TD 1 Opérations

Correction

Exercice 1

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

$\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = |12| = 12$

$\sqrt{0,49} = \sqrt{(0,7)^2} = |0,7| = 0,7$

$\sqrt{0,04} = \sqrt{(0,2)^2} = |0,2| = 0,2$

$\sqrt{20^2} + \sqrt{21^2} = 20 + 21 = 41$

$\sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400 + 441} = \sqrt{841} = 29$

$\sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$

$\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{150} = \sqrt{6 \times 25} = 5\sqrt{6}$

$\sqrt{0,4} = \sqrt{0,1 \times 4} = 2\sqrt{0,1}$

Exercice 2

$A = \sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (1 + 3 + 5)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$B = \sqrt{24} - \sqrt{6} - \sqrt{54} = 2\sqrt{6} - \sqrt{6} - 3\sqrt{6} = -2\sqrt{6}$

$A + B = 9\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

Exercice 3

$$\frac{1-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{5-2\sqrt{5}-\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-(2)^2} = \frac{7-3\sqrt{5}}{5-4} = 7 - 3\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

Exercice 4

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Exercice 5

$2^6 = 64$ $\quad$ $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ $\quad$ $2^0 = 1$ $\quad$ $(-2)^6 = 64$

$-2^6 = -64$ $\quad$ $\frac{1}{2^6} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$ $\quad$ $\frac{1}{2^{-6}} = 2^6 = 64$ $\quad$ $-2^{-6} = -\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}$

Exercice 6

$5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$

$(5 \times 2)^3 = 10^3 = 1\,000$

$\frac{5^2}{3^3} = \frac{25}{27}$

$\frac{5^2}{(-3)^{-3}} = 5^2 \times (-3)^3 = 25 \times (-27) = -675$

$(-1)^{1000} = [(-1)^2]^{500} = 1^{500} = 1$

$(-1)^{1989} = [(-1)^2]^{994} \times (-1)^1 = 1^{994} \times (-1) = -1$

Exercice 7

$(\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{4}{9} - \frac{1}{8} = \frac{32-9}{72} = \frac{23}{72}$

$[(\frac{5}{2{,}5})^2]^3 \times (\frac{1}{2})^4 = [(2)^2]^3 \times (\frac{1}{2})^4 = 2^6 \times \frac{1}{2^4} = \frac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$

$[(\frac{4}{7})^2]^8 \times [(\frac{7}{4})^5]^3 = (\frac{4}{7})^{16} \times (\frac{7}{4})^{15} = \frac{4^{16}}{7^{16}} \times \frac{7^{15}}{4^{15}} = \frac{4^{16} \times 7^{15}}{7^{16} \times 4^{15}} = 4 \times 7^{-1} = \frac{4}{7}$

Exercice 8

$(\frac{x}{y})^3 \times x^2 \times y^3 = \frac{x^3 \times x^2 \times y^3}{y^3} = x^5$

$(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}) \times 3xy = \frac{y-2x}{xy} \times 3xy = (y - 2x) \times 3$

$\frac{x^2}{y} \times \frac{y^2}{x} \times \frac{(2x)^2}{(3y)^3} = \frac{x^2 \times y^2 \times 4 \times x^2}{y \times x \times 27 \times y^3} = \frac{4}{27}\ x^3 y^{-2}$

Exercice 9

$(2x - 3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 - 12xy$

$(\sqrt{3}\,x + y)^2 = 3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,xy$

$(\sqrt{3}\,x + \sqrt{5}\,y)^2\ (\sqrt{3}\,x - y\sqrt{5}\,)^2 = [(\sqrt{3}\,x + \sqrt{5}\,y)\,(\sqrt{3}\,x - \sqrt{5}\,y)]^2 = (3x^2 - 5y^2)^2$

$= 9x^4 + 25y^4 - 30x^2y^2$

Exercice 10

$$\frac{a^{-12}}{a^{-5}} \times \frac{a^{3}}{a^{-7}} \times \frac{a^{-2}}{a^{11}} = \frac{a^{-12} \times a^{3} \times a^{-2}}{a^{-5} \times a^{-7} x a^{11}} = \frac{a^{-12+3-2}}{a^{-5-7+11}} = \frac{a^{-11}}{a^{-1}} = a^{-11-(-1)} = a^{-10} = \frac{1}{a^{10}}$$

avec $a \neq 0$

$$\frac{a^{2}}{\frac{a^{-3}}{a^{-2}}} = a^{2} \times \frac{a^{-2}}{a^{-3}} = \frac{a^{2} \times a^{-2}}{a^{-3}} = \frac{a^{2-2}}{a^{-3}} = \frac{a^{0}}{a^{-3}} = \frac{1}{a^{-3}} = a^{3} \text{ avec } a \neq 0$$

$$\frac{xy^{2}z^{2}}{x^{2}yz^{4}} = \frac{y}{xz^{2}} \text{ avec } x \text{ et } z \neq 0$$

$$\frac{x^{-3}yz^{5}}{x^{-1}y^{2}z^{-3}} = \frac{x^{-2}z^{8}}{y} \text{ avec } y \neq 0$$

$$\frac{n^{2}+n}{n^{2}+2n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+1)^{2}} = \frac{n}{n+1} \text{ avec } n \neq -1$$

$$\frac{n^{2}-1}{n^{2}-2n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{(n-1)^{2}} = \frac{(n+1)}{(n-1)} \text{ avec } n \neq 1$$

