LA FABULEUSE HISTOIRE DES NOMBRES

Éliane Cousquer

Tournée ASTS du livre de la science

août 2001

Table des matières

1. Présentation

À l'Université des Sciences et Technologies de Lille (U.S.T.L.), j'enseigne les mathématiques et l'histoire des mathématiques.

À l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres (I.U.F.M.), je participe à la formation des professeurs de mathématiques de collège et de lycée.

L'histoire des mathématiques

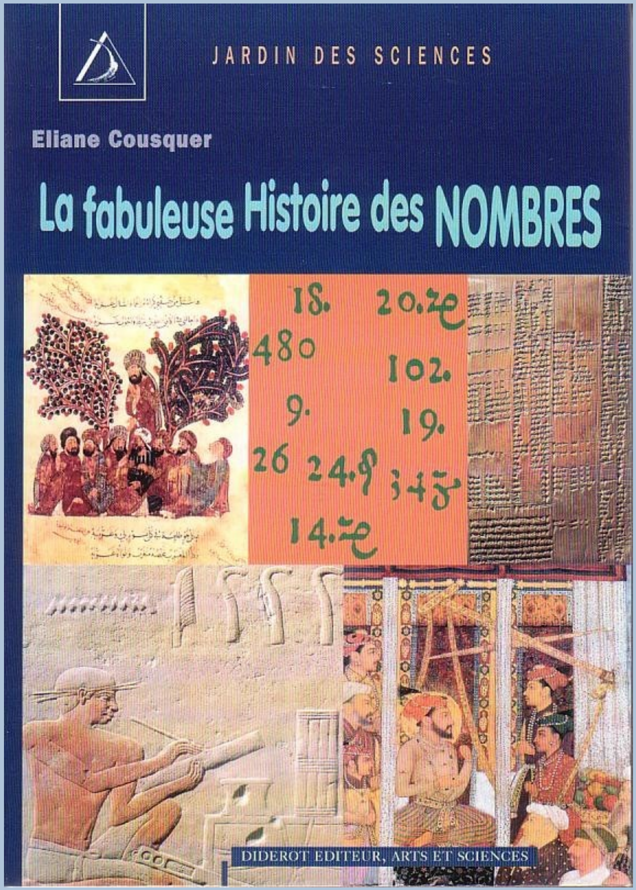
L'histoire permet de retrouver le sens des notions mathématiques et des problèmes qui leur ont donné naissance. Elle change la vision qu'on a des Mathématiques. Elles deviennent une oeuvre humaine, élaborées au fil des siècles et des civilisations.

Le multimédia

Nous développons à l'U.S.T.L. des logiciels d'apprentissage pour les étudiants, dans le cadre d'un programme national appelé *Université En Ligne*, (U.E.L.)

Je dirige un laboratoire multimédia, le *L.A.M.I.A.* à l'I.U.F.M. du Nord Pas de Calais.

L’histoire des nombres



L’histoire des nombres est devenue le fil conducteur de mes recherches en histoire des mathématiques.
Ce thème a alimenté plusieurs enseignements en Deug, au niveau du Capes ou à l’IUFM et il a fait l’objet de plusieurs publications.

Livre paru en 1998 chez Diderot.

Le titre de ma présentation pourrait être en désignant par le sigle T.I.C.E., *les Technologies d'Information et de Communication pour l'Enseignement*, (c'est-à-dire les technologies liées à Internet).

L'HISTOIRE DES NOMBRES
ET
LES T.I.C.E.

Le multimédia et l'histoire des mathématiques

Deux domaines qui, à première vue semblent opposés, depuis l'histoire de l'antiquité jusqu'à Internet.

Mon objectif

Vous convaincre de l'apport des outils comme Internet, pour éclairer l'histoire des mathématiques, en présentant sur chaque thème des sites WEB.

2. La notation des nombres

2.1. La préhistoire et les nombres

L'opération de compter est propre à l'espèce humaine. Elle s'étend sur des millénaires et on peut retrouver ses traces matérielles : outils, peintures murales, instruments... Des dénombrements par entailles sur des os ou des bâtons précèdent les premiers vestiges d'écriture.

