Le théorème de Thalès
Proportionnalité en géométrie plane
dans les ÉLÉMENTS d'Euclide

par Eliane Cousquer
Laboratoire LAMIA

Le théorème dit en France théorème de Thalès est appelé dans tous les autres pays théorème des lignes proportionnelles. Ce théorème pose le lien entre les nombres, les rapports et les proportions (qui, pour nous, relèvent du champ numérique) et la mesure des grandeurs en géométrie, en mécanique etc.

Pour chaque mathématicien, sa démonstration lie sa conception des proportions et la mesure des grandeurs. Cet article détaille la démonstration qui figure dans les éléments d'Euclide. Il s'agit d'éclairer ce qu'on appelle la méthode de démonstration par les aires en se souvenant que Euclide ne connaît pas la notion d'aire et n'utilise aucune notion numérique autre que les entiers.

Table des matières

1 Les débuts des proportions en Grèce

Les Grecs ont toujours affirmé avoir trouvé en Égypte et en Mésopotamie les matériaux de base pour leur astronomie et leur géométrie. Thalès et Pythagore, Démocrite et Eudoxe ont, selon la tradition historique, voyagé dans ces pays.

Les premiers mathématiciens grecs [1] sont issus d'Asie Mineure ; ce n'est pas un hasard, les liens économiques avec l'Égypte et l'empire assyrien étaient nombreux, et ces régions furent longtemps sous la domination des rois de Perse. Le début du développement des mathématiques grecques [2] s'est fait au carrefour de ces civilisations.

2 L'école de Thalès

La première école est celle de Thalès de Milet en Asie (-640, -546). Thalès était considéré comme un sage, qui avait fait des voyages pour affaires en Égypte. Il est supposé avoir calculé à l'aide d'un bâton la hauteur d'une pyramide, calculé la distance d'un bateau en mer et d'avoir pu prévoir une éclipse.

2.1 Les apports de Thalès

L'apport de Thalès est d'avoir introduit des démonstrations en mathématiques, au lieu de résultats épars, tantôt justes, tantôt faux en usage jusque là. Thalès est crédité de trois résultats importants :

– un diamètre partage un cercle en deux parties égales ;

[1] Pour l'histoire des débuts des mathématiques grecques, consulter les livres de Heath, tome 1, *A history of greek mathematics*, de Caveing, *La figure et le nombre* et Pichot, *La naissance de la Grèce présocratique*.

[2] Caveing, *Les grecs avant Euclide* dans Noël, *Le matin des mathématiciens*.

- un angle inscrit dans un demi-cercle est droit. Ce résultat sur les triangles rectangles inscrits dans un demi-cercle est, dans tous les autres pays européens, connu sous le nom de "théorème de Thalès".
- dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.

Par contre les commentateurs ne parlent pas du théorème des lignes proportionnelles, qui n'est attribué à Thalès que par une tradition pédagogique française depuis un siècle.

2.2 L'ombre des Pyramides

Sur quelle base a-t-on attribué en France les théorème des lignes proportionnelles à Thalès ? Aucun témoignage ancien n'attribue à Thalès de résultat sur les proportionnalités de lignes. Par contre, une tradition lui attribue de façon romancée la mesure de la hauteur des pyramides sur la base des témoignages suivants [3] :

Hiéronimus dit qu'il obtint même la mesure des Pyramides, à partir de leur ombre, ayant guetté le moment où la notre est égale à notre taille. (Diogène Laërce).

Thalès de Milet inventa de prendre la mesure de leur hauteur, en mesurant l'ombre au moment où elle se trouve égale au corps. (Pline).

... ayant fixé un bâton debout à la limite de l'ombre que fait la pyramide, tu, (Thalès), *montras que deux triangles étant formés par l'impact des rayons lumineux, la raison que l'ombre avait avec l'ombre, la Pyramide l'avait avec le bâton.* (Plutarque).

Comme on le voit, la tradition porte plutôt sur un repérage d'un moment où la hauteur d'un bâton vertical est égal à son ombre, et les discussions par les historiens des mathématiques portent sur la plausibilité de cette anectode.

3 Crise des grandeurs irrationnelles

On pense aujourd'hui que les premières démonstrations en géométrie faites par les pythagoriciens utilisaient la propriété implicite que tous les rapports de lignes se ramenaient à un rapport d'entiers, c'est-à-dire que tous les couples de lignes par exemple (ou de surfaces...) étaient commensurables.

