XIII$^{\text{èmes}}$ OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classe de première série S

Concours 2013

Mercredi 20 Mars 2013

Durée de l'épreuve : 4 heures. Les élèves ne peuvent sortir qu'après une heure d'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus, et les idées qui leur sont venues.

Le sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.

Document réponse à rendre avec la copie : . . . . page 10

LES NOMBRES HARSHAD

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple, n = 24 est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est 2 + 4 = 6, et 24 est bien divisible par 6.

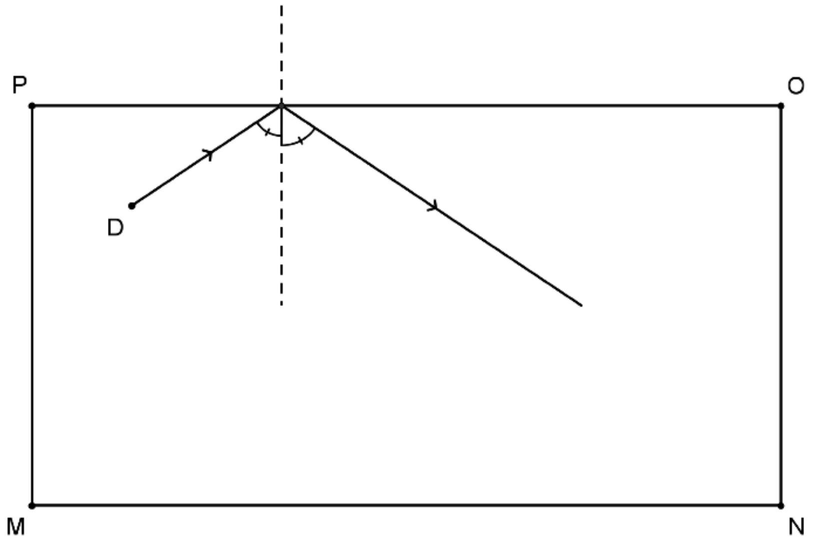
1. (a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   (b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
2. (a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   (b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.
3. (a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   (b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   (c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.
4. (a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.
   (b) En déduire que $98\,208\,030$, $98\,208\,031$, $98\,208\,032$ et $98\,208\,033$ forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   (c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.
5. (a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   (b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.
6. (a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p+2$ est un nombre pair. En déduire que p et $p+2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
   (b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

LE BILLARD RECTANGULAIRE

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.

Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous $\left(\hat{i} = \hat{r}\right)$



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].
   (a) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   (b) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?
   (c) Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?
2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].
   (a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   (b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

A la recherche d'une Dame

Voici quelques connaissances sur le Bridge pour traiter les exercices ci-dessous :

Au Bridge, deux équipes composées chacune de deux partenaires Nord/Sud(Equipe1) et Est/Ouest (Équipe2) s'affrontent.

- On distribue la totalité d'un jeu de 52 cartes. Chacun des quatre joueurs dispose donc de 13 cartes.
- L'ordre des cartes est le suivant : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
- La seule obligation à ce jeu est de fournir quand on le peut une carte de la couleur (Pique, cœur, Carreau ou Trèfle) demandée par celui qui joue le premier. Quand ce n'est pas possible, on doit fournir une carte quelconque (dans ce cas on dit qu'on défausse).
- On joue dans le sens des aiguilles d'une montre. Si Ouest joue en premier, Nord, Est et Sud déposeront leur carte dans cet ordre.
- Celui des quatre joueurs qui a la plus grosse des cartes de la couleur demandée remporte la levée et doit rejouer.
- Le jeu se termine lorsque les 52 cartes ont été jouées. Chaque joueur disposant de treize cartes, il y a donc treize tours donc treize levées possibles.
- Avant de jouer, les enchères ont permis de déterminer le camp du déclarant qui, par convenance, est Sud dans chacun des exercices. De ce fait, Ouest est le premier à jouer une carte, on dit qu'il entame. Nord étale alors son jeu (on dit que c'est le « mort ») qui devient visible des trois autres joueurs. Chaque joueur voit donc deux jeux, le sien et celui du mort. Sud joue ses cartes et celles de son partenaire Nord.

Partie A : Un petit exemple

Voici les cartes possédées par chacun des joueurs. Il est rappelé que chaque joueur voit ses cartes et celles de nord.

	♠ 10 5 3	
	♥ A D 10	
	♦ R 9 7 5 2	
	♣ 10 8 2	
♠ R D 9 8 2	Nord	♠ V
♥ 4 3	Ouest Est	♥ V 8 7 6 5 2
♦ D 8 3		♦ 6 4
♣ D 9 7	Sud	♣ R 5 4
	♠ A 7 6 4	
	♥ R 9	
	♦ A V 10	
	♣ A V 6 3	

Ouest entame du Roi de Pique, voici les quatre premières levées :

	Ouest	Nord	Est	Sud
Tour 1	♠ R	♠ 3	♠ V	♠ A
Tour 2	♦ 3	♦ 2	♦ 4	♦ A
Tour 3	♦ D	♦ R	♦ 6	♦ V
Tour 4	♣	♣ 2	♣ 4	♣ V
Tour 5	♠ D	♠		♠

Sachant qu'Ouest a remporté la quatrième levée, quelle carte a-t-il fournie ? Complétez la levée 5. A cet instant, quelle est l'équipe qui a remporté le plus de levées ?

