Le théorème de Pythagore
par Éliane Cousquer

Table des matières

1 Introduction

Il est difficile de dater l'apparition du résultat concernant l'hypoténuse du triangle rectangle connu de plusieurs civilisations. L'attribution de ce résultat à Pythagore *repose sur des témoignages très imprécis pour les mathématiques grecques. Dans une première partie, après avoir vu la première démonstration connue qui figure dans les Éléments d'*Euclide*, les commentaires de* Proclus*, ainsi* *que quelques généralisations du théorème par* Euclide *et* Pappus*, on présentera les hypothèses avancées par les historiens sur le travail de* Pythagore*. Dans une seconde partie, l'apparition de ce résultat dans différentes civilisations, babylonienne, indienne et chinoise, parfois très longtemps avant* Pythagore *sera montrée. Dans la troisième partie, différents types de preuves seront analysés pour ce théorème classique qui a suscité des centaines de démonstrations dans l'histoire.*

2 Plan détaillé

1. Le théorème de *Pythagore* et les mathématiques grecques
   - Les premiers mathématiciens grecs
   - Les *Éléments d'Euclide*
     - Le théorème de *Pythagore* dans les Éléments
     - Les pré-requis de la démonstration
     - La démonstration d'*Euclide*
     - Les prolongements du livre 2
   - Les commentaires de *Proclus*
     - Commentaire de la proposition 46
     - *Proclus* et les propositions 47 et 48
   - Les généralisations grecques du théorème de *Pythagore*
     - La généralisation d'*Euclide*
     - La généralisation faite par *Pappus*
   - *Proclus* sur *Pythagore*
     - *Proclus* sur le triangle rectangle (3, 4, 5)
     - *Proclus* sur les triplets pythagoriciens
     - L'irrationalité
     - Sur la démonstration faite par *Pythagore*
2. Le théorème dit de *Pythagore* dans d'autres civilisations
   - les mathématiques babyloniennes
   - les mathématiques égyptiennes
   - les mathématiques indiennes
   - les mathématiques chinoises
3. Différentes démonstrations du théorème de *Pythagore*
   - Les démonstrations par les aires
   - Les puzzles

Le théorème de *Pythagore* et les mathématiques grecques

Il n'est pas possible de tracer ici les grandes lignes de l'histoire de la Grèce antique [1]. Dans l'histoire grecque, on distingue la période classique de -600 à -300 et la période hellénistique ou alexandrine de -300 à 600.

Pour la connaissance des mathématiques de la période classique, on ne dispose pas de manuscrits originaux. Les sources que nous possédons sont des livres grecs écrits de 500 à 1500 ans après les œuvres originales, des transcriptions arabes d'œuvres grecques, des transcriptions latines d'œuvres arabes. On possède ainsi des œuvres d'*Euclide*, d'*Apollonius*, d'*Archimède*, de *Ptolémée*, de *Nicomaque*, de *Diophante*. Des commentaires de *Pappus* (300), et de *Proclus* (410–485) sont conservés.

Les premiers mathématiciens grecs

Les Grecs ont toujours affirmé avoir trouvé en Égypte et en Mésopotamie les matériaux de base pour leur astronomie et leur géométrie. Les premiers mathématiciens grecs [2] sont issus d'Asie Mineure. Le début du développement des mathématiques grecques [3] s'est fait au carrefour de ces civilisations.

Thalès de Milet en Asie (-640, -546) est supposé avoir calculé à l'aide d'un bâton la hauteur d'une pyramide, calculé la distance d'un bateau en mer. *Thalès* est crédité de trois résultats importants : un diamètre partage un cercle en deux parties égales ; un angle inscrit dans un demi-cercle est droit ; dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux. L'apport de *Thalès* est d'avoir introduit des démonstrations en mathématiques, au lieu de résultats épars, tantôt justes, tantôt faux en usage jusque là.

Pythagore originaire de Samos, après des voyages en Égypte et en Mésopotamie, s'installe dans le sud de l'Italie où il crée une secte mystique (*Pythagore* défendait la théorie de la métempsycose[4]) et une école, société d'adeptes dont les connaissances étaient tenues secrètes [5]. La tradition pythagoricienne dura

[1] Se rapporter au tableau final du livre de M. *Serres, Éléments d'Histoire des sciences*, pour situer les dates des principaux mathématiciens et philosophes.