[3] cf Caveing *La figure et le nombre* page 61

3.1 L'irrationalité

On ne dispose d'aucune trace précise de la découverte de l'incommensurabilité de lignes. On a seulement des témoignages de commentateurs Pappus, Proclus [4] et Iamblicus qui écrivent plus de sept siècles après les faits. Pappus la situe dans la secte pythagoricienne à propos de la diagonale du carré, et l'attribue à Hyppasius, Proclus l'attribue à Pythagore. Iamblicus situe cette découverte des irrationnelles non pas pour la diagonale du carré, mais pour le partage d'un segment en extrême et moyenne raison, c'est à dire à propos du nombre d'or. Les textes de Platon et d'Aristote plus proches des pythagoriciens la situent dans la secte pythagoricienne et parlent de la diagonale du carré. Aristote parle de "démonstration par le pair et l'impair".

3.2 L'antyphérèse

On connaît une autre démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale avec le côté du carré que celle évoquée par Aristote qui repose sur la méthode d'antiphérèse [5] (ou méthode de soustraction réciproque). On appelle ainsi l'algorithme de recherche d'une commune mesure entre deux lignes décrit dans le livre 10 des *Éléments d'Euclide*.

Soient deux lignes a et b. On peut en retranchant un certain nombre de fois la plus petite b de la plus grande a, et en recommençant avec b et r, écrire une suite d'égalités :

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, \quad r_0 < b_0, \\ b &= r_0q_1 + r_1, \quad r_1 < r_0, \\ r_0 &= r_1q_2 + r_2, \quad r_2 < r_1, \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

4 Les rapports de grandeurs

4.1 Avant Eudoxe

Suite à la crise des irrationnelles, les Grecs se sont posé le problème de définir rigoureusement le rapport de grandeurs comme le rapport de deux longueurs, ou de deux aires, ou de deux solides. Certains auteurs [6] pensent que l'algorithme dit d'Euclide ou d'antiphérèse était utilisé avant Eudoxe pour définir les rapports de grandeurs. Il est probable que le rapport des deux grandeurs a et b a d'abord été

[4] *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*.

[5] Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide*

[6] Knorr, *The evolution of Euclidean Elements*.

défini par la suite des quotients partiels q_0, q_1, $q_2, \dots$ pour trouver une solution à la crise des irrationnelles. On peut alors comparer deux rapports (suivant la parité du premier indice du nombre q_i qui est différent dans deux rapports a/b ou c/d). Pour des grandeurs a et b commensurables, au bout d'un nombre fini d'opérations, le quotient q_i est nul. Des grandeurs a et b incommensurables sont des grandeurs pour lesquels le processus est infini.

4.2 Eudoxe et les rapports de grandeurs

Eudoxe, né en -408 en Asie mineure, après différents voyages en Égypte rejoint Platon. Après différentes tentatives faites par d'autres mathématiciens, Eudoxe apporte une solution à la crise des irrationnelles. Il introduit formellement la notion de grandeur géométrique, (en pratique, les longueurs, les aires et les volumes, les angles et les arcs de cercle), grandeurs continues opposées à la notion de nombre. Il introduit la notion de rapport de deux grandeurs de même espèce, sans assigner de valeurs numériques à ces grandeurs. Il définit l'égalité de deux rapports appelée proportion et une notion d'ordre sur des rapports de grandeurs, indépendamment de toute considération numérique. La théorie d'Eudoxe est développée dans le livre 5 des *Éléments* d'Euclide, qui reprend l'œuvre d'Eudoxe.

Cette théorie très abstraite est tout à fait remarquable. On peut montrer qu'elle est logiquement équivalente à la théorie des coupures de Dedekind[7]. Elle eut l'avantage de permettre de grands progrès en géométrie en donnant une solution rigoureuse à la crise ouverte par la découverte de l'irrationalité de la diagonale du carré.

5 Les *Éléments d'Euclide*

On sait très peu de choses sur Euclide[8]. On est presque sûr qu'il vécut à Alexandrie vers -300. Il est surtout connu pour être l'auteur des *Éléments*[9], livre synthèse des *connaissances mathématiques de base* antérieures, en particulier des élèves de l'école de Platon.

