

HARMONIUM

Chers lecteurs,

Nous allons vous parler de l'HARMONIUM, notre sujet de math en jeans.

D'abord un Harmonium qu'est ce que c'est ?

- C'est une figure quelconque (rectangle, carré, losange), composée de cases où, dans chacune figure un nombre.
- **Ceux de la bordure restent fixes**, on ne peut pas les changer ; au départ, ceux de l'intérieur sont des « 0 » par exemple.
- **Chaque case à l'intérieur est remplacée par la moyenne des quatre cases qui l'entourent.**
- Puis on recommence, une fois, deux fois, autant de fois qu'on veut. **Que se passe-t-il ?**
- On dit qu'un **harmonium** est **parfait** lorsque chacune de ces moyennes est fixe.

Voici un Harmonium au départ.

1	2	3	4	5	6
2	0	0	0	0	7
3	0	0	0	0	8
4	0	0	0	0	9
5	6	7	8	9	10

Voici cet Harmonium après la première étape.

1	2	3	4	5	6
2	1	0,75	1	3	7
3	0,75	0	0	2	8
4	2,5	1,75	2	4,5	9
5	6	7	8	9	10

Par exemple :

$$\frac{0+0+0+7}{4} = 1,75$$

Voici un Harmonium Parfait.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Par exemple :

$$\frac{5+5+7+7}{4} = 6$$

Nous avons pris l'harmonium du départ, fait les calculs pour obtenir celui de la première étape, puis recommencer plusieurs fois. Au début, nous avons fait les calculs à la main, puis à la calculatrice, et enfin avec un tableur. Nous nous sommes aperçus à partir de la 30ème étape que les cases intérieures commençaient à se stabiliser et qu'elles se rapprochaient de celles de l'harmonium parfait ! Au bout de la 95ème étape, on trouve l'harmonium parfait à 0,000 000 000 1 près !

Nous avons recommencé avec d'autres nombres au départ dans la bordure. Le résultat est le même : au bout d'un certain temps, on obtient un harmonium parfait.

Puis nous avons constaté la même chose en changeant de forme, avec des harmoniums losanges ou carré.

Vous pourrez voir tous ces harmoniums devenir parfaits et vous-même faire le test en écrivant les nombres que vous voulez dans la première bordure en consultant avec un tableur le DOCUMENT ANNEXE !

Nous en sommes donc arrivés à la conjecture suivante :

En prenant un harmonium quelconque, au bout d'un certain nombre d'étapes, on obtient un harmonium parfait.

A ce stade, nous nous sommes posé plusieurs questions :

Pour une bordure donnée, l'harmonium parfait qui lui correspondrait est-il unique ?

Pour répondre à cette question, répondons d'abord à celle-ci :

La différence de deux harmoniums parfaits donne-t-elle un troisième harmonium parfait ?

Voici nos résultats ...

I. La soustraction de deux harmoniums parfaits.

A	B	C	D	E	F	G		²	B'	C'	D'	E'	F'	G'
B	a1	b1	c1	d1	e1	H		B'	a2	b2	c2	d2	e2	H'
C	f1	g1	h1	i1	j1	I		C'	f2	g2	h2	i2	j2	I'
D	k1	l1	m1	n1	o1	J	-	D'	k2	l2	m2	n2	o2	J'
E	p1	q1	r1	s1	t1	K		E'	p2	q2	r2	s2	t2	K'
F	u1	v1	w1	x1	y1	L		F'	u2	v2	w2	x2	y2	L'
G	H	I	J	K	L	M		G'	H'	I'	J'	K'	L'	M'

- Leur différence donne un troisième harmonium. Intéressons-nous aux cases l1 , l2 et leur soustraction : l1 - l2

	g1-g2	
k1-k2	l1 - l2	m1-m2
	q1-q2	

- Logiquement, le résultat devrait être le suivant:

question : $l1 - l2 = \underline{(g1 - g2) + (m1 - m2) + (q1 - q2) + (k1 - k2)}$

démonstration mathématique: $I1 = \frac{g1 + m1 + q1 + k1}{4}$ $I2 = \frac{g2 + m2 + q2 + k2}{4}$

$$\begin{aligned}
 I1 - I2 &= \frac{(g1 + m1 + q1 + k1)}{4} - \frac{(g2 + m2 + q2 + k2)}{4} \\
 &= \frac{(g1 + m1 + q1 + k1) - (g2 + m2 + q2 + k2)}{4} \\
 &= \frac{g1 + m1 + q1 + k1 - g2 - m2 - q2 - k2}{4} \\
 &= \frac{(g1 - g2) + (m1 - m2) + (q1 - q2) + (k1 - k2)}{4}
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que la différence de deux harmoniums parfaits, donne un troisième harmonium parfait.