Exercice 11

1) L'expression 9 531 914 = (5 326 x 1 789) + 3 700 est l'égalité qui traduit le résultat de la division euclidienne de 9 531 914 (dividende) par 5 326 (diviseur). Cette division donne un quotient de 1 789 et un reste de 3 700 ($0 \leq 3\,700 \leq 5\,326$).

2) L'expression 9 531 914 = (5 326 x 1 789) + 3 700 ne traduit pas le résultat de la division euclidienne de 9 531 914 par 1 789 car 3 700 > 1 789.

   Pour trouver le quotient de cette division, il faut chercher combien de fois on peut mettre 1 789 dans 3 700, ce qui revient à effectuer la division euclidienne de 3 700 par 1 789.

   Le quotient de cette division est 2 et le reste est 122 (3 700 = 1 789 x 2 + 122).

   Donc le quotient de la division euclidienne de 9 531 914 par 1 789 est 5 328 (5 326 + 2) et le reste de cette division est 122.

Exercice 12

Pour la première soustraction, le nombre que l'on retire est le produit du chiffre des centaines du quotient (1) et de 275. Ce nombre est donc 275.

Dans la deuxième soustraction, le nombre que l'on retire est le produit du chiffre des dizaines du quotient (inconnu) par 275. On sait que c'est un nombre à 4 chiffres dont le chiffre des centaines est un 6.

On peut établir la table des multiples de 275 entre 275 x 1 et 275 x 9 pour trouver ce nombre :

275 x 1 = 275	275 x 4 = 1 100	275 x 7 = 1 925
275 x 2 = 550	275 x 5 = 1 375	275 x 8 = 2 200
275 x 3 = 825	275 x 6 = 1 650	275 x 9 = 2 475

On voit donc que la seule possibilité pour le nombre que l'on retire à la deuxième soustraction est 1 650, ce qui donne un chiffre des dizaines égal à 6 au quotient.

Enfin, dans la troisième soustraction, le nombre que l'on retire a trois chiffres et son chiffre des dizaines est un 5. D'après la table des multiples ci-dessus, ce ne peut être que 550, correspondant à un chiffre des unités égal à 2 au quotient.

Le quotient est donc 162 et le dividende s'obtient par le calcul : 275 x 162 + 3 = 44 553 (dividende = diviseur x quotient + reste).

Il ne reste plus qu'à effectuer les soustractions.

	4	4	5	5	3	2	7	5
-	2	7	5			1	6	2
	1	7	0	5				
-	1	6	5	0				
			5	5	3			
		-	5	5	0			
					3			

Exercice 13

On teste à chaque étape du calcul les valeurs possibles des lettres.

Au rang des unités de DCC et de DC, on peut avoir 2 ou 7. Cela donne bien un 4 ou un 9 comme chiffre des unités de BA3B.

Ensuite, lorsque le chiffre des unités de DC multiplie celui des dizaines de DCC et produit un 3 comme chiffre des dizaines de BA3B, il devient impératif d'avoir une retenue venant du rang des unités.

Après essai de toutes les possibilités, le seul chiffre possible pour les unités des deux termes du produit est un 7. On a DC7 et D7.

Alors le chiffre des dizaines de DC7 est aussi un 7 et le chiffre des dizaines de BA3B est obtenu comme résultat 7 x 7 + 4 = 53. On obtient donc D77 et il y a donc une retenue égale à 5 lorsqu'on passe au rang des centaines dans DC7. Ensuite 7 x D + 5 peut valoir 40 ou 61 selon que D vaut 5 ou 8.

Comme le résultat de ce calcul est BA, on a forcément D = 5 au multiplicande. Ainsi : DC7=577 et BA3B=4 039.

On cherche alors la valeur de D dans D7.

Pour D = 5, on trouve 577 x 5 =2 885, qui est incompatible avec **BA1A**.

Pour D = 8, on trouve 577 x 8=4616 qui peut représenter BA1A.

On effectue alors la somme des deux lignes pour s'assurer que le résultat est compatible avec DA1BB.

			5	7	7
x				8	7
		4	0	3	9
+	4	6	1	6	•
	5	0	1	9	9

Exercice 14

On calcule le produit des trois termes situés dans la deuxième colonne, soit $27a^6 \ b^9$.

Puis on complète la diagonale dont on connaît deux termes. On trouve $3a^3b^2$.

On complète ensuite le reste du carré.