Partie B : Prendre la Dame

La partie précédente étant terminée, les cartes ont été redistribuées. Nous voici donc dans une nouvelle situation. Alors que dix levées ont déjà été faites, voici les cartes restantes pour le camp Nord/Sud en Pique. Est/ Ouest ayant fourni trois Piques en cours de partie, Nord/Sud sait qu'il reste en Est-Ouest :

– en Pique : La Dame, le 7, Le 6 Le 5 .

– en Coeur : le 8 et le 4

	♠ R 10 8	
	Nord	
	Ouest Est	
	Sud	
	♠ A V 9	

Question 1 : Sachant que c'est à Sud de jouer, voici ce que Sud se propose de jouer pour gagner les trois dernières levées :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 1	♠ A		♠ 8	
Tour 2	♠ 9		♠ R	
Tour 3	♠ V		♠ 10	

a) Si les trois cartes possédées par Est sont la Dame de Pique et les deux Coeurs, Sud gagnera-t-il les trois dernières levées ? Pourquoi ?

b) Proposez une autre répartition des six cartes restantes permettant à Sud de gagner les trois dernières levées.

c) Proposez une répartition des six cartes restantes ne permettant pas à Sud de gagner les trois dernières levées. Expliquer votre démarche.

Question 2 : Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Ouest. Afin de gagner quoi qu'il arrive les trois dernières levées, voici son raisonnement :

Je vais jouer l'as.

Si la Dame est seule en Ouest avec les deux Coeurs :

alors je jouerai . . ... et j'ai gagné mes trois levées.

Si la Dame ne tombe pas

alors je jouerai le Valet :

si Ouest met la Dame :

alors je mettrai le ..... puis je jouerai . . . . et j'ai gagné mes trois levées.

sinon je mettrai le ..... puis je jouerai . . . . et j'ai gagné mes trois levées.

Question 3 : Si Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Est, proposez sur le modèle précédent un raisonnement qui lui permette de gagner les trois dernières levées quoi qu'il arrive.

Partie C : Dame où es-tu ?

Voici les jeux possédés par le camp N/S.

	♠ R 10 8	
	♥ 4 3 2	
	♦ 4 3 2	
	♣ 5 4 3 2	
♠	Nord	♠
♥	Ouest Est	♥
♦		♦
♣	Sud	♣
	♠ A V 9	
	♥ A R D	
	♦ A R D	
	♣ A R D V	

Ouest entame et dépose sur la table le V de cœur. Sud s'étant promis de faire les treize levées, voici ce qu'il joue et ce qu'il voit :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 1	♥ A	♥ V	♥ 2	♥ 7
Tour 2	♥ R	♥ 5	♥ 3	♠ 2
Tour 3	♥ D	♥ 6	♥ 4	♠ 3
Tour 4	♦ A	♦ 5	♦ 2	♦ 8
Tour 5	♦ R	♦ 6	♦ 3	♦ 9
Tour 6	♦ D	♦ 7	♦ 4	♦ 10
Tour 7	♣ A	♣ 10	♣ 2	♣ 9
Tour 8	♣ R	♣ 8	♣ 3	♣ 7
Tour 9	♣ D	♣ 6	♣ 4	♠ 4

Cas 1 :

Voici le tour 10

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 10	♣ V	♥ 8	♣ 5	♦ V

a) A cet instant, il réfléchit et affirme : Je connais déjà douze des cartes d'Ouest et la couleur de la treizième. Pouvez-vous indiquer lesquelles et la nature de la dernière carte ?

b) Pour gagner les trois dernières levées, il doit trouver la Dame de Pique. Complétez le raisonnement suivant :

Si la Dame de Pique est en Ouest alors les trois dernières cartes d'Ouest sont . . .. sinon Ouest possède un Pique parmi les cartes suivantes . . .... et . . . . . .

c) Sud imagine deux stratégies pour terminer la partie et remplir son contrat.

Stratégie 1 :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 11	♠ A		♠ 8	
Tour 12	♠ 9		♠ R	
Tour 13	♠		♠ 10	

Stratégie 2 :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 11	♠ 9		♠ R	
Tour 12	♠ A		♠ 8	
Tour 13	♠ V		♠	

- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui permette à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui ne permette pas à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
- Trouvez sous forme d'algorithme un moyen de gagner les trois dernières levées dans tous les cas.

