proposition et se trouve en difficulté pour faire comprendre son principe et le résultat peu familier qu'elle induit. Admise et comprise, elle arrêterait toute réflexion de modélisation de la situation car une technique systématique pourrait être rapidement et mécaniquement réinvestie

3.6. Les calculatrices ne gèrent que des nombres décimaux. Ainsi lorsque des quotients ne sont pas décimaux, la calculatrice traite des approximations décimales. Or toutes les calculatrices ne gèrent pas le même nombre de chiffres et n'opèrent pas les approximations de la même manière (au plus proche, par excès ou par troncature). Par ailleurs, le fait de fractionner les opérations réduit la précision car la calculatrice a en mémoire plus de chiffres que ceux donnés à l'affichage.

3.7. En supprimant les calculatrices, le maître favorise les variables didactiques induites par les nombres en jeu. Potentiellement il se donne les moyens selon les exemples proposés d'orienter ou de diversifier les procédures numériques notamment pour favoriser la linéarité. Par ailleurs, il élude la difficulté imprévue de la gestion des approximations fournies pour pouvoir se reconcentrer sur son objectif principal.

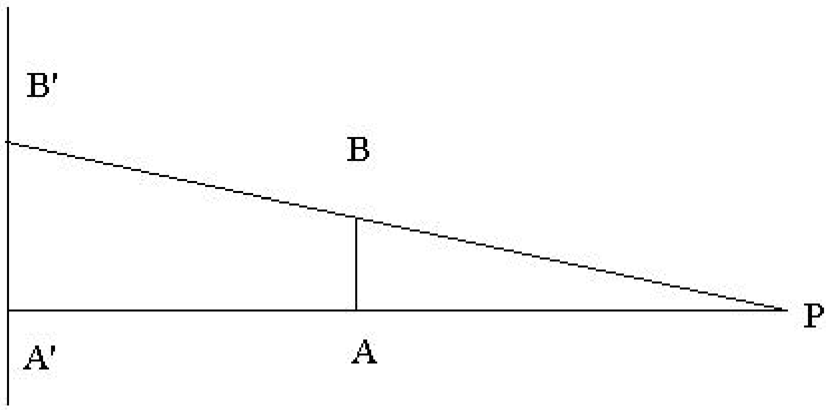
4 .1. Le maître essaie de mettre en œuvre une situation problème. Les élèves peuvent s'engager dans la tâche avec leurs connaissances antérieures. Celles-ci lorsqu'elles mobilisent par exemple des ajouts de constantes aux dimensions se révèlent erronées et inadaptées. La connaissance visée semble relever des propriétés de linéarité et de la reconnaissance d'une situation de proportionnalité. Il y a un moyen de validation.
En débattant après une dévolution et une phase d'action, les élèves s'engagent dans une phase de formulation et de confrontation.

Au tableau figurent toutes les mesures obtenues au cours des quatre expérimentations successives.

4 .2. Le maître commence à mener une certaine forme d'institutionnalisation. En particulier, le maître souhaite dégager des résultats numériques les procédures décontextualisables et généralisables adaptées.

4.3. La notion peut être abordée dans le cadre numérique des propriétés de linéarité ou par exemple dans un cadre graphique (en abscisse, les longueurs des côtés des cartons, en ordonnée les longueurs des ombres) avec obtention d'une droite passant par l'origine.

4 .4. Les distances carton-écran et les longueurs des côtés des ombres correspondantes sont deux grandeurs qui varient dans le même sens.



On s'intéresse à la variation de A'B' par rapport à AA' étant donné que AB = a et PA' = d sont deux valeurs constantes fixées données par le dispositif.

On a en appliquant le théorème de Thalès $\frac{AB}{A'B'} = \frac{PA}{PA'}$ soit $\frac{AB}{A'B'} = \frac{PA' - AA'}{PA'}$

$\frac{a}{A'B'} = \frac{d - AA'}{d}$ Finalement $A'B' = \frac{ad}{d - AA'}$

Posons d = 400 cm et a = 10 cm et traçons la courbe d'équation $y = \frac{4000}{400-x}$