[7] publiée dans la deuxième moitié du 19ième siècle.

[8] Caveing, *Euclide* dans Noël, *Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques*.

[9] Euclide, *Les Éléments*, traduction Peyrard ; Euclide *Les Éléments*, traduction Vitrac ; Euclid *The Elements*, traduction Heath

5.1 Les grandeurs chez EUCLIDE

Les quatre premiers livres traitent des grandeurs géométriques, avant de définir les rapports. Qu'est-ce qu'une grandeur chez Euclide ? Les grandeurs ne sont nulle part définies dans les *Éléments d'Euclide*. Par le contexte, nous voyons les notions d'égalité, de comparaison et de rapport de grandeurs fonctionner pour des segments (désignés par le mot droite), des figures planes, (triangles, rectangles, cercles, polygones, morceaux de plan),

- liées à la juxtaposition : Additionner deux grandeurs de même nature : les juxtaposer. Multiplier une grandeur par un entier n : juxtaposer n grandeurs égales à la grandeur donnée.
- liées à un produit de grandeurs : produit de deux longueurs : construire le rectangle sur ces deux longueurs ; application d'une surface sur une longueur : trouver un rectangle égal à cette surface, dont le côté est la longueur donnée, (sorte de division) ; produit de trois longueurs, (ou d'une surface et d'une longueur) : construire le parallélépipède droit sur ces trois longueurs, (ou sur cette surface et la longueur donnée). Un produit de plus de trois longueurs ou de deux surfaces, etc... n'a donc pas de sens.

L'égalité de figures comme les triangles, les carrés... n'est pas vraiment définie. Elle correspond intuitivement à l'idée occupe autant de place dans le plan et mathématiquement correspond à notre notion : ont des aires égales.

5.2 Les rapports de grandeurs dans le livre 5

Dans le cinquième livre est exposée la théorie des proportions, égalité de rapports de grandeurs, notion géométrique et non numérique. On définit l'égalité de deux rapports, on montre comment les comparer. Nulle part, il n'est question d'additionner des rapports. Même chose pour les rapports d'entiers définis dans un autre livre. La recherche du pgcd de deux nombres est faite par l'algorithme d'Euclide dans le livre 7. La recherche d'une mesure commune à deux grandeurs est faite dans le livre 10.

Dans les livres d'arithmétiques (livres 7, 8, 9) les nombres sont représentés par des lignes, le produit de deux nombres par un rectangle. Cependant le traitement de ces livres n'est pas géométrique. On ne sait pas si pour Euclide la notion de grandeur inclut ou non la notion d'entier. Probablement pas, sinon un traitement séparé des rapports de nombres et des rapports de grandeurs ne se justifierait pas. Pourtant dans le livre 10, proposition 5, il parle d'une proportion dont deux termes sont des grandeurs et deux termes des nombres.

Dans le livre 10, Euclide opère une classification des grandeurs incommensurables. Il étudie en fait des quantités qui selon nos notations se mettent sous la forme $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$... Il reprend là le travail de Théétète sur les différentes irrationnelles.

5.3 Les définitions du livre 5

Pour mieux suivre le texte du livre 5, nous allons donner les premières définitions telles qu'elles figurent dans le texte euclidien et leur traduction en langage moderne. Nous allons introduire une notation A/B pour écrire un rapport, notation qui n'est jamais utilisée dans le texte d'Euclide. Cela nous permettra de comprendre comment les Grecs ont pu se passer du numérique pour leur algèbre géométrique.

Grandeur multiple d'une autre

Définition 1 :
Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

Définition 2 :
Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

Il faut comprendre *mesure* au sens de «est contenue un nombre entier de fois dans...». A est une partie de B si il existe un entier n tel que $B = nA$.

Qu'est-ce qu'un rapport ?

Définition 3 :
Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité.

Définition 4 :
Une proportion est une identité de raisons.
Définition très vague qui introduit la raison de deux grandeurs homogènes, soit deux longueurs, soit deux aires, soit deux volumes. La raison n'est pas vraiment définie.

Un rapport de deux grandeurs homogènes existe-il toujours ?

