Les nombres réels et l'analyse

par Eliane Cousquer, Laboratoire LAMIA [1]

Table des matières

[1] http ://www.lille.iufm.fr/labo/entreelabo2.html

1 Les nombres réels et l'analyse

1.1 Le calcul infinitésimal

Pendant tout le dix-huitième siècle, de grands progrès en analyse, en particulier dans l'étude des fonctions développables en séries, sont obtenus en s'appuyant sur une notion intuitive de limite et de convergence d'une suite vers une limite. Beaucoup de calculs faits reviennent à des calculs sur des séries formelles. Cependant les mathématiciens de ce siècle ne parviennent pas à dégager de façon satisfaisante les bases du calcul infinitésimal. La tentative la plus élaborée de donner au calcul infinitésimal des bases rigoureuses est celle de *Lagrange* avec son livre *Théorie des fonctions analytiques* dont un sous-titre fut *Contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniments petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Il s'agit donc d'une tentative d'algébrisation de l'analyse, en s'appuyant sur le développement des fonctions en série de *Taylor*. Le dix-neuvième siècle se caractérise par un retour à des préoccupations de rigueur et de fondements.

1.2 La rigueur en analyse

Un grand mémoire de *Gauss* sur l'étude de la convergence de la série hypergéométrique en 1813 ouvre une nouvelle époque. *Bolzano*, mort en 1848, s'intéresse aux fondements de l'analyse. Les progrès ultérieurs de la rigueur en analyse sont le fait de mathématiciens préoccupés par des problèmes d'enseignement. Le premier d'entre eux est *Cauchy* dont le *Cours d'analyse* de l'École Polytechnique en 1821 est considéré comme un modèle par ses contemporains ; toutefois il n'arrive pas à faire une claire distinction entre des notions comme convergence et convergence uniforme. Le problème de la représentation par des séries trigonométriques des fonctions connues amène *Fourier* à donner une définition très générale de la notion de fonction. *Abel* montre l'inexactitude d'un théorème de *Cauchy* affirmant que si une série de fonctions continues est convergente au voisinage d'un point, sa somme est une fonction continue, en publiant un contre-exemple. *Weierstrass* dégage clairement la notion de convergence uniforme. Il est l'auteur de la définition de limite quantifiée avec les ε et δ que nous utilisons encore aujourd'hui. Pour les besoins d'un cours d'analyse, Richard *Dedekind* élabore en 1863 une théorie qu'il publiera en 1872 sous le titre *Continuité et nombres irrationnels* où il définit les nombres réels comme des coupures dans l'ensemble des rationnels.

Ces quelques indications permettent de voir comment les mathématiciens ont été amenés à comprendre que la solution des fondements de l'analyse passait par une définition des nombres réels dégagée de tout recours à l'intuition géométrique.

Les premières tentatives pour écrire l'équivalent pour l'analyse de ce que furent les *Éléments d'Euclide* pour la géométrie furent celle de Martin *Ohm* (1822), puis celle de *Bolzano* (1830). *Weierstrass* en 1863 expose dans ses cours une théorie des nombres réels. Les constructions les plus achevées de l'ensemble des nombres réels sont publiées dix ans plus tard.

1.3 *Bolzano*

Bolzano présente un intérêt tout particulier dans le courant d'idées qui a conduit à l'arithmétisation de l'analyse. Dans un article publié en 1817 intitulé *Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation* , il explicite la nécessité pour justifier ce théorème de ne pas recourir à des évidences géométriques, ni aux notions de temps et de mouvement.

Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse *ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la* bonne méthode *qui consiste à vouloir déduire des vérités des mathématiques* pures *ou générales (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une* partie appliquée *(ou spéciale) seule à savoir à la* géométrie.

On mesure l'écart avec les mathématiciens du siècle précédent. La géométrie est devenue une partie appliquée des mathématiques ! Il critique les démonstrations proposées avant lui, énonce et démontre le critère dit de *Cauchy* pour les séries, explicite la notion importante de borne supérieure d'un ensemble, en fabriquant par dichotomie deux suites adjacentes qui convergent vers cette borne supérieure. La démonstration du théorème des valeurs intermédiaires visé en résultera. Or l'existence d'une limite commune aux deux suites suppose connus antérieurement à cette démonstration les nombres réels, pour être rigoureuse. *Bolzano* démontre bien l'unicité de la limite, essaie d'établir l'existence, mais en fait il prouve seulement que

L'hypothèse d'une grandeur invariable ayant cette propriété d'approcher les termes de notre série ne contient rien d'impossible : cela vient du fait que cette hypothèse permet de déterminer cette grandeur avec la précision qu'on voudra.

Il faut remarquer que *Bolzano* a été le seul dans la première moitié du dix-neuvième siècle à envisager ce problème. *Cauchy* se contente de dire dans son cours d'analyse de 1821, après avoir énoncé le critère précédent :

Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

Bolzano est un précurseur pour les mathématiciens qui tels *Weierstrass*, *Dedekind* et Cantor achèveront le travail d'arithmétisation de l'analyse vers 1860-70.

Nombres et grandeurs

Bolzano distingue soigneusement nombre et grandeur. Pour lui seuls les entiers sont des nombres. Zéro, les rationnels, les réels, les complexes, les nombres infinis ne sont pas des nombres, mais des grandeurs.

Si l'ensemble des nombres *(plus exactement, des nombres dits* entiers*) est infini, a fortiori l'ensemble des grandeurs ...non seulement tous les nombres sont des grandeurs, mais il y a bien plus de grandeurs que de nombres. En effet les fractions* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ *...et les expressions dites irrationnelles :* $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ..., π, e, *...désignent aussi des grandeurs*[2].

Bolzano caractérise les grandeurs par des propriétés d'ordre :

Je crois que nous disons d'un objet qu'il est une emphgrandeur dans la mesure où nous nous représentons qu'il appartient à une espèce de choses qui, prises deux à deux, ne peuvent avoir que l'un des deux rapports suivants : ou bien elles sont égales, ou bien l'une d'elles apparaît comme un tout qui contient une partie égale à l'autre[3].

Toute grandeur, tout objet en général, que nous tenons pour infini sous quelque rapport, doit être considéré comme une totalité constituée d'un ensemble infini de parties. Mais la réciproque n'est pas vraie : toute grandeur considérée comme la somme d'un ensemble infini de grandeurs dont chacune est finie n'est pas nécessairement elle-même une grandeur infinie. On reconnaît communément, par exemple que les grandeurs irrationnelles telle $\sqrt{2}$ *sont des grandeurs finies par rapport à l'unité posée, bien qu'on puisse les considérer comme composées d'un ensemble infini de fractions de la forme :*

$$\frac{14}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \dots$$

où numérateurs et dénominateurs sont des nombres entiers[4].

Pour *Bolzano* le concept de zéro représente «rien». Par contre, il définit les grandeurs négatives par le concept d'opposition.

Déterminons de manière plus précise qu'on ne le fait habituellement le concept de zéro.
Il est indiscutable que le concept associé par tous les mathématiciens au symbole 0 *est tel qu'il vérifie les équations :*
$A - A = 0$ *et* $A + 0 = A$ *et* $A - 0 = A$ *où* A *est une expression de grandeur quelconque, qui peut correspondre à une grandeur réelle ou être absolument sans objet.*
On concédera qu'une telle définition n'est viable que si le symbole 0 *n'est pas*

[2] p. 80 dans *Les paradoxes de l'infini*.
[3] voir *Reine Zahlenlehre* p. 409.
[4] *ibidem*, p. 82, *Les paradoxes de l'infini*.

considéré comme représentant une grandeur réelle, mais comme une simple absence de grandeur [5]...

Bolzano distingue les grandeurs qui sont des nombres proprement dits, (les entiers relatifs), les grandeurs numériques (les grandeurs fractionnaires et les irrationnelles, les grandeurs infiniment petites, ces dernières formant des grandeurs mesurables) et les grandeurs infiniment grandes.

