TD 1 Calcul Littéral

Correction

Exercice 1

1) $(2x - 1)(x + 1) + (2x - 1)(3x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)[(x + 1)(3x - 7)] = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(4x - 6) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $2x - 1 = 0$, d'où $x = \frac{1}{2}$
- $4x - 6 = 0$, d'où $x = \frac{3}{2}$

2) $(3x + 1)^2 - (5x + 8)(6x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (3x + 1)^2 - (5x + 8)\,2\,(3x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (3x + 1)[(3x + 1) - 2(5x + 8)] = 0$

$\Leftrightarrow (3x + 1)(-7x - 15) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $3x + 1 = 0$, d'où $x = -\frac{1}{3}$
- $-7x - 15 = 0$ d'où $x = -\frac{15}{7}$

3) $(2x + 3)^2 - (x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(2x + 3) + (x - 1)][(2x + 3) - (x - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (3x + 2)(x + 4) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $3x + 2 = 0$, d'où $x = -\frac{2}{3}$
- $x + 4 = 0$ d'où $x = -4$

4) $3(x + 2)^2(x - 1) - (x + 2)(x - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)[3(x + 2) - (x - 1)] = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(2x + 5) = 0$

L'équation admet trois solutions :

- $x + 2 = 0$, d'où $x = -2$
- $x - 1 = 0$, d'où $x = 1$
- $2x + 5 = 0$, d'où $x = -\frac{5}{2}$

5) $-4(3x - 1)^2 + (2x + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 - [2(3x - 1)]^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3 - 2(3x - 1)) \times (2x + 3 + 2(3x - 1)) = 0$

$\Leftrightarrow (-4x + 5)(8x + 1) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $-4x + 5 = 0$, d'où $x = \frac{5}{4}$
- $8x + 1 = 0$, d'où $x = -\frac{1}{8}$

6) $2x^2 + 5x = (2x - 5)(2x + 4)$

$\Leftrightarrow x(2x + 5) = (2x - 5)(2x + 4)$

$\Leftrightarrow x(2x + 5) - (2x - 5)(2x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 5)(x - 2x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 5)(-x - 4) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $2x + 5 = 0$, d'où $x = -\frac{5}{2}$
- $-x - 4 = 0$, d'où $x = -4$

7) $4x^2 - 9 = 3(2x + 3)^2$

$\Leftrightarrow (2x + 3)(2x - 3) - 3(2x + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3)((2x - 3) - 3(2x + 3)) = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3)(-4x - 12) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $2x + 3 = 0$, d'où $x = -\frac{3}{2}$
- $-4x - 12 = 0$, d'où $x = -3$

8) $4x^2 = 2x$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(4x - 2) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $x = 0$
- $4x - 2 = 0$, d'où $x = \frac{1}{2}$

9) $x^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $x + 3 = 0$, d'où $x = -3$
- $x - 3 = 0$, d'où $x = 3$

Exercice 2

1) $A = (x - 2)^2 + (x - 2)(3x + 1) = x^2 + 4 - 4x + 3x^2 + x - 6x - 2 = 4x^2 - 9x + 2$

2) $A = (x - 2)[(x - 2) + (3x + 1)] = (x - 2)(4x - 1)$

3) $(x - 2)(4x - 1) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $x - 2 = 0$, d'où $x = 2$
- $4x - 1 = 0$, d'où $x = \frac{1}{4}$

4) $x = -\frac{1}{2}$

$A = (-\frac{1}{2} - 2)(4 \times (-\frac{1}{2}) - 1) = -\frac{5}{2} \times -3 = -\frac{15}{2}$

Exercice 3

1) $(5x + 3)^2 = 4(2x - 3)^2$

$\Leftrightarrow (5x + 3)^2 - [2(2x - 3)]^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(5x + 3) + 2(2x - 3)][(5x + 3) - 2(2x - 3)] = 0$

$\Leftrightarrow (9x - 3)(x + 9) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $9x - 3 = 0$, d'où $x = -\frac{1}{3}$
- $x + 9 = 0$, d'où $x = -9$

2) $3x^2 = 5x$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x = 0$

$\Leftrightarrow x(3x - 5) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $x = 0$
- $3x - 5 = 0$, d'où $x = \frac{5}{3}$

3) $\frac{3x+1}{3} - \frac{2x-1}{2} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{2(3x+1)}{6} - \frac{3(2x-1)}{6} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow 6x + 2 - 6x + 3 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4 = 0$

L'équation n'admet pas de solutions.