Définition 5 :
Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

C'est ce qu'on appelle maintenant l'*axiome d'Archimède*. On définit une raison entre deux grandeurs A et B si on peut trouver deux entiers n et m tels $A < nB$ et $B < mA$. Cette définition est une précaution prise par Euclide qui connaissait l'exemple de l'angle entre un cercle et sa tangente, *angle corniculaire*, pour lequel on ne peut définir de raison avec aucun angle de droite.

Définition d'une proportion

Définition 6 :
Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

Cette très importante définition de l'égalité de deux raisons ou proportion est centrale dans le texte euclidien. On dit que A et B ont même raison que C et D, lorsque pour tous les entiers m et n possibles, on a seulement les trois cas :

- si $nA > mB$ alors $nC > mD$,
- si $nA = mB$ alors $nC = mD$,
- si $nA < mB$ alors $nC < mD$.

Cette définition suppose que les grandeurs A et B sont homogènes et les grandeurs C et D aussi.

Il est très important de souligner que cette définition 5 du livre 5 est opérationnelle et sert effectivement dans des démonstrations par exemple celle de la proposition 1 du livre 6 : *Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Autres définitions

Dorénavant nous ne donnons pas le texte euclidien, le lecteur ayant une idée de la difficulté introduite par un texte en toutes lettres sans notation. Nous cherchons seulement en donnant une idée du contenu du livre 5 à montrer que les raisons ou rapports ne sont pas des nombres.

Définition 7 :
Proportion $A/B = C/D$.

Définition 8 :
traite des inégalités. Si pour des entiers n et m on a $nA > mB$ et $nC < mD$ alors on dit que la raison de A avec B que nous notons A/B dépasse la raison de C avec D notée C/D. Il faudrait vérifier que cette définition est indépendante des « représentants choisis » pour ces raisons. En tout cas Euclide sait comparer des rapports.

Définition 9 :
Une proportion à trois termes désigne $A/B = B/C$ (les Grecs savaient trouver

une moyenne proportionnelle B entre deux termes A et C).

Définition 10 :
Si trois grandeurs sont proportionnelles alors $A/C = (A/B)^2$. A/C est une raison double de la raison A/B. Attention, ici raison double désigne le carré.

Définition 11 :
Si quatre grandeurs sont proportionnelles, cela veut dire $A/B = B/C = C/D$. Alors $A/D = (A/B)^3$. Même chose ici, A/D raison triple de A/B veut dire cube.

Définition 12 :
$A/B = C/D$, A et C sont les antécédents, B et D sont les conséquents.

Définition 13 :
Raison alterne A/C (ou B/D).

Définition 14 :
Raison inverse B/A (ou D/C).

Définition 15 :
La raison composée est celle que font $A + B$ et B, soit $(A + B)/B$ (ou $C + D$ et D, soit $(C + D)/D$).

Définition 16 :
La division de raison signifie $(A - B)/B$.

Définition 17 :
La conversion de raison signifie $A/(A - B)$.

Définition 18 :
Il y a raison par égalité entre deux familles de grandeurs A_i et a_i si pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on a $\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$.

Définition 19 et 20 en opposition :
Dhombres donne l'interprétation suivante : on a proportion troublée si on a trois grandeurs A_1, A_2, A_3 et trois autres grandeurs a_1, a_2, a_3, telles que : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{A_2}{A_3}$ et $\frac{a_2}{a_3} = \frac{A_1}{A_2}$.

5.4 Propositions du livre V

Voici la traduction des premières propositions du livre 5. Le but de cette énumération est de montrer qu'on ne calcule pas avec les rapports chez Euclide et de saisir la logique de la théorie des proportions du livre 5. Assez vite, ces propriétés ont dans la période après Euclide été appliquées aux calculs sur les fractions développés dans le cadre de la logistique ou calculs pratiques des artisans ou des marchands.

Proposition 1 :
$mA_1 + mA_2 + \cdots + mA_p = m(A_1 + A_2 + \cdots + A_p)$.

Proposition 2 :
Si $A_1 = nA_2$, $A_3 = nA_4$ et si $A_5 = mA_2$, $A_6 = mA_4$, alors $A_1 + A_5$ a la même raison avec A_2 que $A_3 + A_6$ avec A_4.

Proposition 3 :
$p(qA_2)$ est le même multiple de A_2 que $p(qA_4)$ l'est de A_4.

Proposition 4 :
Si $A/B = C/D$ alors $nA/pB = nC/pD$.

