

TD 1 Nombres

Correction

Exercice 1

$$A = \frac{-15}{18} = \frac{-5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$B = \frac{21}{7} = \frac{7 \times 3}{7} = \frac{3}{1} = 3$$

$$C = \frac{240}{-72} = \frac{24 \times 10}{-24 \times 3} = \frac{10}{-3} = -\frac{10}{3}$$

Exercice 2

$$1) \frac{352}{44} = \frac{2^5 \times 11}{2^2 \times 11} = 2^3 = 8$$

$$2) \frac{4242}{2828} = \frac{2 \times 3 \times 7 \times 101}{2^2 \times 7 \times 101} = \frac{3}{2}$$

$$3) \frac{242424}{323232} = \frac{2^2 \times 3 \times 10101}{2^5 \times 10101} = \frac{3}{4}$$

$$4) \frac{32032}{77} = \frac{2^5 \times 7 \times 11 \times 13}{7 \times 11} = 2^5 \times 13 = 416$$

Exercice 3

Le dénominateur commun est $2 \times 7 \times 9 = 126$

$$\frac{3}{7} = \frac{54}{126} ; \frac{2}{3} = \frac{84}{126} ; \frac{2}{9} = \frac{28}{126} ; \frac{1}{2} = \frac{63}{126} ; \frac{7}{9} = \frac{98}{126}$$

L'ordre croissant est donc $\frac{2}{9}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}$

Exercice 4

1) Ecrire A, B et C sous forme de fractions irréductibles.

$$A = \frac{3}{2}$$

$$B = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

$$C = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}$$

2) Le dénominateur commun est 210.

$$A = \frac{315}{210} ; B = \frac{300}{210} ; C = \frac{301}{210}$$

3) $B < C < A$

Exercice 5

1) $(\frac{15}{21} + \frac{16}{21}) / 2 = \frac{31}{42}$.

$31 / 42$ est plus grand que $15 / 21 (= 30 / 42)$ et plus petit que $16 / 21 (= 32 / 42)$. Mais on peut en trouver une infinité d'autres, par exemple $153 / 210$

2) $\frac{9}{7} = \frac{9 \times 13}{7 \times 13} = \frac{117}{91}$

$$\frac{19}{13} = \frac{19 \times 7}{13 \times 7} = \frac{133}{91}$$

$126 / 91$ compris entre $9 / 7$ et $19 / 13$ 19 est une solution.

Exercice 6

$$A = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2-5}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$B = \frac{10}{11} + \frac{12}{11} = \frac{10+12}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

$$C = \frac{2}{5} - \frac{4}{7} = \frac{2 \times 7}{5 \times 7} - \frac{4 \times 5}{5 \times 7} = \frac{14}{35} - \frac{20}{35} = \frac{-6}{35} = -\frac{6}{35}$$

$$D = \frac{15}{33} + \frac{13}{4} = \frac{5 \times 3}{3 \times 11} + \frac{13}{4} = \frac{5}{11} + \frac{13}{4} = \frac{5 \times 4}{11 \times 4} + \frac{13 \times 11}{11 \times 4} = \frac{20}{44} + \frac{143}{44} = \frac{163}{44}$$

$$E = \frac{2}{5} \times \frac{-4}{7} = \frac{2 \times -4}{5 \times 7} = \frac{-8}{35} = -\frac{8}{35}$$

$$F = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{2 \times 3}{5 \times 1} = \frac{6}{5}$$

$$G = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2^2} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

$$H = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2^2} = \frac{5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

Exercice 7

$$A = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{3} - \frac{4}{21} = \frac{14}{21} - \frac{4}{21} = \frac{10}{21}$$

$$B = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \times \frac{1}{7} = \left(\frac{10}{15} - \frac{12}{15}\right) \times \frac{1}{7} = \frac{-2}{15} \times \frac{1}{7} = \frac{-2 \times 1}{15 \times 7} = -\frac{2}{105}$$

$$C = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3 \times 4 \times 2}{4 \times 5} = \frac{2}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$D = \frac{3}{5} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{3}{5} - \frac{7}{9} = \frac{27}{45} - \frac{35}{45} = -\frac{8}{45}$$

Exercice 8

$$A = \frac{2}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{7} = \frac{4}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{7}{56} + \frac{8}{56} = \frac{15}{56}$$

$$B = \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{7} = \frac{28}{56} + \frac{21}{56} - \frac{8}{56} = \frac{41}{56}$$

$$C = \frac{2 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{7} - \frac{2}{5}} = \frac{\frac{10}{5} - \frac{3}{5}}{\frac{20}{35} - \frac{14}{35}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{6}{35}} = \frac{7}{5} \times \frac{35}{6} = \frac{7 \times 5 \times 7}{5 \times 6} = \frac{49}{6}$$

$$D = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{4}}} = \frac{1}{\frac{4}{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

Exercice 9

1) $3,075 \times 10^2 = 0,003075 \times 10^5$

2) $0,051 = 51 \times 10^{-3}$

3) $3,43 = 343 \times 10^{-2}$

4) $0,017 = 17 \times 10^{-3}$

Exercice 10

- Soit $\frac{a}{10^n}$ et $\frac{b}{10^p}$ les deux fractions, en supposant $n > p$,

$$\frac{a}{10^n} + \frac{b}{10^p} = \frac{a}{10^n} + \frac{b \times 10^{n-p}}{10^n} = \frac{a + b \times 10^{n-p}}{10^n}$$