Tentative de construction des réels

Dans ses premiers écrits, l'existence des nombres réels ne lui pose pas de problèmes. Une suite dite de Bolzano-Cauchy converge vers une limite qui est un nombre réel puisé dans un ensemble donné préalablement à toute construction. Plus tard, après 1830, *Bolzano* s'apercevra de la nécessité d'édifier progressivement le système de nombres qui aboutira à la construction des nombres réels. Il précise les propriétés des nombres rationnels, il introduit le concept numérique de nombre rationnel susceptible de croître ou de décroître indéfiniment. Enfin il introduit une classe plus large que les nombres réels :

Je me permets d'appeler tout concept dans lequel il est postulé un ensemble infini d'opérations, que ce soient les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division ou toutes en même temps, un concept numérique infini et l'expression qui désigne un tel concept, une expression numérique infinie.

L'objectif de *Bolzano* est double : d'une part construire les nombres réels d'autre part élargir la notion de nombre de façon à inclure les nombres infiniment petits et les nombres infiniment grands. On peut considérer que *Bolzano* est un précurseur et qu'il a pris conscience du travail à faire pour rendre l'analyse rigoureuse mais que sa tentative a échoué.

1.4 *Cauchy*

Son *Cours d'analyse* de l'École Polytechnique en 1821 cherche à employer des méthodes ayant toute

la rigueur qu'on exige en géométrie, sans jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre qui tendent à attribuer aux formules algébriques une étendue qu'elles n'ont pas.

Cauchy énumère diverses espèces de quantités réelles qu'on considère soit en algèbre, soit en trigonométrie ...Il commence par distinguer entre nombre (positif) et quantité (de signe quelconque) vue comme accroissement ou diminution. Une grandeur est représentée par un nombre. Il part de la définition de suite, de limite de suite, de fonction, de convergence de série, d'intégrale. Il précise ensuite

[5] *ibidem*, p. 116.

les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand ...On voit donc que la notion de nombre réel est prise comme notion première. Lorsqu'il explicite le critère de Bolzano-Cauchy pour les suites, le caractère suffisant de ce critère est admis comme allant de soit.

Le passage suivant éclaire le point de vue de *Cauchy* :

Lorsque les valeurs successives attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de côtés croit de plus en plus...

Comme le montre J. *Dhombres*[6], *Cauchy* emploie une méthode de continuité qui utilise la densité des rationnels sur la droite pour l'étude des équations fonctionnelles ; il prévient son lecteur quant aux fondations requises : *«...en faisant naître les nombres de la mesure des grandeurs...»*. Or les ouvrages de *Cauchy* ont été considérés comme le point de départ de la rigueur en analyse, avec une nouvelle structure basée sur la notion de limite. Il est intéressant de voir que celle-ci s'appuyait sur une notion traditionnelle de nombre liée à la mesure des grandeurs.

2 Constructions des nombres réels par les coupures

Weierstrass[7] enseignait dès 1856 à Berlin une construction des nombres réels positifs comme des agrégats infinis de rationnels[8], qui n'est connue que par des notes prises à ces cours[9], et la rigueur de cette construction était saluée par ses auditeurs. Il est certain que ce travail a cristallisé tout un courant d'opinion chez les mathématiciens préoccupés de rigueur en analyse. Toutefois sa diffusion n'a pas dépassé un cercle d'auditeurs, parmi lesquels se trouvaient ceux qui ont produit les deux grands types de constructions des réels :

Celles développées par *Dedekind* puis indépendamment plus tard par *Tannery* qui reposent sur la notion de coupure dans l'ensemble des nombres rationnels.

Celles développées par Charles *Meray* d'abord puis par *Cantor* indépendamment et par *Heine* qui reposent sur la notion de suite de Cauchy de rationnels.

Du Bois-Reymond construit les réels par des suites décimales illimitées, à la même époque et développe les différentes philosophies possibles sur nombres et

[6] *Le rôle des équations fonctionnelles dans l'analyse algébrique de* Cauchy, Revue Histoire des Sciences, 1992, XLV/I.

[7] *Dugac, Éléments d'analyse de Karl* Weierstrass.

[8] *Cavaillès, Cours de philosophie mathématique*.

[9] *Dugac, Les fondements de l'analyse*.

grandeurs dans son livre sur la théorie des fonctions.

2.1 *Dedekind*

Dans le petit ouvrage *Continuité et nombres irrationnels* paru en 1872 *Dedekind* développe des considérations sur les nombres réels qu'il a trouvées en 1858 et exposées par oral depuis à différentes reprises. Il expose le sens de ses recherches et les raisons de sa publication dans l'introduction.

Sens de ses recherches

Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur au Polytechnikum fédéral de Zürich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchais refuge dans des évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique.

La distinction par *Dedekind* de l'usage des évidences géométriques et de l'intuition au niveau didactique pour une introduction à l'analyse et la nécessité d'une construction rigoureuse pour des nécessités scientifiques donne à réfléchir. C'est une remarque qui conserve toute sa valeur pour l'enseignement de l'analyse au lycée.

Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale. On dit fort souvent que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues et pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité et même les présentations les plus rigoureuses du calcul différentiel ne fondent pas leurs démonstrations sur la continuité mais font appel soit - plus ou moins consciemment - à des représentations géométriques, soit à des représentations permises par la géométrie, ou bien elles s'appuient sur des théorèmes qui eux-mêmes ne sont jamais démontrés de façon purement arithmétique. Ceux-ci comprennent, par exemple, le théorème cité plus haut, - et un examen plus précis m'a convaincu que tout *théorème équivalent peut dans une certaine mesure être considéré comme un fondement suffisant de l'analyse infinitésimale. Il ne s'agissait plus que de découvrir son origine effective dans les éléments de l'arithmétique et d'obtenir ainsi une définition véritable de la continuité. J'y parvins le 24 mars 1858...*

Pourquoi cette publication ?

Dedekind explique qu'il a longtemps hésité à publier ces recherches qu'il a exposées à différents cercles de scientifiques, mais que la publication des articles de *Heine Les éléments de la théorie des fonctions* dans le journal de Crelle (1872) et celui de *Cantor De l'extension d'une proposition de la théorie des séries trigonométriques* qui présentent une autre construction, à son avis plus compliquée que la sienne l'amène à cette publication.

...j'avouerai franchement que la présentation que j'en donne est plus simple par sa forme et souligne de façon plus précise ce qui est proprement le point central ...

L'article de *Dedekind* comporte sept paragraphes que nous allons résumer en indiquant leur contenu, parfois dans notre langage et nos notations et illustrer par des citations.

Propriétés des nombres rationnels

Dedekind suppose connue l'arithmétique des nombres rationnels, mais il commence par quelques remarques sur l'acte le plus simple : compter, (*«compter n'est rien d'autre que la création successive de la suite infinie des entiers positifs...»*) et sur les «quatre» opérations addition, soustraction, multiplication, division, et des limites rencontrées par la soustraction et la division :

cette limitation que rencontre le développement des opérations indirectes est devenue la cause véritable d'un nouvel acte de création, *c'est ainsi que l'esprit humain crée les nombres négatifs et fractionnaires, et on gagne dans le système des nombres rationnels un instrument d'une perfection infiniment supérieure.*

Je crois important de souligner ici le mot création que nous retrouverons dans la suite du texte. Quelles sont les propriétés des nombres rationnels qui sont essentielles pour la construction de *Dedekind* ? Elles sont liées à la relation d'ordre. Il les résume en trois points que nous présenterons ainsi :

1. Transitivité : Si $a > b$ et $b > c$ alors $a > c$
2. Si a et c sont différents, il existe toujours une infinité de rationnels b entre a et c.
3. Si a est un rationnel, tous les rationnels se partagent en deux classes A_1 et A_2 : A_1 est l'ensemble des rationnels $a_1 < a$ et A_2 est l'ensemble des

rationnels $a_2 > a$, le nombre a pouvant être rangé au choix dans l'une ou l'autre de ces classes. Tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la deuxième.

Comparaison des nombres rationnels avec les points d'une droite

Pour les points d'une droite, on peut définir une relation analogue à la précédente «point à droite d'un autre» et retranscrire trois propriétés exactement parallèles aux trois propriétés précédentes.