Proposition 5 :
Si on retranche nA et nB, alors $n(A - B) = nA - nB$.

Proposition 6 :
Soient A et B deux grandeurs. Alors $mA - nA$ est le même équimultiple de A que $mB - nB$ l'est de B.

Proposition 7 :
Si $A = B$ alors $A/C = B/C$ et $C/A = C/B$.

Proposition 8 :
$A > B$ implique $A/C > B/C$ et $C/A < C/B$ pour toute grandeur C.

Proposition 9 :
Si $A/C = B/C$ pour une grandeur C, alors $A = B$; si $C/A = C/B$ alors $A = B$.

Proposition 10 :
$A/C > B/C$ implique $A > B$, et $C/A > C/B$ implique $A < B$.

Proposition 11 :
Si $A/B = C/D$ et $C/D = E/F$, alors $A/B = E/F$.

Proposition 12 :
$A/B = C/D = E/F$ implique $\frac{A}{B} = \frac{A+C+E}{B+D+F}$.

Proposition 13 :
$A/B = C/D$ et $C/D > E/F$ implique $A/B > E/F$.

Proposition 14 :
$A/B = C/D$ et $A > C$ implique $B > D$; $A/B = C/D$ et $A = C$ implique $B = D$; $A/B = C/D$ et $A < C$ implique $B < D$.

Proposition 15 :
Pour tout entier m, $mA/mB = A/B$.

Proposition 16 :
$A/B = C/D$ implique $A/C = B/D$.
La démonstration de cette proposition utilise explicitement les équimultiples de la définition 6.

Proposition 17 :
$A/B = C/D$ implique $\frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$.

Proposition 18 :
$A/B = C/D$ implique $\frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$.

Proposition 19 :
$A/B = C/D$ implique $\frac{A-C}{B-D} = \frac{A}{B}$.

Proposition 20 :
Si $A/B = D/E$ et $B/G = E/Z$, alors, $A > G$ implique $D > Z$, $A = G$ implique $D = Z$, $A < G$ implique $D < Z$.

Proposition 21 :
Si $A/B = E/F$ et $B/C = D/E$, alors si $A > C$ on a $D > F$, si $A = C$ on a $D = F$, si $A < C$ on a $D < F$.

Proposition 22 :
Si $A/B = D/E$ et $B/C = E/F$, alors $A/C = D/F$.

Proposition 23 :
Si $A/B = E/F$ et $B/C = D/E$, alors $A/C = D/F$.

Proposition 24 :
Si $A/B = C/D$ et $E/B = F/D$, alors $\frac{A+E}{B} = \frac{C+F}{D}$.

Proposition 25 :
Si $A/B = C/D$ et A est la plus grande, D la plus petite, alors $A + D > B + C$.

Pour une réflexion sur le livre 5 des *Éléments*, le livre de Jean Dhombres [10] et le volume 2 des *Éléments* traduits par Vitrac qui analyse les différentes propositions de façon détaillée.

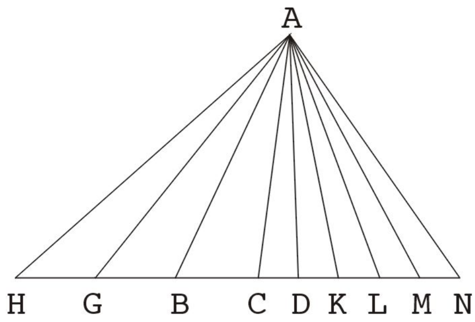
5.5 La démonstration du "théorème de Thalès" des *Éléments*

Elle fait l'objet de la deuxième proposition du livre 6 et utilise la première proposition du livre 6. La démonstration de cette proposition est une application directe de la définition des proportions du livre 5.

Proposition 1
Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leur base.

[10] Dhombres, *Nombre, mesure et continu — épistémologie et histoire*.

On prend des équimultiples à la fois de la base BC et du triangle ABC en plaçant les points G et H. On prend d'autres équimultiples de la base CD et du triangle ACD en plaçant les points K, L, M, N. L'application de la définition 5 résulte du fait que les triangles AHC et ADN sont toujours rangés dans le même ordre que leurs bases HC et DN.