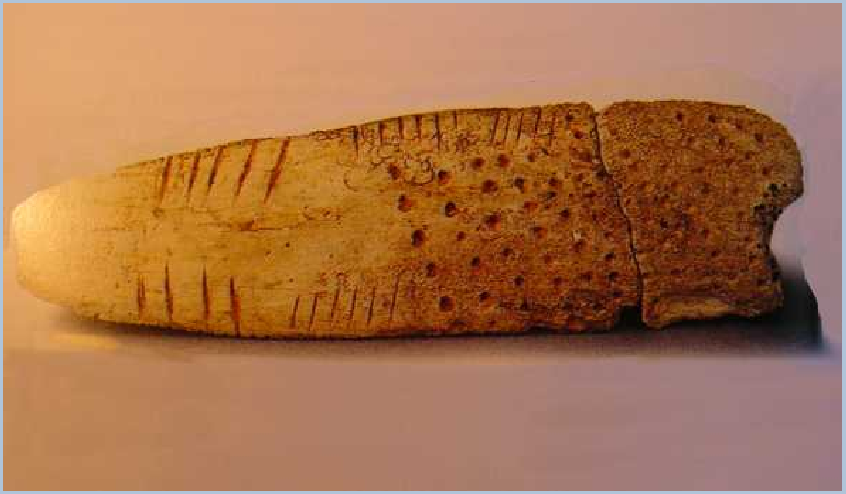


FIG. 1 – Bois de renne (-15000))

Traces dans la langue orale

L'invention des nombres a été un processus très long que des études linguistiques permettent de mieux connaître. L'invention des nombres a été faite par paliers. Certains peuples n'ont pas franchi le palier de la dizaine : *un, deux, beaucoup* ; *un, deux, trois, beaucoup* ; *un, deux, deux-un, deux-deux*

Certaines langues possèdent trois cas grammaticaux *singulier*, *duel* et *pluriel* qui peuvent être un lointain vestige de un-deux-beaucoup.

Langues indo-européennes

Les noms de nombres sont parmi les mots les plus stables et sont utilisés par les linguistes pour étudier les parentés entre langues. Dans les langues indo-européennes, les linguistes ont montré que les mots désignant *dix*, *cent* dérivent d'une même origine, mais pas *mille*. Cela montre que les peuples qui parlaient la *langue mère proto-indo-européenne* n'avaient pas atteint le millier dans le comptage. Exemple de vestige de numérations antérieures :

Quatre-vingt ou octante ?

Traces de comptabilité

Avant même l'écriture, on trouve des traces de comptabilité en Mésopotamie, avec des boules d'argile contenant des jetons comme celles présentées au Musée du Louvre.

FIG. 2 – Louvre : Pièces de comptabilité archaïque (3300 avant J.C.)

L'homme a su compter avant de savoir écrire

Ces boulettes de comptabilité sont présentées dans le site de la Bibliothèque Nationale de France B.N.F. sur *L'aventure des écritures* *

2.2. L’écriture marque le passage à l’histoire.

Louvre : Tablette du IV millénaire avant J.C.

Les premières traces d’écriture à Sumer sont toutes associées à des nombres : tablettes de comptabilité, enregistrements de transactions...
On peut suivre sur les tablettes mésopotamiennes les étapes de l’invention de l’écriture.

Pictogrammes

Les premières tablettes comportent des dessins appelés pictogrammes et des encoches pour les nombres.

FIG. 3 – Louvre : Écriture pré-cunéiforme, (fin du IVe millénaire av J.C.))

Tablette archaïque exposée au Louvre

On y voit une mélange entre des pictogrammes et des nombres. Le déchiffrements de ces tablettes archaïques * fait l'objet de travaux de recherches.