On sait que cette analogie existant entre les nombres rationnels et les points d'une droite devient une véritable corrélation quand on choisit sur la droite un certain point O, origine ou point zéro, et une certaine unité de longueur pour mesurer les distances. À l'aide de cette dernière, on peut construire pour tout nombre rationnel a une longueur correspondante …et déterminer un point correspondant…

Les propriétés des relations d'ordre se correspondent ainsi exactement.

Continuité de la droite.

Mais il est un fait de la plus haute importance : c'est qu'il existe sur la droite une infinité de points ne correspondant à aucun nombre rationnel…

Ce phénomène est lié à l'existence connue depuis l'antiquité grecque, de longueurs incommensurables avec l'unité.

De même que les nombres négatifs et fractionnaires naissent d'une libre création et qu'il est nécessaire et possible de ramener les lois des calculs effectués avec ces nombres aux lois des calculs effectués avec des nombres entiers positifs, de même l'on doit s'efforcer de définir complètement les nombres irrationnels eux aussi par les seuls nombres rationnels. Mais comment ? telle est la question.

La comparaison faite ci-dessus entre le domaine des rationnels et une droite a amené à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste cette continuité ?

Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

Si tous les points d'une droite sont répartis en deux classes telles que tout point de la première classe est situé à gauche de tout point de la seconde, il existe un et un seul point qui opère cette partition en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

Ce paragraphe se termine par une remarque très intéressante pour les relations entre mathématiques et physique :

Accepter cette proposition de la ligne n'est rien de plus qu'un axiome, par lequel nous reconnaissons seulement à la ligne sa continuité, par lequel nous pensons la ligne comme continue. Si l'espace a quelque existence réelle, il n'est pas nécessairement continu, et une quantité innombrable de ses propriétés resteraient inchangées même s'il était discontinu. Et si nous savions de façon certaine que l'espace est discontinu, rien ne pourrait nous empêcher, si cela nous convenait, de le rendre continu en remplissant par la pensée les lacunes, mais ce remplissage consisterait à créer de nouveaux individus ponctuels et devrait se faire selon le principe énoncé ci-dessus.

Création des nombres irrationnels.

Dedekind introduit les coupures, c'est à dire un partage des rationnels en deux classes tel que tout rationnel de la première soit inférieur à tout rationnel de la seconde. Il montre qu'il existe essentiellement deux sortes de coupures :

– la première classe possède un maximum ou bien la seconde possède un minimum qui est bien sûr un rationnel a. Alors *Dedekind* considère qu'il s'agit essentiellement de la même coupure définie par le rationnel a, et réciproquement un rationnel définit une telle coupure.
– ou bien la première classe n'a pas de maximum et la seconde n'a pas de minimum. *Dedekind* montre l'existence d'une telle coupure liée à $\sqrt{D}$, D nombre entier non carré. *Dans cette propriété que toutes les coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels, consiste le caractère incomplet ou non-continu du domaine des nombres rationnels.*
  Chaque fois que nous sommes en présence d'une telle coupure, non produite par un nombre rationnel, nous créons *un nombre nouveau,* irrationnel*,* x *que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure ; nous dirons que le nombre* x *est défini par cette coupure* (A_1, A_2) *ou qu'il opère cette coupure.*
  Avec les coupures, *Dedekind* a donc tous les nombres réels c'est-à-dire les rationnels et les irrationnels.

Dedekind définit ensuite une relation d'ordre entre coupures α dont les classes sont (A_1, A_2), et β, de classes (B_1, B_2) en distinguant essentiellement les deux cas suivants :

– il y a au plus un rationnel qui n'est pas classé de la même façon, qui se trouve par exemple dans la première classe A_1 et dans la deuxième B_2. Alors $\alpha = \beta$ et c'est un rationnel.
– Il existe au moins deux rationnels différents qui sont par exemple dans la première classe A_1 et dans la deuxième B_2, alors il y en a une infinité qui

ne sont pas classés de la même façon et on dit que $\alpha > \beta$

Continuité du domaine des nombres réels.

Dedekind établit pour cette relation d'ordre les trois propriétés qu'il avait définies pour l'ordre sur les rationnels et pour l'ordre sur les points d'une droite.

1. Transitivité : Si $a > b$ et $b > c$ alors $a > c$
2. Si a et c sont différents, il existe toujours une infinité de réels b entre a et c.
3. Si a est un réel, tous les réels se partagent en deux classes $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$: $\mathcal{A}_1$ est l'ensemble des réels $a_1 < a$ et $\mathcal{A}_2$ est l'ensemble des réels $a_2 > a$, le nombre a pouvant être rangé au choix dans l'une ou l'autre de ces classes. Tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la deuxième.

Mais il démontre ensuite la propriété de continuité de l'ensemble des réels qu'il énonce ainsi :

Si le système de tous les nombres réels se subdivise en deux classes $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$*, telle que tout nombre* α_1 *de la première soit inférieur à tout nombre* α_2 *de la seconde, alors, il existe un nombre réel et un seul* α *qui opère cette coupure.*

La démonstration se fait en définissant à l'aide de la coupure précédente une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels qui répond au problème.

Calcul sur les nombres réels.

Cette partie est très peu développée. Il explique seulement la façon de définir une addition sur les coupures et dit qu'on pourrait aussi définir de la même façon toutes les opérations et démontrer effectivement toutes les propriétés de ces opérations, par exemple que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ «*que l'on n'a jamais démontrées*».

Il donne alors une indication intéressante qui sera plus tard exploitée par Baire. Plutôt que de faire de longues vérifications fastidieuses, il vaudrait mieux exploiter la continuité pour justifier que les formules de calcul par exemple la distributivité qui sont vraies pour les rationnels le sont aussi pour les réels.

Analyse infinitésimale.

Dans ce paragraphe *Dedekind* démontre le théorème : *quand une grandeur* x *croit constamment, mais non au delà de toute limite, elle tend vers une valeur limite.*

et affirme à la fin que : *ces exemples peuvent suffire à montrer le rapport existant entre le principe de la continuité et l'analyse infinitésimale.*

2.2 *Tannery*

Dans son livre *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* , publié en 1886, Jules *Tannery* publie des leçons faites à l'École Normale Supérieure en 1883. Il explique dans la préface :

On peut constituer entièrement l'analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers…

J'ai supposé acquise la théorie des fractions rationnelles sur les nombres entiers positifs et négatifs, et j'ai débuté par l'introduction des nombres irrationnels. J'ai développé une indication donnée par M. Joseph Bertrand *dans son excellent traité d'arithmétique et qui consiste à définir un nombre irrationnel en disant quels sont les nombres rationnels qui sont plus petits que lui et tous ceux qui sont plus grands que lui ; c'est de cette façon que les nombres irrationnels s'introduisent le plus naturellement quand on traite de la mesure des grandeurs incommensurables avec l'unité ; j'ai d'ailleurs cherché à dégager la notion de nombre irrationnel de son origine géométrique. J'ai appris d'après une citation de M. G.* Cantor *que M.* Dedekind *avait développé la même idée dans un écrit intitulé :* Stetigkeit und irrational Zahlen *; je n'ai pas eu à ma disposition le travail de M.* Dedekind*, mais les développements d'une même idée se ressemblent forcément. Il y lieu de supposer que ce qu'il y a de bon dans mon exposition se retrouve dans celle du géomètre allemand, qui a d'ailleurs bien d'autres titres de gloire.*

Il expose ensuite brièvement les idées développées par *Cantor* et *Heine* pour définir les nombres réels par des suites de Cauchy, procédé qu'il trouve plus arbitraire que sa propre démarche. Cependant dans son livre il exposera les deux démarches en les prenant toutes les deux au commencement. On peut penser que ce livre de *Tannery* a eu une importance en France pour faire connaître ces constructions. *Le cours d'analyse* de *Jordan* à l'École Polytechnique de 1893 reprend très succinctement dans ses premières pages la définition des nombres irrationnels par les coupures. Le cours de Ch. J. *de la Vallée Poussin Cours d'analyse infinitésimale* [10] expose la même construction.