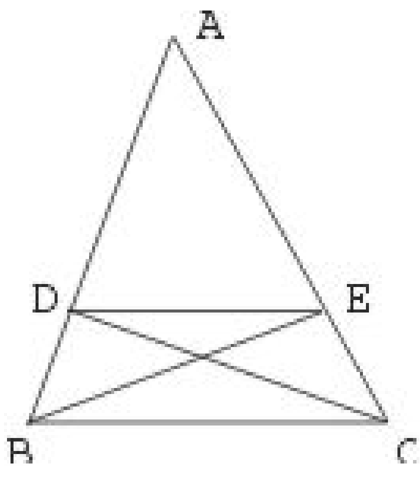
La méthode des aires

Elle consiste à passer, pour démontrer des égalités entre lignes, (respectivement des égalités de rapports de lignes), par des égalités d'aires, (respectivement des égalités de rapports d'aires). La méthode des aires est utilisée dans la proposition 2 [11] du livre 6.

Le théorème "de Thalès"

Proposition 2
Si on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au coté restant du triangle.

Soit à démontrer dans un triangle ABC que la parallèle DE au côté BC coupe proportionnellement les côtés AB et AC. Avec la proposition 1 du livre 6, on obtient :
AD est à DB comme ADE est à EDB,
AE est à EC comme ADE est à EDC.
Il suffit ensuite de montrer l'égalité des triangles EDB et EDC, triangles de même base entre les mêmes parallèles, pour avoir la proposition.



[11] que nous appelons en France le théorème de Thalès dans un triangle.

5.6 Les rapports en géométrie plane dans le livre 6

Définitions

1. *Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour les angles égaux sont proportionnels.*
2. *Les figures sont réciproques, lorsque que les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.*
3. *Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque que la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.*
4. *La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.*

5.7 Propositions

Nous donnons le texte des propositions qui suivent les deux premières déjà étudiées sans toutefois respecter leur ordre afin de les regroupe par thème. Mais il faut souligner que dans le tete euclidien, l'ordre s'explique par les exigences de rigueur des démonstrations.

Proposition 3
Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle ; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

Les triangles semblables

Proposition 4
Dans les triangles équiangles, les côtés autour les angles égaux sont proportionnels ; et les côtés qui soutendent les angles égaux sont homologues.

Proposition 5
Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles, et ils auront les angles sous-tendus par les côtés homologues égaux entre eux.

Proposition 6
Si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, ces deux triangles sont équiangles, et les angles sous-tendus par les côtés homologues seront égaux.

Proposition 7
Si deux triangles ont un angle égal à un angle, si les côtés autour des autres angles sont proportionnels, et si l'un et l'autre des angles restant sont en même temps ou plus petit au non plus petit qu'un droit, les triangles seront équiangles, et les angles compris par les côtés proportionnels seront égaux.

Proposition 8
Si dans un triangle rectangle, on mène à une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entre eux.

Proposition 15
Si deux triangles égaux ont un angle égal à un angle, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels ; et si deux triangles ont un angle égal à un angle, et si les côtés autour de ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, ces deux triangles ont égaux.

Proposition 19
Les triangles semblables sont entre eux en raison double des côtés homologues.

Proposition 31
Dans les triangles rectangles, la figure construite sur le côté qui soutend l'angle droit, est égale aux figures semblables et semblablement décrites sur les côtés qui comprennent l'angle droit.

Proposition 32
Si deux triangles, ayant deux côtés proportionnels à deux côtés, se touchent par un angle, de manière que leurs côtés homologues soient parallèles, les côtés restants des triangles seront dans la même direction.

Constructions géométriques

Proposition 9
D'une droite donnée, retrancher la partie demandée.

Proposition 10
Partager une droite donnée, qui n'est point partagée, de la même manière qu'une droite donnée est partagée.

Proposition 11
Deux droites étant données, trouver une troisième proportionnelle.

Proposition 12
Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Proposition 13
Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Proposition 18
Sur une droite donnée, décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne, et semblablement placée.

Proposition 25
Construire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée et égale à une autre figure rectiligne donnée.

Proposition 28
À une droite donnée appliquer un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée, et qui soit défaillant d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné : Il faut que la figure rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme appliqué à la moitié de la droite donnée ; le défaut du parallélogramme appliqué à la moitié de cette droite et le défaut de celui qui doit être défaillant d'un parallélogramme semblable étant semblables entre eux.