$3ab^4$	$9a^4$	ab^5
a^2b^4	$3a^2b^3$	$9a^2b^2$
$9a^3b$	b^6	$3a^3b^2$

Exercice 15

1) Dans la division de a par 11, le reste est 11. Dans la division de a' par 11, le reste est r'.

   Si on appelle q le quotient de la division de a par 11, et q' le quotient de la division de a' par 11, on a :

   $a = 11q + r$ avec $r < 11$

   $a' = 11q' + r'$ avec $r' < 11$

   Donc $a + a' = 11q + r + 11q' + r' = 11(q + q') + r + r'$

Le reste de la division de a + a' par 11 n'est pas nécessairement r + r' car r + r' peut être supérieur ou égal à 11. Mais r et r' étant inférieurs ou égaux à 10, r + r' est inférieur ou égal à 20. Deux cas peuvent se produire :

- $r + r' < 11$, dans ce cas le reste de la division de a + a' par 11 est égal à r + r'
- $11 \leq r + r' \leq 20$, dans ce cas retranchons 11 à r + r' et ajoutons 11 à 11(q + q').

L'égalité devient :

$$a + a' = 11\,(q + q') + 11 + r + r' - 11 = 11\,(q + q' + 1) + r + r' - 11.$$

Donc

- Si $r + r' < 11$, le reste de la division de a + a' par 11 est égal à r + r'.
- Si $r + r' \geq 11$, le reste de la division de a + a' par 11 est $r + r' - 11$.

Avec les mêmes notations, on peut écrire

$3a = 3 \times (11q + r) = 11 \times 3q + 3r$ avec $r < 11$.

3r est au plus égal à 30.

Trois cas peuvent se produire.

- Si $0 \leq r \leq 3$, alors $0 \leq 3r \leq 9$, donc $0 \leq 3r \leq 11$. Le reste de la division de 3a par 11 est égal à 3r.
- Si $4 \leq r \leq 7$, alors $12 \leq 3r \leq 21$. En retranchant 11 à 3r et en ajoutant 11 à 11 x 3q, l'égalité devient :

  $3a = 11 \times 3q + 11 + 3r - 11 = 11 \times (3q + 1) + 3r - 11$.

  Or $12 - 11 \leq 3r - 11 \leq 21 - 11$ soit $1 \leq 3r - 11 \leq 10$.

  Donc 3r - 11 est le reste de la division de 3a par 11.
- Si $8 \leq r \leq 10$, alors $24 \leq 3r \leq 30$. En retranchant 11 x 2 à 3r et en ajoutant 11 x 2 à 11 x 3q, l'égalité devient :

  $3a = 11 \times 3q + 11 \times 2 + 3r - 11 \times 2 = 11 \times (3q + 2) + 3r - 11 \times 2$.

  Or $24 - 11 \times 2 \leq 3r - 11 \times 2 \leq 30 - 11 \times 2$ soit $2 \leq 3r - 11 \times 2 \leq 8$.

  Donc $3r - 11 \times 2$ est le reste de la division de 3a par 11.

En conclusion,

- Si $0 \leq r \leq 3$, le reste de la division de 3a par 11 est 3r.
- Si $4 \leq r \leq 7$, le reste de la division de 3a par 11 est 3r -11.
- Si $8 \leq r \leq 10$, le reste de la division de 3a par 11 est 3r -22.

Exercice 16

b est un chiffre dont le carré se termine par b. On a donc nécessairement b = 1 ou b = 5 ou b = 6.

- 1er cas : b = 1.

  En appliquant l'algorithme de la multiplication, on constate (colonne des dizaines) que a + 1doit avoir pour chiffre des unités a, ce qui n'est pas possible puisque a est non nul (le nombre cherché doit avoir deux chiffres).

- 2ème cas : b = 5.

  On constate (colonne des dizaines) que 5a + 2 + 5a, soit 10a + 2 doit avoir pour chiffre des unités a. Mais 10a + 2 est la décomposition du nombre qui a pour chiffre des dizaines a, et pour chiffre des unités 2. En conséquence a est nécessairement égal à 2.

- 3ème cas : b = 6.

  On constate (colonne des dizaines) que 6a + 3 + 6a, soit 12a +3 doit avoir pour chiffre des unités a. On essaie toutes les valeurs possibles de a.

  Par exemple, a = 1 ne convient pas parce 12 x 1 + 3a pour chiffre des unités 5, et non 1. On constate que seul a = 7 vérifie cette contrainte car le chiffre des unités de 12 x 7 + 3 (= 87) est égal à 7. En conséquence, a est nécessairement égal à 7.

En résumé, si le problème admet une solution c'est :

- soit a = 2 et b = 5 ;
- soit a = 7 et b = 6.

Vérifions que les deux couples trouvés sont bien solution du problème.

		2	5					7	6
x		2	5			x		7	6
	1	2	5				4	5	6
	5	0				5	3	2	
	6	2	5			5	7	7	6

Le problème admet donc deux solutions.