2.3 *Dedekind* : le sens de ces constructions

Il est intéressant de lire dans la préface d'un article ultérieur de *Dedekind* qui date de 1887 *La nature et le sens des nombres* des remarques sur les livres de *Dini* et de *Tannery*. *Dedekind* rappelle que trois théories sur les nombres réels parfaitement rigoureuses sont parues à la même époque : la sienne, celle de *Weierstrass* et celle de *Cantor*. Sa théorie des coupures fut adoptée sans modifications essentielles par *Dini* dans son livre de 1878 : *Fondamenti per la teoria delle funzioni di*

[10] Ch. J. *de la Vallée Poussin*, *Cours d'analyse infinitésimale*, édité en 1909 chez Gauthier Villars.

variabili reali. *Dedekind* reproche à *Dini* de ne pas avoir mentionné son nom dans l'exposition de la théorie arithmétique des coupures mais seulement lorsqu'il discutait l'existence des quantités incommensurables, ce qui, dit-il, ne peut être plus éloigné de la vérité.

Par contre, *Dedekind* accepte tout à fait l'affirmation par *Tannery* d'une élaboration indépendante de la théorie des coupures, à un moment où celui-ci n'avait lu ni son livre ni celui de *Dini*. Il y voit simplement une confirmation que sa théorie est conforme à la nature, un fait reconnu par un mathématicien comme *Pasch*. Par contre, il conteste que l'affirmation de J. *Bertrand* dont parle *Tannery* puisse servir de base à l'élaboration de cette théorie car, dit-il, ce n'est rien d'autre qu'une propriété connue de tous les mathématiciens depuis longtemps : le fait de pouvoir définir un nombre irrationnel par ses approximations rationnelles.

Sans dire contre qui, *Dedekind* maintient son affirmation que maintenant des théorèmes tels que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ puissent être démontrés rigoureusement. Ceci avait été contesté en particulier par *Lipschitz* qui contestait toute originalité à la théorie de *Dedekind* :

Je ne nie pas la rectitude de votre définition, mais j'estime qu'elle ne se distingue que dans la forme de l'expression, et non pour le fond, de celle que les anciens ont posée...Aussi souhaiterai-je que vous laissiez l'affirmation que des propositions comme $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ *n'ont jusqu'ici pas été démontrées. Je crois, en effet, qu'en particulier les lecteurs français seront convaincus avec moi que le ...livre V d'Euclide contient les principes nécessaires et suffisants pour la démonstration de ce théorème* [11].

Il est clair que *Lipschitz* relit de façon anachronique le livre V des *Éléments d'Euclide*. *Euclide* a défini les rapports de grandeurs homogènes, de même nature, et l'égalité de deux rapports de grandeurs : (dans notre langage), A est à B comme C est à D, si pour tous les entiers n et p, on a toujours :

$nA > pB \Longrightarrow nC > pD$
$nA = pB \Longrightarrow nC = pD$
$nA < pB \Longrightarrow nC < pD.$

En faisant un anachronisme et en considérant les rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ comme des nombres ce qu'ils n'étaient pas pour *Euclide*, on peut, en disant que les deux rapports sont toujours placés du même côté de n'importe quel rationnel, retrouver pour l'essentiel dans la définition 5 de l'égalité de deux rapports la théorie des coupures de *Dedekind*. C'est oublier que pour les Grecs les rapports étaient de nature géométrique, et ne relevaient pas du domaine numérique, que les Grecs n'opéraient pas avec les rapports. *Dedekind* a entièrement raison contre *Lipschitz*.

[11] cité par *Cavaillès* d'après la correspondance entre *Lipschitz* et *Dedekind*.

3 La construction par les suites de Cauchy

Donnons d'abord une idée de ce type de construction. Une suite de Cauchy de nombres rationnels est définie par une propriété indépendante de toute limite. (u_n) est une suite de Cauchy si, en employant le formalisme actuel :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \text{ et } p \in \mathbb{N})((n > N \text{ et } p > N) \Longrightarrow \mid u_n - u_p \mid < \epsilon)$$

On va établir ce que nous appelons maintenant une relation d'équivalence sur les suites de Cauchy de rationnels en considérant comme équivalentes deux suites u_n et v_n dont la différence tend vers 0. Un nombre réel sera défini comme une classe d'équivalence de l'ensemble des suites de *Cauchy* de rationnels par cette relation d'équivalence. Cette construction permet d'établir facilement à partir des propriétés des suites, une relation d'ordre et les propriétés des opérations algébriques sur les nombres réels à partir des propriétés des suites. Par contre une démonstration est requise pour monter que l'ensemble ainsi formé est complet, c'est-à-dire qu'une suite de Cauchy de nombres réels cette fois, ne conduit pas à d'autres nombres, mais converge vers un nombre réel.

Ce principe se retrouve dans les constructions effectuées par trois mathématiciens, *Meray*, *Heine* et *Cantor*. Nous allons examiner les textes qu'ils ont publiés en faisant d'abord une remarque.

Aujourd'hui nous définissons la limite d'une fonction quand une variable tend vers une valeur donnée, mais nous ne donnons pas la définition d'une variable tendant vers une valeur. En effet, nous avons abandonné le point de vue dynamique «*faire varier la variable et regarder ce qu'il advient de la valeur de la fonction* » , sauf au niveau de la phrase française elle-même, pour adopter la définition statique de la limite α d'une fonction en un point x_0 due à *Weierstrass* :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(0 < \mid x - x_0 \mid < \eta) \Longrightarrow \mid f(x) - \alpha) \mid < \epsilon.$$

Dans les textes que nous examinons, la notion de variable tendant vers une limite est utilisée.

3.1 *Charles Meray*

Il est incontestable que Charles *Meray* professeur à la faculté de Dijon a le premier publié cette construction par les suites de *Cauchy* de rationnels dans un article de 1869 dans la revue des sociétés savantes intitulé *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* . Il reprend l'essentiel de sa théorie dans le premier chapitre de son livre *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* , publié en 1872, en développant longuement dans la préface ses conceptions sur l'analyse.

Dans l'article de 1869, C. *Meray* part de deux principes (que nous présenterons dans le langage actuel) qu'il considère comme des fondements et veut montrer qu'ils sont équivalents :

– une suite monotone bornée converge vers une limite.
– une suite (v_n) telle que la *différence* $v_{n+p} - v_n$ *tend vers zéro quand* n *augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre* n *et* p, *est une suite convergente.*

Il montre que le second principe se démontre à partir du premier : Supposant une suite qui vérifie ce principe, il fabrique deux suites adjacentes qui encadrent cette suite et montre qu'elles convergent vers la même limite, en utilisant le premier principe.

Il remarque ensuite que le premier principe repose sur un procédé de calcul qui permet d'approcher la limite mais ne permet pas de découvrir la valeur de cette limite et donc d'établir son existence.

Mais en outre, n'est-ce pas en quelque sorte se contredire soit-même que de vouloir rattacher l'existence analytique d'un objet à une hypothèse qui ne l'assujettit à correspondre à aucun nombre, et qui, partant, ne lui confère pas le seul titre auquel il soit permis de l'introduire dans les calculs ? Je suis porté à le croire et à attribuer précisément à cette cause la difficulté qu'on éprouve toujours à approfondir la notion de quantité incommensurable.

Je réserverai maintenant la dénomination de nombre ou quantité aux entiers et aux fractions ; j'appellerai variable progressive *toute quantité* v *qui reçoit successivement diverses valeurs en nombre illimité.*

Il distingue ensuite variable convergente vers un nombre et variable convergente correspondant à une suite de Cauchy et décide d'appeler toutes ces suites *variables progressives convergentes qu'elles aient ou non une limite numériquement assignable*. Il dit ensuite qu'il s'agit de *limite fictive.* La construction complète est faite. Il étudie ensuite ce qu'il faut entendre par fonction de semblables nombres.

En résumé, à toute quantité dite incommensurable correspondent une infinité de variables progressives (commensurables) convergentes, dont l'équivalence peut s'exprimer en disant qu'elles ont pour limite commune la quantité dont il s'agit.