Proposition 29
Appliquer à une droite donnée, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée et qui soit excédent d'un pallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

Proposition 30
Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison.

Les parallélogrammes équiangles

Proposition 14
Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels ; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entre eux.

Proposition 23
Les parallélogrammes équiangles auront entre eux une raison composée des côtés.

Proposition 24
Dans tout parallélogramme, les parallélogrammes autour de la diagonale sont semblables au parallélogramme entier et semblables entre eux.

Proposition 26
Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.

Proposition 27
De tous les parallélogrammes qui sont appliqués à une même droite, et qui sont défaillants de parallélogrammes semblables au parallélogramme décrit sur la moitié de cette droite, et semblablement placé, le plus grand est celui qui est appliqué à la moitié de cette droite, et qui est semblable à son défaut.

Moyens et extrêmes d'une proportion

Proposition 16
Si quatre droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les deux extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes ; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au rectangle compris sous les moyennes, ces quatre droites sont proportionnelles.

Proposition 17
Si trois droites sont proportionnelles, le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne ; et si le rectangle compris sous les extrêmes est égal au carré de la moyenne, ces trois droites seront proportionnelles.

Autres figures rectilignes semblables

Proposition 20
Les polygones semblables peuvent être divisés en triangles semblables, égaux en nombre, et homologues aux polygones ; et le polygone a avec le polygone une raison double de celles qu'un côté homologue a avec un côté homologue.

Proposition 21
Les figures rectilignes semblables à une même figure sont semblables entre elles.

Proposition 22
Si quatre droites sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont proportionnelles ; et si des figures rectilignes semblables et semblablement construites sur ces droites sont proportionnelles, ces mêmes droites seront sont proportionnelles.

Proposition 33
Dans les cercles égaux, les angles ont la même raison que les arcs qu'ils comprennent, soit que les angles soient placés au centre ou bien aux circonférences ; il en est de même des secteurs qui sont construits aux centres.

6 La théorie des proportions les *Éléments*, bilan

1. D'une façon générale, en simplifiant, on peut dire qu'on n'opère pas sur les rapports de grandeurs. On compare des rapports de grandeurs, en établissant des égalités ou des inégalités de rapports.
2. Les problèmes de quadratures et de cubatures sont traités dans ce cadre de la théorie des rapports de grandeurs, de façon purement géométrique.
3. Dans les livres 7 à 9 d'arithmétique, sont établies les propriétés des entiers et des rapports d'entiers. Certaines propriétés des proportions sont donc établies deux fois : une fois pour les grandeurs au livre 5 et une fois pour les nombres (entiers) au livre 7.
4. Le livre 10 introduit la notion de *grandeurs commensurables* qui ont entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre, et de *grandeurs incommensurables* qui n'ont pas entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

6.1 Nature des rapports chez Euclide

Euclide ne calcule pas avec les rapports. Ce ne sont pas des nombres, mais des entités géométriques que l'on sait comparer. Toutefois il existe une exception dans la proposition 23 du livre 6 :
Les parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison composée des côtés.
où Euclide parle d'une raison composée qu'il n'a pas définie dans le livre 5. Cela montre que dès le texte euclidien, la tendance à opérer avec des rapports qui devait exister dans la logistique courante puisqu'on calculait avec les fractions, commençait. Cela confirme l'opinion de Jacob Klein [12] qui suppose que dès le début, les résultats du livre 5 ont enrichi la logistique de la vie pratique et que s'est développée une logistique savante que nous verrons à l'oeuvre chez Archimède, une génération plus tard. Cela montre que l'idéal d'un texte entièrement axiomatisé, sans faille logique est un mythe. Une autre faille est signalée plus loin.