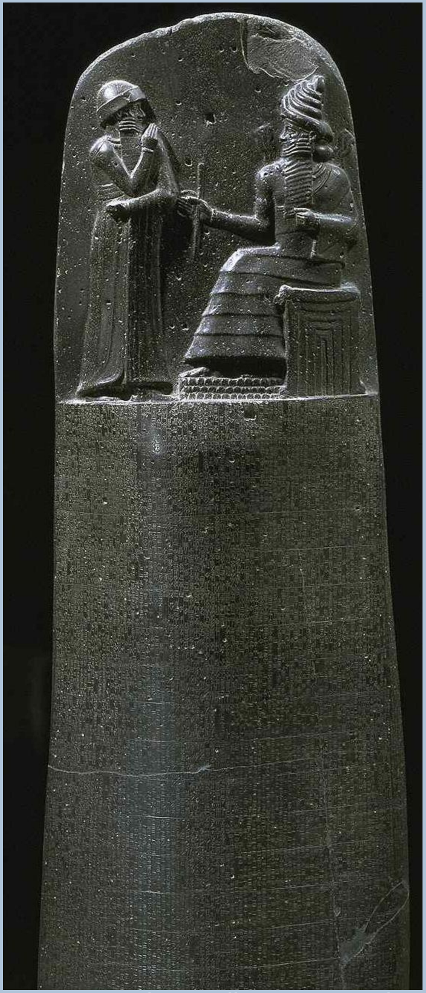
Ici l’écriture des mots a évolué vers le cunéiforme, mais l’écriture des nombres reste archaïque. On désigne par écriture cunéiforme, (en forme de clous), l’écriture inventée par les Sumériens et qui, au troisième millénaire avant J.C. était diffusée dans tout le Moyen Orient et était utilisée par des peuples très différents.

Une superbe exposition virtuelle à la Bibliothèque Nationale de France B.N.F. sur *l'aventure des écritures* * relate la naissance des écritures.

FIG. 4 – Extension de l'écriture cunéiforme au IIIe siècle avant J.C.

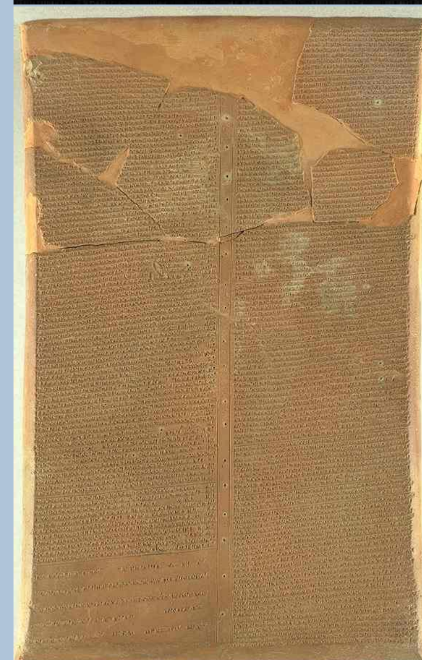
Louvre : Code d'Hammurabi

Louvre : Prince Guda



Le déluge

Plimpton-322



2.3. Les mathématiques et l’écriture

Elles sont nées en même temps, et restent très liées. Une mathématique nécessite un support écrit, mais à l’inverse, le besoin de garder trace des transactions fut essentiel pour l’invention de l’écriture

Les bases

La notation des nombres à l’aide de traits rencontre très vite des limites. L’utilisation d’un groupement appelé *base*, permet l’écriture des nombres. Les bases 2, 5, 6, 10, 12, 16, 20, 24, 60 ont été utilisées dans l’histoire. Les numérations écrites marquent un progrès fondamental. Des calculs sur des nombres de plus en plus grands deviennent possibles.

Conceptions mystiques

Systèmes de numération, pratiques calculatoires, pratiques de mesure, conceptions mystiques sur les nombres sont liés au cours de l’histoire.

Numérations gestuelles

Certaines civilisations ont utilisé les éléments du corps pour désigner des nombres, avec des numérations gestuelles, utilisant soit toutes les parties du corps, soit les mains.

Les instruments

Les cordelettes à noeuds, baguettes, abaques, bouliers *, machines, tables de calcul, ont toujours accompagné le calcul. Ils ont longtemps suppléé tout calcul écrit : seuls les résultats étaient retranscrits. Le calcul écrit s'est développé après le premier millénaire.
Sur le tableau, *Dame Arithmétique* arbitre la querelle entre les adeptes du calcul écrit et les tenants du calcul sur abaque.