La préface du livre d'analyse de 1872 développe ses conceptions en analyse. Il pense que l'erreur des cours classiques est de s'appuyer sur la continuité pour développer la théorie des fonctions. Pour lui la propriété fondamentale à utiliser pour une fonction, est d'être développable en série de Taylor. Il se réclame d'une filiation de pensée avec les travaux de *Lagrange*, puis des travaux de *Biot* et *Bouquet*. Il présente ainsi le premier chapitre :

Le premier chapitre est une sorte d'introduction. J'y propose une théorie particulière des quantités incommensurables. Si singulière qu'elle puisse paraître, *comparée aux traditions classiques, je la crois plus conforme à la nature des choses, que les exemples physiques dont il faut illustrer les autres.*

Le paragraphe concernant les variantes incommensurables c'est-à dire les suites de Cauchy de ces êtres fictifs est assez flou, mais montre simplement qu'il a perçu le problème.

On peut dire que *Meray* est d'une certaine façon resté dans un mode de pensée classique en réservant le nom de nombre aux rationnels et en considérant les réels comme des objets fictifs.

3.2 *Heine*

Heine est l'auteur d'un article remarquablement clair *Les éléments de la théorie des fonctions* [12]. Nous nous intéresserons à la première partie de l'article qui développe la construction des réels. *Heine* explique que les principes de base de *Weierstrass* n'ont été publiés nulle part, de sorte qu'actuellement n'existe aucun exposé systématique sur les bases de l'analyse et en particulier sur les *nombres* irrationnels. C'est donc avec une préoccupation didactique claire qu'il entreprend ce travail.

Mise à part l'extrême difficulté d'exposer une telle matière, j'hésitais à publier un travail, qui pour l'essentiel provient de communications orales avec d'autres chercheurs, et en particulier de Monsieur Weierstrass*, de telle sorte que ce qui est de moi n'est guère plus que l'exposé au cours duquel il importe de ne laisser subsister aucune lacune importante. Principalement c'est la nécessité pour moi de me rapporter à un traité ultérieur sur les propositions de base de la théorie des fonctions qui a donné lieu à la présente publication dans laquelle je démontre, en définitive, ces propositions.*

Il dit dans les remerciements avoir emprunté à *Cantor* l'idée de définir les nombres généraux à l'aide de suite-de-nombres, (c'est-à-dire une suite de Cauchy de rationnels).

J'exprime mes remerciements en particulier à Monsieur Cantor*, de Halle, pour ses communications orales qui ont eu une influence considérable dans la rédaction de mon travail. J'y ai emprunté l'idée que les nombres généraux s'introduisent à l'aide de ces suites particulières convenables que j'appellerai ici suites-de-nombres…*

Son programme est clair :

Si je ne veux pas m'en tenir aux rationnels positifs, je ne réponds pas à la question : qu'est-ce qu'un nombre ? en définissant en quelque sorte un nombre abstrait qui introduirait les irrationnels en quelque sorte comme limites dont l'existence

[12] *Heine*, article *Les éléments de la théorie des fonctions* publié dans le Journal für die reine und angewandte Mathematik en 1872 et traduit récemment par J.P. *Friedelmeyer* et M. *Guillemot*

serait présupposée. Je me place, pour la définition, sur un plan purement formel en ce sens que je qualifie de nombres certains symboles explicitement connus, *de sorte que l'existence de ces nombres ne pose pas de problème.* Une importance capitale est accordée aux règles opératoires *et le symbole-numérique doit être choisi ou doit être muni d'un apparat tel qu'il assure un soutien aux définitions des opérations.*

Il définit successivement les suites-de-nombres, l'égalité de telles suites, les opérations, et attache à toute suite-de-nombres un symbole numérique, le même pour des suites-de-nombres égales. *On appelle nombre plus général ou symbole-numérique un symbole attaché à une suite-de-nombres...On dit que des symboles numériques sont égaux ou échangeables quand ils sont attachés à des suites de nombres égales...*

Il établit l'ordre, les opérations sur ces symboles, montre que les rationnels peuvent en être considérés comme des cas particuliers, définit la limite d'une suite de symboles et montre que tout symbole peut être considéré comme la limite de sa suite-de-nombre. Il montre bien sûr que cette notion coïncide avec la notion de limite classique dans le cas d'une suite qui converge vers un rationnel. Il démontre ensuite que la réitération du procédé suite-de-nombres ne produit pas de nouvelles irrationnelles. Voici ce paragraphe (abrégé) :

Les divers ordres de nombres irrationnels.

Dénomination. Les nombres les plus généraux qui quand bien même, dans des cas particuliers, seraient des nombres rationnels, sont appelés les nombres irrationnels du premier ordre. Comme l'on peut construire à partir des nombres rationnels ces irrationnels du premier ordre $\mathcal{A}$, on peut à nouveau à partir de ces irrationnels obtenir un deuxième ordre $\mathcal{A}'$, à partir de ces irrationnels obtenir un troisième ordre $\mathcal{A}''$, etc...Les irrationnels du $(m+1)$ ième ordre seront désignés par $\mathcal{A}^m$. Sans l'adjonction de l'ordre, l'irrationnel est opposé au rationnel...

Théorème. Les irrationnelles du $(m+2)$ ième ordre ne sont pas nouvelles, mais sont cohérentes avec celles du premier ordre.

Démonstration. Soit

$$\mathcal{A}^{m+1} = [\mathcal{A}_1^m, \mathcal{A}_2^m, \mathcal{A}_3^m \dots]$$

et de plus soient a_1, a_2, a_3 etc des nombres rationnels qui sont respectivement inférieurs à $\mathcal{A}_1^m, \mathcal{A}_2^m, \mathcal{A}_3^m$, etc et qui s'en distinguent de moins de 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, etc. Appelons $\mathcal{A}$, le symbole auquel a_1, a_2, a_3 etc appartiennent, qui est aussi un nombre irrationnel du premier ordre, alors, $\mathcal{A}^{m+1} - \mathcal{A}$ est le symbole d'une suite élémentaire ou de zéro, c'est-à-dire que $\mathcal{A}^{m+1} = \mathcal{A}$.

Lorsqu'on compare cet article à celui de *Cantor*, on est frappé des qualités d'exposition de *Heine*. Cela dit, *Heine* lui-même attribue à *Cantor* la paternité du mode de définition des réels à l'aide des suites de *Cauchy* de rationnels.

3.3 *Cantor*

Cantor publie un article en 1872 dans les Annales mathématiques de Leipzig, intitulé *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques*. Il commence par quelques explications sur les grandeurs numériques. Dans ce début est esquissé très brièvement en une page ce qui fait l'objet d'une construction soignée chez *Heine*. Il faut cependant remarquer que les objectifs des deux articles ne sont pas les mêmes, didactique chez *Heine*, où la définition des réels est un objectif principal, recherche sur les séries trigonométriques chez *Cantor*, où cette définition est un simple préliminaire.

Suivent deux pages où *Cantor* explique la nécessité de maintenir une distinction soigneuse entre le système A des rationnels, le système B des limites de suites de rationnels, puis le système C obtenu en prenant des limites de suites d'éléments des systèmes A et B etc *Bien que par là les systèmes B et C puissent être regardés comme identiques, il est essentiel de maintenir la distinction abstraite des deux systèmes* ... et de même tous les systèmes D ...construits à partir des précédents. Cela veut dire qu'il s'agit de définir des grandeurs numériques de différents ordres. Voici ce passage (abrégé) :

Le système A a donné naissance au système B ; de même les deux systèmes réunis, donneront naissance, par le même procédé, à un nouveau système C.

Soit en effet une série infinie : b_1, $b_2, \ldots$ $b_n, \ldots$ de nombres choisis dans les systèmes A et B et n'appartenant pas tous au système A, et cette série étant constituée de telle sorte que $b_{n+m} - b_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, quel que soit par ailleurs m ...je dirai que cette série a une limite déterminée c.

Les grandeurs numériques c constituent le système C.

Les définitions de l'équivalence, de l'inégalité en plus ou en moins, et celle des opérations élémentaires soit entre les grandeurs c, soit entre ces grandeurs elles-mêmes et celles des systèmes B et A, sont analogues aux définitions données plus haut.

Tandis que les systèmes B et A sont tels qu'on peut égaler chacun des a à un b, mais non pas chacun des b à un a, on peut égaler non seulement chacun des b à un c, mais aussi chacun des c à un b.