4) $x - \sqrt{3}(x + 1) = 2 - x$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 2 - x$

$\Leftrightarrow 2x - \sqrt{3}x = 2 + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x(2 - \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{4+3+4\sqrt{3}}{4-3} = 7 + 4\sqrt{3}$

5) $2(x - 1) = \sqrt{2}(x + 1) - 1$

$\Leftrightarrow 2x - 2 = x\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow 2x - x\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1$

$\Leftrightarrow x(2 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}+2+2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$

6) $100x^2 - 0,16 = 0$

$\Leftrightarrow 10\,000x^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow (100x + 4)(100x - 4) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $100x + 4 = 0$, d'où $x = -\frac{1}{25}$
- $100x - 4 = 0$, d'où $x = \frac{1}{25}$

7) $4x^2 = 250\,000$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 250\,000 = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 500)(2x - 500) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $2x + 500 = 0$, d'où $x = -250$
- $2x - 500 = 0$, d'où $x = 250$

8) $121x^2 - 44x = 275x - 100$

$\Leftrightarrow 11(11x^2 - 4x) = 25(11x - 4)$

$\Leftrightarrow (11x - 4)(11x - 25) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $11x - 4 = 0$, d'où $x = \frac{4}{11}$
- $11x - 25 = 0$, d'où $x = \frac{25}{11}$

Exercice 4

1) $\frac{4x-3}{x-1} = 0$

L'équation admet une solution : $x = \frac{3}{4}$

2) $\frac{x^2-2x}{2-x} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$

L'équation admet deux solutions :

- $x = 0$
- $x - 2 = 0$, d'où $x = 2$

3) $\frac{5x-3}{x-1} = \frac{-3}{x}$

$\Leftrightarrow (5x - 3)x = -3(x - 1)$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 3x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{5}$

L'équation admet deux solutions :

- $x = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$
- $x = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$

4) $1 - \frac{x+2}{2x-3} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{2x-3} = 1$

$\Leftrightarrow x + 2 = 2x - 3$

$\Leftrightarrow -x + 5 = 0$

L'équation admet une solution : $x = 5$

Exercice 5

1) $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 = 2 + 1$

$3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = 3 + 2$

$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 = 4 + 3$

Il se dégage la règle suivante :

Pour tout entier naturel n, $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n$

2) $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = (n + 1) + n$

3) Il suffit d'écrire 2 033 comme somme de deux nombres consécutifs et d'appliquer la règle précédente.

$2\,003 = 1\,002 + 1\,001 = (1\,001 + 1) + 1\,001 = (1\,001 + 1)^2 - 1\,001$

Soit $2\,003 = 1\,002^2 - 1\,001^2$

Exercice 6

1) $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 + 1 = (x - 1)^2 + 1$

Pour tout x réel, on a $(x - 1)^2 \geq 0$

Donc $(x - 1)^2 + 1 > 0$

Par conséquent, $(x - 1)^2 + 1 \neq 0$ donc $x^2 - 2x + 2 \neq 0$

Cette équation n'admet pas de solutions dans R.

2) $(x^2 + 1)^2 - (2x - 1)^2 = [(x^2 + 1) + (2x - 1)]\,[(x^2 + 1) - (2x - 1)]$

$= (x^2 + 2x)\,(x^2 - 2x + 2)$

$= x\,(x + 2)\,(x^2 - 2x + 2)$

3) D'après la question précédente,

les équations $(x^2 + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0$ et $x\,(x + 2)\,(x^2 - 2x + 2) = 0$ ont les mêmes solutions.

x est solution de l'équation $(x^2 + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x + 2 = 0$

L'équation admet donc deux solutions : $x = 0$ et $x = -2$.

Exercice 7 (Lille, 2001)

1)

- $(60 + 5)^2 = (6 \times 10 + 5)^2 = (6 \times 10)^2 + 2 \times 6 \times 10 \times 5 + 5^2$

$= 6^2 \times 100 + 6 \times 100 + 25 = (6 + 6^2) \times 100 + 25$

$= 6 \times (6 + 1) \times 100 + 25 = 6 \times 7 \times 100 + 25$

$= 4\,225$

- Pour calculer le carré d'un nombre à deux chiffres s'écrivant $\overline{a5}$, calculer $a \times (a + 1)$ puis, à la droite de l'écriture de ce résultat, écrire les chiffres $\overline{25}$. Le nombre écrit est le carré recherché.

- $3 \times (3 + 1) = 12$

$35^2 = 1\,225$

2) Pour passer du carré d'un nombre entier à celui du nombre suivant, il suffit d'ajouter à ce carré le nombre lui-même et son suivant.

$101^2 = 100^2 + 100 + 101 = 10\,202$

$36^2 = 35^2 + 35 + 36 = 1\,296$

Exercice 8

Les deux nombres précédant n sont n – 1 et n – 2. Les deux nombres suivants n sont n + 1 et n + 2.

Si n satisfait les contraintes de l'énoncé, alors :

$n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 - (n + 1)^2 - (n + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 + n^2 - 2n + 1 + n^2 - 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 12n = 0$

$\Leftrightarrow n\,(n - 12) = 0$

Donc n = 0 ou n = 12. n étant supérieur à 0, le nombre cherché est n = 12.

Exercice 9 (Lille, 2000)

Soit n l'année de naissance et m l'année de décès de Dürer.

$n + m = 2\,999$

$m^2 - n^2 = 170\,943$

On a donc $(m + n)\,(m - n) = 170\,943$

D'où $2\,999 \times (m - n) = 170\,943$

$m - n = \frac{170943}{2999} = 57$

m et n sont les solutions du système :

$$\begin{cases} m + n = 2\,999 \\ m - n = 57 \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$m + n + m - n = 2\,999 + 57$

Donc $2m = 3\,056$

$m = 1\,528$ et $n = 2\,999 - 1\,528 = 1\,471$

Dürer est né en 1 471. Il est mort en 1 528.