II. La différence de deux harmoniums parfaits de bordures identiques...

Prouvons maintenant l'unicité en montrant que :

Si deux harmoniums parfaits ont la même bordure, alors ces harmoniums sont égaux.

A	B	C	D	E	F	G
B	a1	b1	c1	d1	e1	H
C	f1	g1	h1	i1	j1	I
D	k1	l1	m1	n1	o1	J
E	p1	q1	r1	s1	t1	K
F	u1	v1	w1	x1	y1	L
G	H	I	J	K	L	M

A	B	C	D	E	F	G
B	a2	b2	c2	d2	e2	H
C	f2	g2	h2	i2	j2	I
D	k2	l2	m2	n2	o2	J
E	p2	q2	r2	s2	t2	K
F	u2	v2	w2	x2	y2	L
G	H	I	J	K	L	M

. Les deux harmoniums parfaits ci-dessus ont la même bordure.

. La différence de ces deux harmoniums donne un troisième harmonium parfait (ci-dessous).

=

0	0	0	0	0	0	0
0	a3	b3	c3	d3	e3	0
0	f3	g3	h3	i3	j3	0
0	k3	l3	m3	n3	o3	0
0	p3	q3	r3	s3	t3	0
0	u3	v3	w3	x3	y3	0
0	0	0	0	0	0	0

 : la valeur la plus élevée.

.Supposons qu'une case, par exemple **n3**, ait une valeur supérieure à toutes les autres cases.

.La case n3 est la moyenne des cases i3, o3, s3 et m3.

.Or, la moyenne de quatre nombres ne peut pas donner un nombre plus élevé que chacun de ces quatre nombres.

.Donc au moins une des cases i3, o3, s3 et m3 a une valeur supérieure ou égale à celle de n3, par exemple i3.

.Mais n_3 est supérieur (ou égal) à toutes les valeurs, donc $n_3 = i_3$.

Comme i_3 est égal à la moyenne, la moyenne des trois autres vaut encore n_3 .

On peut refaire le même raisonnement avec o_3 , s_3 et m_3 et montrer qu'ils sont égaux à n_3 .

Donc $n_3 = i_3 = o_3 = s_3 = m_3$.

.Les cases i_3 , o_3 , s_3 , m_3 et n_3 ont donc des valeurs supérieures à toutes les autres cases.

. Ce raisonnement est valable pour toutes les cases de l'harmonium (intérieur ou bordure).

0	0	0	0	0	0	0
0	a3	b3	c3	d3	e3	0
0	f3	g3	h3	i3	j3	0
0	k3	l3	m3	n3	o3	0
0	p3	q3	r3	s3	t3	0
0	u3	v3	w3	x3	y3	0
0	0	0	0	0	0	0

.On peut répéter ce raisonnement pour les cases i_3 , o_3 , s_3 et m_3 .

.Ainsi, les cases h_3 , l_3 , r_3 , x_3 , t_3 , un bord, j_3 et d_3 ont également la même valeur : la plus élevée.

0	0	0	0	0	0	0
0	a3	b3	c3	d3	e3	0
0	f3	g3	h3	i3	j3	0
0	k3	l3	m3	n3	o3	0
0	p3	q3	r3	s3	t3	0
0	u3	v3	w3	x3	y3	0
0	0	0	0	0	0	0

. Et ainsi de suite... A la fin, toutes les cases ont la même valeur.

0	0	0	0	0	0	0
0	a3	b3	c3	d3	e3	0
0	f3	g3	h3	i3	j3	0
0	k3	l3	m3	n3	o3	0
0	p3	q3	r3	s3	t3	0
0	u3	v3	w3	x3	y3	0
0	0	0	0	0	0	0

. On arrive jusqu'au bord et, de la même manière, les valeurs de la bordure sont égales à celles de l'intérieur.

- . Or, les valeurs de la bordure sont égales à zéro.
- . Les valeurs intérieures sont donc également égales à zéro.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

- . Si la soustraction des moyennes intérieures des deux premiers harmonium donnent zéro, alors les valeurs de départ étaient égales.

Nous avons ainsi prouvé qu'un harmonium parfait de bordure donnée est unique.

Merci de votre attention...

Les élèves : GABRIEL Camille et Mathieu, LUNEAU Chloé, élèves en 3^{ème} ;
MOSCATELLI Jeanne, MATHIEU François et MICHELIS Pierre, élèves en 5^{ème}
Au collège Charles Le Brun, à Montmorency (95)

Les enseignants : M. GEORGES Christian
M. THARREAU Yannick
M. ALBERTINI Frédéric

Le chercheur : M. PARREAU François