Bien que par là les systèmes B et C puissent dans une certaine mesure être regardés comme identiques, il est essentiel, dans la théorie que j'expose ici (et d'après laquelle la grandeur numérique, n'ayant d'abord en elle-même en général aucun objet, ne paraît que comme élément de théorèmes qui ont une certaine objectivité, de ce théorème par exemple que la grandeur numérique sert de limite à la série correspondante), il est essentiel, dis-je, de maintenir la distinction abstraite entre les deux systèmes B et C ; aussi bien l'équivalence de deux grandeurs numériques b, b' empruntées au système B n'entraîne pas leur identité, mais exprime seulement une relation déterminée entre les séries auxquelles elles *se rapportent.*

Le système C et ceux qui le précèdent produisent d'une manière analogue un système D ; ceux-ci à leur tour, un autre système E, et ainsi de suite ; par λ de ces opérations (en considérant l'opération par laquelle on a passé de A à B comme la première), on arrive à un système L de grandeurs numériques…

La deuxième partie est consacrée à la définition d'ensembles de points et des différents dérivés de ces ensembles. Est-ce par analogie avec les ensembles de points construits par dérivation à partir d'un ensemble que *Cantor* a raisonné pour maintenir la distinction précédente qui n'a pas grand sens ? La troisième partie de l'article de *Cantor* est consacrée à la démonstration du théorème sur les séries.

3.4 Correspondance entre *Dedekind* et *Cantor*

Ces deux mathématiciens ont entretenu une longue correspondance sur des questions scientifiques. Dans les lettres qui ont été publiées dans le livre de Jean *Cavaillès Philosophie mathématique*, nous nous intéresserons à celles qui ont trait aux articles dont nous avons parlé.

Nous pouvons revenir à un extrait de la préface de l'article de *Dedekind* où il mentionne à propos du texte de *Cantor* :

Mais par ma conception même du domaine complet des nombres réels, je ne parviens pas à reconnaître l'utilité qu'il y a à distinguer, fut-ce de manière conceptuelle, des grandeurs numériques d'une espèce encore supérieure.

Cantor, dans une lettre de décembre 1878 s'en défend et atténue beaucoup son point de vue :

par la distinction formelle de grandeurs numériques d'ordre différent, par quoi j'ai seulement voulu exprimer les différentes manières de les définir, il n'y a pas de danger que l'on puisse croire que j'aie voulu étendre le domaine des nombres réels. Cette bévue, je n'ai jamais envisagé même de loin, de la commettre ; je dis expressément dans mon travail que tout nombre que je désigne par c peut être égal à un nombre b.

Nous avons aussi des réponses de *Dedekind* à des objections de *Cantor* sur son article. *Cantor* objecte à *Dedekind* d'avoir fait de la propriété qu'il note IV (toute coupure sur la droite réelle définit un point) l'essence de la continuité. Il objecte que toute coupure dans les entiers, domaine éminemment discontinu vérifie cette propriété, et lui demande de lier la continuité à la conjonction des propriétés II et IV, la propriété II étant qu'entre deux points distincts, il en existe une infinité. *Dedekind* objecte que le contexte est suffisamment clair et qu'il n'y a pas lieu de modifier son article.

3.5 Les fondements de l'arithmétique

Ce mouvement vers la rigueur en analyse au cours du dix-neuvième siècle a donc été un mouvement vers l'arithmétisation de l'analyse. Mais pour que ce mouvement soit achevé, il était nécessaire que l'arithmétique elle-même soit fondée rigoureusement. En 1860, *Weierstrass* montre que les nombres rationnels peuvent être définis à partir de couples de nombres entiers. Il montre aussi que les négatifs peuvent aussi être construits rigoureusement à partir de couples d'entiers positifs.

Avec les constructions de nombres réels à partir des rationnels, cela démontre donc qu'une fois les nombres entiers naturels construits, il n'est pas nécessaire de poser d'autres axiomes pour justifier les nombres réels.

Des mathématiciens comme *Kronecker* trouvent les entiers ordinaires évidents et ne voient pas la nécessité de justifier leur non-contradiction. Par contre, d'autres comme *Dedekind* s'emploient à en élaborer une théorie. Celle-ci sera l'œuvre en 1889 de Giuseppe *Peano*, qui établira les nombres entiers sur la base d'axiomes :

- 1 est un entier,
- 1 n'est pas le successeur d'un entier,
- chaque entier a un successeur,
- si deux entiers ont le même successeur, ils sont égaux,
- si un ensemble d'entiers contient 1 et si, lorsqu'il contient un entier, il contient son successeur, alors cet ensemble contient tous les entiers.

À partir de là, il définit et justifie les opérations sur les entiers naturels. Cette construction parachève l'arithmétisation de l'analyse. Bien sûr, suite à *Hilbert*, les problèmes de consistance, de complétude des systèmes d'axiomes seront posés.

4 Les développements décimaux illimités

4.1 *du Bois-Reymond*

Dans son livre *Théorie générale des fonctions*, Paul *du Bois-Reymond* développe la *Métaphysique et théorie des concepts mathématiques fondamentaux : grandeur, limite, argument et fonction*.

Tout ce livre reste dans le champ classique de l'analyse en terme de grandeurs, et confronte différents points de vue sur les bases de l'analyse présentés comme des cas d'école : idéalisme, empirisme, avant que *du Bois-Reymond* ne présente sa propre synthèse. Il est très intéressant par la finesse de ses analyses, tout en voulant fonder sur la notion de grandeur linéaire ce que son époque apprend à inscrire dans le cadre numérique. Comment juger aujourd'hui le travail de *du Bois-Reymond* ? On peut remarquer qu'il était très au fait des travaux de son temps, ceux de *Cantor* en particulier sur les cardinaux, sur lesquels il fait des remarques très pertinentes. Par ailleurs il tente de donner un fondement aux quantités infinies et infinitésimales [13]. Sa volonté de lier grandeurs et nombres reste d'actualité et rejoint le travail de Lebesgue.

Voici le paragraphe 19 où *du Bois-Reymond* explique :

Comment il faut entendre en définitive le problème qui a pour objet le concept de limite... Les considérations qui précèdent nous conduisent donc finalement à comprendre comme suit notre problème. — Nous avons à démontrer la proposition que voici :

Tout nombre décimal $0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n}$ *s'approche autant qu'on veut quand* n *croît suffisamment, d'une valeur limite. Sous les fractions* $0,\alpha_1$ $0,\alpha_1\alpha_2$ *, ..., il faut entendre des multiples de dixièmes, de centièmes, ...d'une longueur dont les extrémités seraient* 0 *et* 1*. Si on porte les longueurs* $0,\alpha_1$ $0,\alpha_1\alpha_2$ *, ..., sur l'unité de longueur* $0,\ldots,1$ *à partir du point* 0*, leurs extrémités tournées du côté du point* 1 *vont en se resserrant de plus en plus et le point limite ferme la suite qui se resserre indéfiniment de telle sorte que toutes les extrémités sont situées par rapport à ce point limite du même côté que le zéro, les distances des points* $0,\alpha_1$ $0,\alpha_1\alpha_2$ *,* $\ldots$*, au point limite tombant en dessous de toute valeur.*

Le refus du tout numérique est chez *du Bois-Reymond* une position philosophique, qu'il sait en rupture avec le courant de pensée représenté par *Dedekind* et *Cantor*. *Lebesgue* plus tard se rattache à ce courant. Comme nprpedu Bois-Reymond l'écrit lui-même, une limite numérique abstraite est dénuée de sens. L'intérêt de ce point de vue a été, à mon avis, beaucoup sous-estimé, en particulier pendant la période dite des mathématiques modernes, dans les années 1960.