Exercice 10

1) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

2) $x^2 + 6x - 36 = x^2 + 6x + 9 - 45 = (x + 3)^2 - 45$

$= (x + 3)^2 - (\sqrt{45})^2 = (x + 3 + \sqrt{45})\,(x + 3 - \sqrt{45})$

x est solution de l'équation si et seulement si $x + 3 + \sqrt{45} = 0$ ou $x + 3 - \sqrt{45} = 0$

Donc $x + 3 = -\sqrt{45}$ ou $x + 3 = \sqrt{45}$

Donc $x + 3 = -3\sqrt{5}$ ou $x + 3 = 3\sqrt{5}$

3) L'équation admet deux solutions : $x = -3 - 3\sqrt{5}$ et $x = -3 + 3\sqrt{5}$

Exercice 11

Puisque $u^2 - v^2 = (u + v)\,(u - v)$, chercher les nombres vérifiant $u^2 - v^2 = 28$ revient à chercher les nombres vérifiant $(u + v)\,(u - v) = 28$.

Donc u + v et u – v sont des entiers positifs, diviseurs de 28.

Résoudre le problème revient donc à déterminer tous les couples d'entiers naturels a et b tels que :

$$\begin{cases} u + v = a \\ u - v = b \end{cases}$$

En nous aidant de la décomposition en facteurs premiers de 28, soit $2^2 \times 7$, on obtient les trois décompositions suivantes :

$28 = 1 \times 25$ $\quad$ $28 = 14 \times 2$ $\quad$ $28 = 7 \times 4$

Il faut donc résoudre les trois systèmes suivants :

$$\begin{cases} u + v = 28 \\ u - v = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 14 \\ u - v = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} u + v = 7 \\ u - v = 4 \end{cases}$$

Le premier système n'admet pas de solution dans N, car en ajoutant les deux équations membres, on obtient 2u = 29, soit u = 14,5.

Le dernier système n'admet pas de solutions dans N, car en ajoutant les deux équations membres, on obtient 2u = 11, soit u = 5,5.

En ajoutant membre à membre les deux équations du deuxième système, on obtient 2u = 16, soit u = 8 et v = 14 – 8 = 6.

Donc s'il existe deux entiers u et v tels que $u^2 - v^2 = 28$, ce sont nécessairement u = 8 et v = 6.

On vérifie que 8 et 6 sont bien solution de l'équation car $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$.

Le problème admet donc une solution unique : u = 8 et v = 6.

Exercice 12

1) $(1 - x)\,(1 + x) = 1 - x^2$

$(1 - x)\,(1 + x + x^2) = 1 + x + x^2 - x - x^2 - x^3 = 1 - x^3$

$(1 - x)\,(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + x + x^2 + x^3 - x - x^2 - x^3 - x^4 = 1 - x^4$

2) $(1 - x)\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = 1 - x^{n+1}$

Vérifions pur n = 4.

$(1 - x)\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 = 1 - x^5$

Remarque : on utilise souvent cette identité sous la forme $(x \neq 1)$:

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

3) Augmenter une quantité de 3,5% revient à la multiplier par 1,035.

Le premier versement à la fin de la première année devient $1\,000 \times 1{,}035$ €.

Cette somme est augmentée de 3,5% à la fin de la deuxième année et devient $(1\,000 \times 1{,}035) \times 1{,}035 = 1\,000 \times 1{,}035^2$.

A l'issue des cinq années, le premier versement s'est transformé en avoir de $1\,000 \times 1{,}035^5$ €.

Le deuxième versement ne produira des intérêts que pendant 4 ans.

A l'issue des 5 années :

- Le 2ème versement s'est transformé en avoir de $1\,000 \times 1{,}035^4$ €.
- Le 3ème versement s'est transformé en avoir de $1\,000 \times 1{,}035^3$ €.
- Le 4ème versement s'est transformé en avoir de $1\,000 \times 1{,}035^2$ €.
- Le 5ème versement s'est transformé en avoir de $1\,000 \times 1{,}035^1$ €.

Au bout de 5 ans la personne possèdera :

$1\,000 \times 1{,}035^1 + 1\,000 \times 1{,}035^2 + 1\,000 \times 1{,}035^3 + 1\,000 \times 1{,}035^4 + 1\,000 \times 1{,}035^5$

soit $1\,000 \times 1{,}035^1\,(1 + 1{,}035^1 + 1{,}035^2 + 1{,}035^3 + 1{,}035^4)$.

En appliquant l'identité remarquable de la question précédente, on peut écrire :

$1 + 1{,}035^1 + 1{,}035^2 + 1{,}035^3 + 1{,}035^4 = \frac{1 - 1{,}035^5}{1 - 1{,}035}$

La somme est donc égale à : $1\,000 \times 1{,}035^1 \times \frac{1 - 1{,}035^5}{1 - 1{,}035} \approx 5\,550{,}15$ €