6.2 Nouvelle conception des fractions

La conception des Grecs sur les fractions après Euclide subit une grande évolution. On sait que les Grecs de la période classique considéraient les entiers comme les seuls nombres existant. Les fractions ne pouvaient exister en tant que nombres puisque les Grecs considéraient comme impossible la division de l'unité. Les rapports de nombres entiers étudiés dans les chapitres d'arithmétique des *Éléments d'Euclide* fournissent cependant une base théorique solide pour les calculs

[12] Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*.

de fractions utilisés librement dans la vie pratique. Avec la période alexandrine, un changement s'opère dans cette conception [13]. Dans les textes d'Archimède, les fractions sont considérées comme des nombres. Une notation pour les fractions apparaît. Par exemple la fraction $\frac{13}{29}$ est notée : $\iota\gamma'\kappa\theta''\kappa\theta''$. Dans les textes mathématiques de Héron et de Ptolémée aussi bien les fractions égyptiennes que les fractions sexagésimales babyloniennes sont utilisées systématiquement dans les travaux de trigonométrie et dans les textes d'astronomie. La plupart du temps, les parties entières des nombres sont notées en base décimale non positionnelle avec des lettres, et les parties fractionnaires sont notées à l'aide de fractions sexagésimales écrites avec ces mêmes lettres. La grande différence dans cette époque est donc que les fractions interviennent comme des nombres. Toutefois nous n'avons retrouvé aucune trace de discussion sur le concept de fraction.

6.3 Problèmes

Quels sont les problèmes laissés par les Grecs à leurs successeurs ?

- Les problèmes du premier ou du second degré sont résolus par des méthodes géométriques.
- Il n'y a pas de fondements logiques pour la théorie des nombres et les Alexandrins utilisent les entiers et les fractions librement à la manière des Égyptiens et des Babyloniens.
- La rigueur est limitée à la géométrie et la géométrie est en partie limitée à des problèmes de constructions à la règle et au compas.
- Le problème du cinquième postulat des parallèles est entier.
- Les problèmes posés par l'évacuation de l'infini du champ des mathématiques aussi.

À la fin de la période classique grecque, la notion de nombre est étendue aux fractions, d'autres quadratures et cubatures sont démontrées Archimède, des approximations d'irrationnelles par des fractions sont réalisées, Héron. Mais pour les grecs le comptage relève du numérique et la mesure des grandeurs relève de la géométrie, sauf éventuellement dans le cas des grandeurs commensurables.

Deux questions sont léguées à leurs successeurs, questions qui se retrouveront dans les civilisations suivantes, dont les mathématiques se sont fondées sur les textes grecs :

Quelle est la nature de ces rapports géométriques, qu'on peut encadrer par des nombres, approcher autant qu'on veut par des nombres ?

Peut-on donner une définition plus simple des rapports et des proportions que celle d'Euclide ?

[13] Jacob Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*.

7 documentation

Commission Inter-Irem premier cycle *Autour de Thalès* parue en 1995 est un outil précieux pour les enseignants.

Sources historiques

Baccou Robert, *Histoire de la science grecque. De Thalès à Socrate,* Aubier Editions, 1951.
Bkouche, *Autour du théorème de Thalès,* Irem de Lille, 1994.
Caveing, *La figure et le nombre* Édition Septentrion PUL, 1998.
Caveing, *L'irrationalité dans les mathmatiques grecques jusqu'à Euclide* Édition Septentrion PUL, 1998.
Dhombres Jean, *Nombre, mesure et continu — épistémologie et histoire,* Cedic Fernand Nathan, 1978.
Euclide, *Les Eléments, (deux tomes, traduction F.Peyrard),* A.Blanchard.
Euclide, *Les Eléments, (deux volumes, traduction B. Vitrac),* Puf.
Euclid, *The thirteen books of Elements, (3 vol, translation by T.Heath),* Dover.
Heath, *History of greak geometry,* 2 vol, Dover.
IREM *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques,* Ellipses, 1993. D. Daumas et M. Guillemot, *Faut-il toujours raison garder ?*
Jacob Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra,* Dover.
Knorr *The ancient tradition of geometric problems.* Dover
Lloyd Geoffrey, *Les débuts de la science grecque, de Thalès à Aristote,* Maspero, 1974.
Noel, *Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques,* présentés par Emile Noel, Belin, 1990.
André Pichot *La naissance de la science 2 Grèce présocratique,* Folio Essais.
π *numéro spécial supplément au Petit Archimède 1980*
George Sarton, *Ancient science through the golden age of Greece,* Dover.
Proclus de lycie *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide,* Desclées de Brouwer 1948.
Serres Michel, *Éléments d'histoire des Sciences,* Bordas, 1989. M. Serres, *Gnomon, les débuts de la géométrie en Grèce* et de M. Authier, *Archimède, le canon du savant.*