Cette conception géométrique *du problème doit maintenant ne pas être une hypothèse, ni impliquer aucune restriction ; mais en traitant dans ce chapitre du concept de grandeur, j'ai eu précisément pour but de montrer que dans le champ si parfaitement illimité de la pensée, nous ne pouvons imaginer sous la limite hypothétique rien d'autre qu'une quantité linéaire représentable, ainsi ce qui atteint très bien son but, une longueur. Une limite numérique abstraite est une façon de parler dénuée de sens ; nous ne faisons pas tort le moins du monde à la généralité de notre recherche, quand sous la limite hypothétique nous imaginons une quantité mathématique linéaire et donnons au problème l'énoncé qui précède.*

Dans tout le livre, les nombres réels sont présentés comme des développements décimaux illimités dont il s'agit de prouver le bien fondé mathématique.

L'irrationnelle est ainsi comme le nombre rationnel une quantité mathématique linéaire, et la différence entre les deux consiste en ce que le nombre irrationnel est une longueur limite de nombres rationnels, de sorte qu'il y a entre eux

[13] Gordon *Fisher*, The Infinite and infinitésimal Quantities of *du Bois-Reymond* and their Reception, Archive History of Exact Sciences, 1980.

un passage à la limite. Mais cela n'entraîne pas une différence essentielle[14].

Les travaux de *du Bois-Reymond* ont fait l'objet d'une opposition virulente, en particulier de la part de *Cantor*. Est-ce parce qu'il cherchait à trouver une justification aux infiniments petits et aux infiniments grands, alors que la tendance de l'époque était de les évacuer du champ des mathématiques ? Aujourd'hui où le développement de l'analyse non-standard a permis de leur trouver une justification rigoureuse, la question n'est pas si simple. En tout cas, pour qui veut réfléchir sur les fondements de l'analyse, son livre est passionnant.

4.2 *Lebesgue*

Définir les réels par les suites décimales illimitées est le point de vue défendu par *Lebesgue* dans *La mesure des grandeurs*[15]. Dans ce livre destiné à la formation des jeunes professeurs *Lebesgue* expose son point de vue sur l'enseignement. Il est important de souligner qu'il s'agit d'un exposé de leçon à faire au niveau lycée.

(...)ma principale critique porte sur ce qu'on dit, ou plutôt sur ce qu'on ne dit pas au sujet des nombres irrationnels.
Dans les plus hautes classes de l'enseignement secondaire, comme dans la plus basse, on ne parle des nombres irrationnels que par prétérition. On reprend ce qui est déjà clair dans l'esprit pour enseigner aux élèves à le formuler en mots ; on n'essaie pas de leur préciser ce qui est resté plus que vague, bien que ce soit ce qui leur a le plus servi depuis quatre années et dont, cependant, on ne leur a jamais parlé : le nombre rationnel ou irrationnel. On le rencontre partout ; partout on évite d'en parler nettement. En arithmétique, à l'occasion de la mesure des grandeurs on reprend la comparaison des longueurs, mais on ne s'étend que sur les cas de commensurabilité. Les autres, on les escamote avec plus ou moins d'habileté. On se livre aussi à un véritable tour de passe-passe à l'occasion des valeurs approchées. On ne peut parler que des valeurs approchées des nombres rationnels, puisque c'est des nombres rationnels seuls que l'on a parlé ; or, pour eux, ces valeurs approchées sont infiniment moins intéressantes que pour les autres nombres. Mais ceux-ci n'existent pas en quelque sorte ; c'est bien simple, on va parler de valeurs approchées qui ne seront approchées de rien.

Lebesgue va donc montrer comment établir les nombres réels. Pour lui, il n'est pas raisonnable dans l'enseignement d'insister sur les fractions. On part d'un segment on le mesure avec une unité U, on obtient un encadrement. On divise l'unité

[14]p. 139, paragraphe 46.

[15]*Lebesgue* : son livre *La mesure des grandeurs* de 1956 réédité aux éditions Blanchard rassemble des articles parus entre 1931 et 1935 dans la revue l'*Enseignement Mathématique* (tomes 31 à 34).

U en dix parties égales, on obtient une unité U_1, on mesure le segment et on réitère le procédé indéfiniment. On appelle nombre le résultat de cette suite infinie d'opérations. La justification de l'existence du nombre est donc géométrique.

Il s'agit d'imaginer un symbole, qu'on appellera nombre et qui étant le compte rendu complet de la suite infinie des opérations en pourra être le résultat...

On va passer directement des opérations sur les entiers aux opérations sur les nombres généraux ; mais auparavant, il faut se demander si toute suite de chiffres indéfinie sur la droite et comportant une virgule est un nombre...

Les opérations sont introduites à l'aide des mêmes représentations, l'addition en mettant deux segments bout à bout, la multiplication, en utilisant un changement d'unité pour la mesure d'un segment.

5 Exposés plus récents

5.1 *Hilbert*

Hilbert s'est attaché à définir $\mathbb{R}$ de façon axiomatique comme un corps totalement ordonné archimédien maximal, à un isomorphisme près. *Hilbert* définit les opérations et la compatibilité des opérations avec la relation d'ordre. Cet exposé se trouve dans son livre *Grundlagen der Geometrie* de fondements de la géométrie.

5.2 *Artin* et *Schreier*

Dans les années 1930, Emil *Artin* et Otto *Schreier* ont travaillé sur une définition algébrique des nombres réels. Leur travail a conduit à une définition algébrique de la relation d'ordre. Ils ont appelé *corps réel clos* un corps commutatif $\mathbb{K}$ vérifiant les trois axiomes :

1) -1 ne peut être écrit comme somme de carrés.

2) Tout élément positif de $\mathbb{K}$ a une racine carrée.

3) Tout polynôme de degré impair a au moins une racine dans $\mathbb{K}$.

Leur réflexion sur la continuité de $\mathbb{R}$ montre que celle-ci peut se ramener à la relation d'ordre et à la structure algébrique[16]. Deux modèles vérifient le système d'axiomes de *Artin* et *Schreier* : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_{\mathbb{A}}$ corps des nombres algébriques réels. Ces résultats, une axiomatique qui capture le continu sous la forme d'un ensemble dénombrable d'énoncés algébriques, ont été jugés paradoxaux par les plus grands mathématiciens (André *Weil*...), car l'idée intuitive de continuité relève de la topologie et semble difficilement réductible à des propriétés algébriques. La tâche que s'était assignée *Dedekind*, saisir l'essence de la continuité de $\mathbb{R}$, ne s'est

[16] voir H. *Sinaceur, La construction algébrique du continu* et *Corps et modèle, essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*.

donc pas achevée avec sa publication, mais fait toujours l'objet des réflexions des mathématiciens.

5.3 *René Baire*

Dans un livre publié en 1947 (mais écrit antérieurement), intitulé *Théorie des nombres irrationnels des limites et de la continuité* René *Baire* expose suivant un plan nouveau la théorie des nombres réels définis par des coupures.Voici ce plan :

1. Définition des nombres irrationnels.
2. Borne supérieure et inférieure d'un ensemble.
3. Limite d'une suite de nombres.
4. Valeurs approchées d'un nombre.
5. Différence de deux nombres.
6. Théorèmes sur les limites.
7. Notions de fonction et de continuité.
8. Fonctions d'arguments rationnels.
9. Principe d'extension.
10. Extension du calcul algébrique.
11. Théorèmes sur les fonctions continues.
12. Fonctions inverses.
13. Définition des fonctions racines, puissances et logarithme.

Voici comment il justifie son plan dans l'introduction :

Les méthodes courantes pour l'introduction des nombres irrationnels se rattachent à deux principales : l'une repose sur la notion de coupure, l'autre sur la notion de suite convergente ; dans l'une et l'autre, une fois les irrationnels introduits, on se préoccupe immédiatement de leur étendre les quatre opérations arithmétiques. Je procède différemment à cet égard : j'ajourne l'étude de ces quatre opérations, sauf la différence, à laquelle je fais une place à part, parce qu'elle joue un rôle prédominant (...) j'ai tout ce qu'il faut pour établir le théorème de Cauchy [condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite ait une limite] *; à l'aide de ce théorème et de quelques autres, j'établis, sous le nom de principe d'extension, une proposition générale d'où résultent comme des cas particuliers, les définitions de la somme, du produit, du quotient (...) Ces notions se trouvent ainsi définies en bloc, et, ce qui est plus important encore la justification des règles du calcul algébrique se fait également en bloc, au lieu d'exiger un raisonnement spécial pour chaque règle.*

Le principe d'extension consiste à étendre une fonction $f(x, y, ..)$ d'arguments rationnels supposée uniformément continue dans tout champ borné où elle se trouve définie, en une fonction $F(x, y, \dots)$ d'arguments réels, qui sera égale à la fonction précédente en tout point rationnel et qui sera continue dans tout champ où elle sera définie.