$\frac{a + b \times 10^{n-p}}{10^n}$ est une fraction décimale

- La somme de deux fractions non décimales peut être décimale : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

Exercice 11

Compléter le tableau suivant

appartient à	N	Z	D	Q	R
$\frac{22}{5}$			*	*	*
3,14			*	*	*
-9		*	*	*	*
$\frac{\pi}{3}$					*
$-\sqrt{7}$					*
$\frac{50}{5}$	*	*	*	*	*
$\frac{22}{64}$				*	*
$\sqrt{64}$	*	*	*	*	*

Exercice 12

- $\sqrt{4} - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$ est un nombre relatif donc décimal.
- $\frac{\pi}{3}$ est le quotient d'un nombre réel non rationnel π par le nombre entier 3. Il n'y a pas de simplification possible. $\frac{\pi}{3}$ est un nombre réel non rationnel.
- 0,212 121 212 121 ... C'est une écriture à virgule ayant une période de 2 chiffres après la virgule. C'est un nombre rationnel.
- 5,999 999 999 99... C'est une écriture à virgule ayant une période de 9 après la virgule. Or $5,999 999 999 99... = 6$. C'est un entier naturel.

5) $3,458\ 759\ 874\ 54 = \frac{354875987454}{10^{11}}$ est un nombre décimal donc rationnel.

6) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} = 0,5$ est un nombre décimal.

Exercice 13

1) Un arbre permet d'envisager tous les choix possibles pour le premier chiffre, puis pour le second. Les deux premiers chiffres étant choisis, le troisième est déterminé automatiquement.

On obtient ainsi les nombres 258 ; 285 ; 528 ; 582 ; 825 ; 852.

2) Calculer S revient à faire la somme des décompositions des nombres considérés en centaines, dizaines et unités (par exemple, 258 est « 2c 5d 8u »). On rencontre chaque chiffre deux fois au rang des centaines, 2 fois au rang des dizaines et 2 fois au rang des unités.

On a :

$$S = 2 \times 2c + 2 \times 5c + 2 \times 8c + 2 \times 2d + 2 \times 5d + 2 \times 8d + 2 \times 2u + 2 \times 5u + 2 \times 8u$$

$$S = 2c \times (2 + 5 + 8) + 2d \times (2 + 5 + 8) + 2u \times (2 + 5 + 8)$$

$$S = (2c + 2d + 2u) \times (2 + 5 + 8)$$

$$\text{Or } 2c + 2d + 2u = 222 \text{ d'où } S = 222 \times (2 + 5 + 8)$$

3) Le raisonnement précédent s'applique de la même façon en remplaçant les chiffres 2, 5 et 8 par les chiffres 4, 7 et 9.

$$\text{Soit } S' \text{ la somme cherchée : } S' = 222 \times (4 + 7 + 9) = 4\ 440$$

Exercice 14

Affirmation A :

Cette affirmation est vraie. Soit n un nombre qui se termine par 2 et soit p le nombre de dizaines de n : $n = 10p + 2$

$$\text{D'où : } n^2 = (10p + 2)^2 = 100p^2 + 40p + 4 = (10p^2 + 4p) \times 10 + 4$$

n^2 contient $10p^2 + 4p$ dizaines et 4 unités. Le chiffre des unités de n^2 est 4.

Affirmation B :

Cette affirmation est fautive. Contre exemple : $14^2 = 196$.

14 se termine par 4, 14^2 ne se termine pas par 16.

Exercice 15

1) $\overline{aaa} = a \times 10^2 + a \times 10 + a = 100a + 10a + a = 111 \times a$

111 est un multiple de 37 ($111 = 37 \times 3$) d'où :

$$\overline{aaa} = (37 \times 3) \times a$$

Les nombres du type \overline{aaa} sont divisibles par 37.

2) $\overline{aaabbb} = a \times 10^5 + a \times 10^4 + a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10 + b$

$$\overline{aaabbb} = a \times (10^5 + 10^4 + 10^3) + b \times (10^2 + 10 + 1)$$

$$\overline{aaabbb} = a \times 111\,000 + b \times 111 = 111 \times (1\,000a + b) = (37 \times 3 \times (1\,000a + b))$$

Les nombres qui s'écrivent \overline{aaabbb} sont divisibles par 37.

Exercice 16

1) Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

- $5 = \frac{5}{1}$ est un entier donc un décimal.
- $0,25 = \frac{25}{100}$ est un décimal.
- $\frac{1}{6}$ n'est pas un décimal car $\frac{1}{6}$ est une fraction irréductible et 6 est divisible par 3 nombre premier différent de 2 et 5.
- $\frac{7}{21}$ n'est pas un décimal car $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur est un nombre premier différent de 2 et 5
- 0 est un entier donc un décimal.
- $\frac{1}{10} = 0,1$ est un décimal.
- $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ est un décimal.
- $\frac{3}{12} = 0,25 = \frac{25}{100}$ est un décimal

Les réponses $\frac{1}{6}$ et $\frac{7}{21}$ sont fausses.

2) Un tableau permet de recenser tous les cas possibles. Dans chaque, on écrit le nombre $\frac{a}{b}$ éventuellement avec une virgule.

a \ b	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	0,5	1	1,5	2	2,5
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
4	0,25	0,5	0,75	1	1,25
5	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Réponse : 0,2 ; 0,25 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,75 ; 0,8 ; 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; 5