3. Nombres et civilisations

3.1. La notation des nombres

L'inventivité des hommes pour la notation des nombres au cours de l'histoire a été très grande. Des principes de notation très divers ont été adoptés : systèmes positionnels ou non, systèmes additifs, multiplicatifs, alphabétiques...

Ces différents systèmes, comme le système positionnel babylonien, les systèmes décimaux non positionnels égyptien, grec attique et romain, puis systèmes alphabétiques grecs et chinois seront illustrés sur l' exemple du nombre 71 755 875.

Le partage des unités

Le partage des entiers pour la mesure des quantités plus petites que l'unité fut un problème très difficile dans l'histoire de l'humanité. Nos fractions résultent d'un processus historique très long. Les solutions adoptées furent différentes suivant les civilisations.

Questions à poser pour chaque système

Ce système permet-il d'écrire des nombres aussi grands qu'on veut ? Combien faut-il de symboles pour écrire un nombre ? Ce système permet-il d'écrire des nombres aussi petits qu'on veut ?

3.2. Les systèmes positionnels

Notre système de désignation des nombres à l'oral dérive du latin avec des irrégularités en français, vestiges d'une base vingt. Il est indépendant du système écrit.

Notre système écrit

Notre système de numération * est un ***système positionnel à base dix***, créé par les indiens.

$$71\,755\,875 = 7 \times 10^7 + 10^6 + 7 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$$

- base 10,
- chiffres arabes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
- système positionnel,
- avec un zéro (exemple dans 14053)
- noter des nombres aussi grands que nous voulons,
- à l'oral et à l'écrit, découpage avec 10^3
- nombres décimaux $124, 45$
- nombres réels $1248, 345345345345...$, π

L'usage des chiffres indiens * fut adopté par les arabes qui étendirent cette notation aux décimaux. Cette invention parvint en Europe après le premier millénaire sous le nom de chiffres arabes *. Le mot zéro * a la même origine que le mot chiffre.

Le système babylonien

Système positionnel à base 60 *étendu aux fractions*. Notre calcul du temps en heures, minutes, secondes et notre calcul des angles en degrés, minutes, secondes en sont des vestiges.

$$71\,755\,875 = 5 \times 60^4 + 32 \times 60^3 + 12 \times 60^2 + 11 \times 60 + 15$$

Soit $5, 32, 12, 11, 15$, suite écrite en babylonien avec deux symboles : un clou pour l'unité 𒁹 et un chevron 𒌋 pour la dizaine. *Système babylonien* *, sans zéro, sans "virgule", sans nota-

tion d'ordre de grandeur ; la base 10 est utilisée de façon auxiliaire pour noter les nombres de 1 à 60 de façon additive. Au IIIème avant J.C., apparition d'un zéro comme place manquante au milieu des nombres.

Les fractions sexagésimales

Chez les babyloniens, le clou 𒁹 signifie 1, 60, 60^2... mais aussi $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, et le chevron 𒌋 signifie 10, 10x 60, 10 x 60^2... mais aussi $\frac{10}{60}$, $\frac{10}{60^2}$, $\frac{10}{60^3}$... Le système babylonien permet de donner des valeurs approchées aussi précises qu'on le veut.

3.3. les systèmes non positionnels

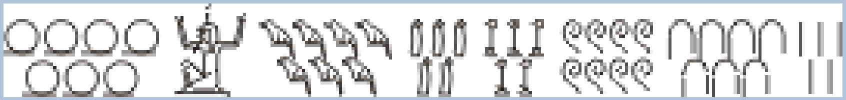
Le système égyptien

Champollion grâce en particulier à la pierre de Rosette * a ouvert la voie à la redécouverte de cette civilisation en déchiffrant les écritures égyptiennes *.

Les mathématiques égyptiennes

Elles sont connues par quelques papyrus * dont le plus célèbre est le papyrus Rhind. Les techniques de calcul des Égyptiens ont été beaucoup étudiées et de nombreux sites web y sont consacrés.

Le système égyptien représente chaque puissance de 10, jusqu'à 10^7, par un hiéroglyphe *. Dans ce système, notre nombre, $71\,755\,875$, est écrit par répétition de symboles.