5.4 Les manuels des années 1960

Les grands traités parus dans les années 1960 commencent tous le cours d'analyse par un chapitre sur la construction des nombres réels. Le courant des «mathématiques modernes» alors dominant, prétendait reprendre les mathématiques à leurs débuts et les reconstruire. Les ensembles de nombres étaient construits : les entiers relatifs $\mathbb{Z}$ à partir des entiers naturels $\mathbb{N}$, les rationnels $\mathbb{Q}$ à partir des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, les réels $\mathbb{R}$ à partir des rationnels $\mathbb{Q}$. Ceci s'accompagnait d'un rejet de la géométrie considérée comme une application de l'algèbre linéaire. Les constructions du siècle passé convenaient donc parfaitement à ce propos, par le choix du tout numérique. Toutes les constructions, les opérations, leurs propriétés étaient soigneusement démontrées, ce qui explique la longueur des exposés qui leur sont consacrés.

- Le livre de Pisot Zamansky publié en 1959 présente la construction par les suites de *Cauchy* et les propriétés topologiques de $\mathbb{R}$ en une trentaine de pages.
- Le livre de Cagnac et Ramis publié en 1967 présente la construction par les coupures et démontre avec soin les propriétés des racines jusque là admises au lycée.
- Le livre de Lelong-Ferrand Arnaudies présente la construction des nombres réels par les suites de *Cauchy*. Il consacre plusieurs pages à démontrer que tout corps archimédien complet est isomorphe à $\mathbb{R}$ et par conséquent commutatif.

5.5 La situation actuelle

Dans les manuels de Deug parus récemment, on constate ou bien que la question des nombres réels est entièrement passée sous silence, ou bien que l'on trouve un chapitre présentant sous forme d'axiomes les propriétés de $\mathbb{R}$ qui sont utilisées ensuite, sans que ce choix soit explicité.

Il ne s'agit pas pour moi de prétendre qu'il faut faire cette construction en première année d'université. La construction par les suites de *Cauchy* est exclue à ce niveau, les étudiants n'ayant pas les outils nécessaires. La construction par les coupures est accessible dans son principe. Toutefois, il n'est pas sûr que les étudiants verraient le bien fondé de démonstrations souvent très longues pour justifier les propriétés des nombres qu'ils croient connaître.

Par contre, le non-dit sur les propriétés de $\mathbb{R}$ n'est pas satisfaisant. Toute l'histoire montre que cette conception des nombres pose des problèmes nombreux et difficiles. Le sens du travail en analyse passe certainement par l'élucidation des conceptions à l'heure actuelle implicites dans l'enseignement. En tout cas, il me parait nécessaire qu'un vrai travail sur les nombres soit fait avec les futurs enseignants. Je constate chaque jour que les élèves professeurs ont des conceptions très floues ou carrément erronées sur les nombres décimaux, sur les rationnels, et sur les nombres réels. Les constructions des ensembles de nombres ne leur ont jamais été faites. L'impression très nette est qu'ils disposent pour bagage pour préparer leurs cours de leurs seuls souvenirs de l'enseignement qu'ils ont reçu au collège et au lycée. Par contre les mises au point historiques sur les nombres les intéressent et ils sont très preneurs lorsque cette question des constructions des ensembles de nombres est abordée. C'est là un moyen de remettre du sens sur les bases mathématiques de l'enseignement de l'analyse.

Si l'enseignant doit construire au travers des différentes classes une intuition correcte sur les nombres, il faut trouver des formes pour que, au travers de débats scientifiques, par une intervention d'aspects historiques, les élèves et les étudiants prennent conscience de la conception des nombres à l'oeuvre dans leurs cours de mathématiques. Cela passe par une formation plus exigeante des enseignants sur ce point.

6 Références

6.1 Les nombres réels

BAIRE. Théorie des nombres irrationnels des limites et de la continuité. Vuibert, 1947.

BELNA. La notion de nombre chez DEDEKIND, CANTOR, FREGE. Vrin, 1996.

BOLZANO. Les paradoxes de l'infini. Édition du Seuil, 1993.

CAGNAC, RAMIS, COMMEAU. Traité de mathématiques spéciales Analyse Tome 2. Masson, 1967.

CANTOR. De l'extension d'une proposition de la théorie des séries trigonométriques. (1872) Traduction disponible à l'IREM de Toulouse.

CAUCHY. *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique* Analyse algébrique, 1821.

CAVAILLÈS. Cours de philosophie mathématique. Hermann, publié en 1962.

COUSQUER. De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels. Actes des journées de Cherbourg, La mémoire des nombres, 1994.

COUSQUER. Les constructions des nombres réels. Actes des journées de Besançon, 1995.
DEDEKIND. Essays on the theory of numbers, contient deux articles : Continuity and irrational numbers de 1872, et The nature and meaning of numbers de 1887. Édition Dover, 1963.
DEDEKIND. Continuité et nombres irrationnels. traduction Judith Milner revue par H. Sinaceur, disponible à l'Irem de Toulouse.
DE LA VALLÉE POUSSIN. Cours d'analyse infinitésimale. Édité en 1909 chez Gauthier-Villars.
D'ALEMBERT. Essais sur les éléments de la philosophie naturelle, (1759). Fayard.
DU BOIS-REYMOND. Théorie générale des fonctions, 1887. Hermann.
DUGAC. Cours d'histoire de l'analyse et article sur Les fondements de l'analyse. dans l'Abrégé d'histoire des mathématiques, publié par DIEUDONNÉ chez Hermann.
DUGAC. Éléments d'analyse de Karl *Weierstrass*. Archive History for exact science Vol 10 numéro 1/2 pages 42 à 174.
ENCYCLOPÉDIE DIDEROT-D'ALEMBERT
FREUDENTHAL. Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel publishing company, 1983.
HEINE. Les éléments de la théorie des fonctions. parus dans le journal de Crelle (1872). Traduction par FRIEDELMEYER et GUILLEMOT IREM de Toulouse.
HILBERT. Grundlagen der Geometrie. Traduction Les fondements de la géométrie. Dunod, 1971.
JORDAN. Cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique, 1893
KÄSTNER. *Anfansgsgründe der arithmetik, geometrie, ebenen und sphrärischen trigonometrie und perspektiv* 1758 édition de 1792 et eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile cité dans SEBESTIK Logique et mathématique chez *Bolzano*. Vrin.
LELONG-FERRAND ARNAUDIES. Cours de mathématiques Analyse Tome 2. Dunod Université.
MERAY. Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. publié en 1869 dans la revue des sociétés savantes et Nouveau précis d'analyse infinitésimale, publié en 1872
NEWTON. *Arithmétique universelle* 1707.
PISOT ZAMANSKY. Mathématiques générales, algèbre, analyse. Dunod.
ROUCHE. Le sens de la mesure. Didier Hatier, 1992.
ROUCHE. Qu'est-ce qu'une grandeur, analyse d'un seuil épistémologique. Repère IREM numéro 15, avril 1994.
SEBESTIK. Logique et mathématique chez *Bolzano*. Vrin.
SEBESTIK. *Bolzano* et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse. Revue d'histoire des Sciences, 1964.

SINACEUR. *Bolzano* et *Cauchy*. Revue d'histoire des Sciences, 1973.
SINACEUR. La construction algébrique du continu. dans Le labyrinthe du continu, Springer-Verlag, 1992.
SINACEUR. Corps et modèles, essai sur l'histoire de l'algèbre réelle. Vrin, 1991.
TANNERY. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle, 1886. Hermann.
TANNERY. Leçons d'arithmétique théorique et pratique. A. Colin, 1917.
THOM. L'antériorité ontologique du Continu sur le Discret. dans Le labyrinthe du continu, Springer-Verlag, 1992.