Cas 2 :

Quelles conclusions doit tirer Sud si, au tour 10, il voit :

	Sud	**Ouest**	**Nord**	**Est**
Tour 10	♣ V	♦ V	♣ 5	♠ 5

Quelle stratégie doit-il appliquer dans ce cas pour gagner les trois dernières levées ?

CARRES ET PARABOLE

Soit k un nombre réel strictement positif fixé et f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par $f(x) = kx^2$. On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine le point noté O_1. On inscrit dans la courbe C_f un carré $O_1A_1O_2B_1$, noté C_1, tel que les points A_1 (d'abscisse positive) et B_1 appartiennent à la courbe C_f et le point O_2 à l'axe des ordonnées (voir figure 1).

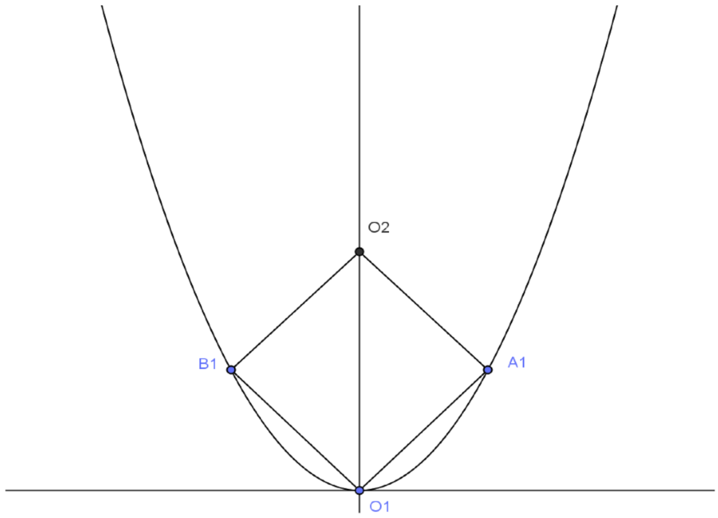


Figure 1

Partie A

1. Construction du carré C_1
   (a) Reproduire la figure 1 sur le document réponse 1, en justifiant la construction des points A_1, O_2 et B_1.
   (b) Déterminer en fonction de du nombre réel k les coordonnées des points A_1, B_1 et O_2 .
2. Montrer que le périmètre du carré C_1 est égal à $4\frac{\sqrt{2}}{k}$
3. On inscrit par récurrence une suite de carrés dans la courbe C_f , comme indiqué sur la figure 2. On note O_n , A_n ,O_{n+1} et B_n les sommets respectifs du carré noté C_n. Construire sur la copie le carré $O_2A_2O_3B_2$ puis déterminer les coordonnées des points A_2 et O_3

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note $(x_n; y_n)$ les coordonnées du point A_n et $(0; z_n)$ les coordonnées du point O_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $y_n = x_n + z_n$
2. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+1} = z_n + 2x_n$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + x_n$.
4. Justifier alors que la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{k}$.
5. Déduire de ce qui précède la nature de la suite (ln) où, pour tout entier naturel n non nul, ln désigne la longueur du carré C_n.

Partie C

1. Sachant que la longueur d'un côté du carré C_1 a pour longueur π, déterminer la valeur du nombre réel k.
   Pour ces deux dernières questions, on suppose que k a pour valeur le réel trouvé à la question précédente.
2. n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule et affiche (en sortie) la somme des aires des n premiers carrés .
3. À l'aide de cet algorithme, ou de la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer le plus petit entier naturel N_0 pour lequel la somme des aires des N_0 premiers carrés soit supérieure ou égale à $20\,132\,013$ unités d'aire.

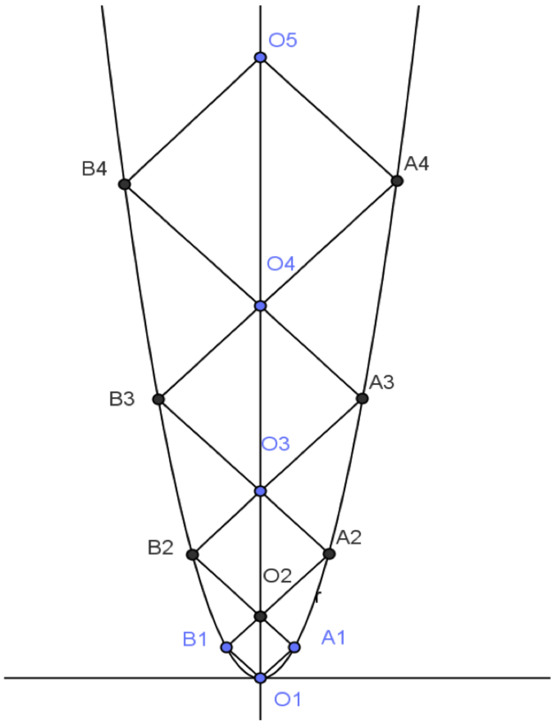


Figure 2

Document réponse