Un texte égyptien indique : «J'ai reçu un deben d'argent soit 9 kites $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{60}$».

Papyrus Rhind (British Museum)

Les parts égyptiennes

Les calculs égyptiens utilisent des fractions de numérateur 1 appelées les parts et quelques autres fractions simples, $(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, notées successivement, sans signe d'addition. Ce système est très compliqué car un nombre peut avoir de multiples écritures.

Les tables de fractions

Toute multiplication exige d'exprimer le résultat sous une suite de parts. Comme les multiplications se font par des multiplications successives par 2, Il est nécessaire de décomposer les fractions $\frac{2}{n}$ en parts.

Par exemple, le résultat de la multiplication par 2 de $\frac{1}{97}$ est égal à $\frac{2}{97} = \frac{1}{56} \quad \frac{1}{679} \quad \frac{1}{776}$

L’ancien système grec attique

Un système d’écriture des nombres, antérieur à la période classique, utilise le même principe de notation des entiers avec toutefois un raccourci d’écriture avec des symboles pour 5, 50, 500. Le partage se fait suivant les myriades. Notre nombre $71\,755\,875$ s’écrit

Le système romain

Ce système grec, via les étrusques a donné naissance à l’écriture romaine des nombres. Ce système ne permettait pas de faire les calculs qui étaient réalisés sur une abaque. Seuls les résultats étaient retranscrits.

Dans notre pays, pendant plus d’un millénaire, ce système romain était utilisé pour transcrire les nombres, comme on peut le voir sur nos monuments.

Un principe soustractif s’introduit très tardivement au Moyen Âge comme raccourci d’écriture. Ainsi 9 s’écrit non pas VIIII mais IX, 40 s’écrit non pas XXXX mais XL.

3.4. Les systèmes alphanumériques

Le système grec alphanumérique * permet, avec 28 lettres permet de noter par trois lettres au plus de tous les nombres de 1 à 1000. Neuf lettres notent les chiffres de 1 à 9, neuf les dizaines de 10 à 90, neuf lettres les centaines de 100 à 900 ; une apostrophe précédant les lettres des unités indique les milliers. Le symbole M dénote 10^4 et peut être surmonté d'un nombre de 1 à $9\,999$ pour noter les nombres jusqu'à M fois M. Un nombre est surligné pour le distinguer d'un mot ordinaire.

Notre nombre $71\,755\,875$ s'écrit

$$M^{7\,175}\,5\,875 \text{ soit} \overline{M^{`\zeta\rho o\epsilon`}\epsilon\omega o\epsilon}$$

Ce système est limité pour l'écriture des grands nombres. Archimède dans un texte célèbre sur le calcul des grains de sable de l'univers, *«l'arénaire»* a imaginé un système d'écriture des grands nombres à l'aide de 10^8 soit M fois M.

Les fractions grecques

Les Grecs possédaient un système de notation pour toutes les fractions ; ils utilisaient les fractions égyptiennes dans la vie courante et utilisaient les fractions à base 60 babyloniennes, adaptées à leur notation des nombres, pour les calculs astronomiques. Tous ces systèmes ont perduré pendant tout le premier millénaire dans les pays méditerranéens

Un exemple

Le nombre $340 + \frac{2}{97} = 340{,}02062\cdots$ s'écrit avec nos chiffres suivant le principe des différentes civilisations.

Mésopotamie : $5, 40; 1, 14, 13$

Égypte : $340\frac{1}{56}\frac{1}{679}\frac{1}{776}$,

Grèce Plusieurs écritures :

— $340\frac{2}{97}$;

— $340, 1, 14, 13$ dans un texte d'astronomie ;

— $340\frac{1}{56}\frac{1}{679}\frac{1}{776}$.

C'est par cet usage des fractions à base soixante dans les traités d'astronomie grecques puis arabes que le système des minutes et secondes est parvenu jusqu'à nous. Jusqu'à l'invention des décimaux (16e siècle pour l'Europe), seul ce système de fractions sexagésimales permettait d'écrire des tables astronomiques.

Les systèmes chinois

En Chine archaïque un système de numération en base 60 a été utilisé. Une façon de noter des cycles de 60 années consécutives est un des vestiges de ce système.

Les baguettes de calcul

Le système décimal a très vite été en usage dans les calculs pratiques avec des baguettes disposées horizontalement et verticalement qui permettaient d'écrire les différents chiffres. Notre nombre $71\,755\,875$ s'écrit

Système positionnel de notation des nombres, non ambigu et très performant pour les calculs. Avec des baguettes de deux couleurs, rouge et noire, les chinois ont noté les nombres positifs et négatifs. Ce calcul avec les baguettes sur des damiers a joué un rôle considérable dans le développement de leurs mathématiques.

La notation des nombres avec les caractères

La notation des nombres avec les caractères chinois * date du début de notre ère et est encore en usage aujourd'hui. Les nombres sont partagés suivant les myriades. Le symbole du zéro date du VIIIème siècle. Les textes scientifiques utilisent maintenant notre système décimal avec les chiffres arabes.

En chinois notre nombre 71 755 875 s'écrit

七千一百七十五万五千八百七十五

Principe multiplicatif de notation de nombres.

Les très grands nombres

Ils nécessitent l'invention de nouveaux caractères pour chaque puissance de dix. Divers systèmes sont apparus au cours des siècles.

Le plus grand nombre apparu dans un traité *Dix classiques de calcul* est le nombre 1 644 866 437 500 découpé de la manière suivante $1\ 10^4\ 6448\ 10^8\ 6643\ 10^4\ 7500$ soit

一万六千四百四十八亿六千六百四十三万七千五百

En Chine au début de notre ère, les fractions et les règles de calcul avec ces fractions sont connues.

4. Traditions mathématiques

Un problème babylonien

La surface du carré ajoutée au côté égale ; 45
tu poseras 1 l'unité
tu fractionneras 1 en 2, on trouve ; 30
tu croiseras par ; 30*, on trouve* ; 15
tu ajouteras ; 15 *et* ; 45*, on trouve* 1
c'est le carré de 1
tu soustrairas de 1 les ; 30 *que tu as croisés, on trouve* ; 30
c'est le côté du carré.

Traditions calculatoires

Les mathématiques, depuis les Babyloniens et les Égyptiens, en passant par l'Inde, la Chine et le Japon sont des mathématiques algorithmiques. On connait des tables de calcul, des livres de problèmes avec leurs solutions.

Héritage

On assiste à un mouvement important en histoire des mathématiques pour redécouvrir les mathématiques chinoises ou arabes avec une compréhension plus grande de l'intérêt des mathématiques algorithmiques.

FIG. 5 – Le monde grec ancien

Traditions démonstratives

La pratique de la démonstration a pris naissance en géométrie à partir des Grecs. Chez les Arabes, les deux traditions sont présentes et s'enrichissent. Les mathématiques aujourd'hui sont les héritières de cette tradition, mais elles se sont beaucoup diversifiées, avec en particulier le développement de l'analyse.

Dénombrement et mesure

Toutes les civilisations ont été rapidement confrontées au problème de quantités dont on ne peut donner une valeur exacte. Les mathématiciens grecs ont découvert que les entiers et les couples d'entiers ne permettaient pas d'exprimer toutes les mesures. Leur solution a consisté à séparer le *dénombrement*, qui relève du numérique et la *mesure*, qui est du ressort de la géométrie ; cette séparation durera deux millénaires.

La notion de nombre réel

La notion de nombre réel * sera pleinement acquise au XIX ième siècle à la suite du développement de l'analyse infinitésimale et de la réintroduction de l'infini dont l'usage en mathématiques avait été banni par les grecs.

Développements récents

Les mathématiques connaissent un très grand développement. Aujourd'hui, l'informatique conduit à un renouvellement et à de nouveaux concepts. Mais les mathématiques sont tellement intégrées dans tous les développements technologiques qu'on ne les remarque plus.

5. Les ressources sur le WEB

Cours en histoire des mathématiques

J'utilise maintenant beaucoup les ressources du Web avec les étudiants et les enseignants et je crée moi-même des ressources.

- Les présentations et les rapports ou articles : Le rapport sur le congrès ICMI.
- Cours sur l'histoire des nombres * en deug
- Cours aux P.L.C.2 *
- L'université en ligne U.E.L.

Livres numérisés édités en ligne

Certaines éditions de textes anciens se trouvent sur le réseau, on trouve des fac-similés et on assiste à un effort de numérisation de fonds anciens des bibliothèques.

- Reproductions du livre d'Euclide conservé à la bibliothèque du Vatican *.
- Édition du livre d'Euclide faite par Joyce sur le WEB avec des animations *.

Mon but proche

Éditer mon livre *La fabuleuse histoire des nombres* sur le web, dès que j'aurai récupéré mes droits.

Expositions en ligne

Expositions virtuelles de la B.N.F.

- *L'aventure des écritures* *
- *Matières et formes* *
- *La page* *
- *tous les savoirs du monde* *
- *Le ciel et la terre* *

L'exposition italienne sur les instruments anciens de géométrie

Macchine Matematiche *

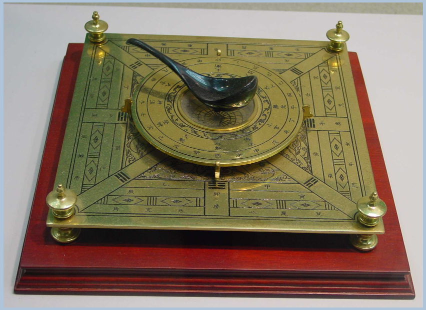
Les problèmes de droits

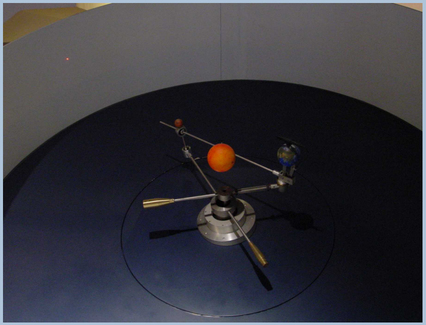
Ces problèmes de propriété intellectuelle ne sont pas simples et font l'objet de travaux juridiques : un site sur les droits d'auteurs a même été créé.

Les ressources iconographiques en mathématiques

Il est important de développer des ressources iconographiques libres de droits. Elles sont encore peu importantes aujourd'hui.

Les instruments anciens au musée d’astronomie de Taipei





6. Conclusion

L'accès aux ressources du WEB

Les possibilités d'accès à Internet, tout en se développant posent encore des problèmes quant aux débits et aux temps de connexion. Le développement de ressources sur le WEB est fondamental, en particulier pour les pays du Tiers Monde, où le WEB peut servir dans les universités équipées de bibliothèque virtuelle.

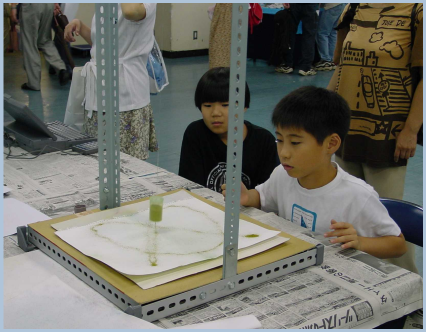
Les cours en ligne

On trouve beaucoup de cours en ligne sur le WEB et des formations combinant enseignement à distance et présentiel se développent, (exemple *). Cela ne remplace pas les enseignements classiques, de même qu'une encyclopédie ne remplace pas les systèmes éducatifs. Mais cela enrichit les possibilités d'accès à la connaissance. Les ressources peuvent être de natures très diverses, la critique et la vigilance s'imposent. On trouve tout et n'importe quoi ... Le pire et le meilleur ...

Enrichir l'enseignement des mathématiques et des sciences

Réintroduire, en mathématiques et en sciences, la recherche, l'exploration, la création ... (LiliMath *). La parole, l'écrit mais aussi l'image, l'animation, le geste, le son ... Comment exploiter les possibilités du multimédia ?

Le musée de la science à Tokyo et le stand sur les courbes de Lissajous



●First ●Prev ●Next ●Last ●Go Back ●Full Screen ●Close ●Quit