[2] Pour l'histoire des débuts des mathématiques grecques, consulter les livres de *Heath*, tome 1, *A history of greek mathematics*, de *Caveing, La figure et le nombre* et *Pichot, La naissance de la Grèce présocratique*.

[3] *Caveing, Les grecs avant* Euclide dans *Noël, Le matin des mathématiciens*.

[4] Réincarnation

[5] voir l'article *Pythagore* de l'*Encyclopædia Universalis*.

plusieurs siècles. Plus tard, tous les travaux collectifs de cette école furent attribués à son fondateur [6]. Aucun écrit direct de la période de *Pythagore* n'ayant été conservé, nous connaissons l'œuvre arithmétique des pythagoriciens par le livre 7 des *Éléments d'Euclide*, la théorie des nombres figurés par le livre d'arithmétique de *Nicomaque* (100). En géométrie, les pythagoriciens ont obtenu différents résultats sur la somme des angles d'un triangle, sur des figures régulières et commencé à développer ce qu'on appelle *la méthode d'application des aires*. L'attribution du théorème sur l'hypoténuse à *Pythagore* repose sur quelques éléments épars et fragiles.

3 Les *Éléments d'Euclide*

On sait très peu de choses sur *Euclide* [7]. On est presque sûr qu'il vécut à Alexandrie vers -300. Il est surtout connu pour être l'auteur des *Éléments* [8], livre synthèse des *connaissances mathématiques de base* antérieures, en particulier des élèves de l'école de *Platon*. [9]

Les *Éléments* furent longtemps considérés comme un modèle de rigueur qui établit tout l'édifice mathématique à partir de quelques prémisses appelées axiomes et postulats, et progresse de théorème en théorème à l'aide de déductions logiques. Le cinquième postulat, dit postulat des parallèles, sera une source de travaux pour deux mille ans, jusqu'à l'invention des géométries non euclidiennes. Les quatre premiers livres traitent des grandeurs géométriques, avant que soient définis les rapports de grandeurs dans le cinquième livre, et que cette théorie des rapports en géométrie plane soit utilisée dans le sixième. Les livres sept, huit et neuf sont des livres d'arithmétique. Le livre dix porte sur la question de l'irrationalité. Les livres onze douze et treize sur la géométrie des solides.

Le théorème de *Pythagore* dans les Éléments

Le théorème dit de *Pythagore* est la proposition 47 du livre 1. *Dans un triangle rectangle, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui*

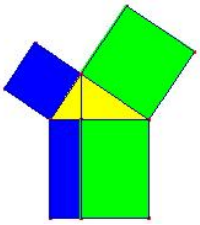
[6] Les membres les plus connus en sont *Pythagore* (-580), *Philolaus* (-400), *Archytas* (-428, -347), beaucoup plus tard *Nicomaque* et *Proclus* sont proches des conceptions pythagoriciennes.

[7] *Caveing*, Euclide dans *Noël*, *Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques*.

[8] *Euclide, Les Éléments,* traduction *Peyrard* ; *Euclide Les Éléments,* traduction *Vitrac* ; *Euclid The Elements,* traduction *Heath*

[9] D'autres auteurs avant lui ont rédigé des *Éléments* synthétisant les connaissances mathématiques de leur temps : *Eudoxe, Théétète,* etc. Ces livres sont perdus. Il est tout à fait sûr qu'ils se retrouvent dans ceux d'*Euclide* et la recherche historique a permis d'attribuer dans les *Éléments* différents livres à ces auteurs.

comprennent l'angle droit.



Dans un triangle rectangle, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Nulle part ne se trouve le nom de *Pythagore* chez *Euclide*. Le théorème qui porte ce nom, la proposition 47 et sa réciproque, la proposition 48 sont les deux dernières propositions du livre 1. Pour nous, cet énoncé est un énoncé entre des nombres : on mesure les trois côtés, on calcule le carré de chacun des nombres et le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux côtés de l'angle droit. Rien de tel dans le texte euclidien qui est une *égalité* de surfaces. En fait, on démontre que le carré sur l'hypotènuse se partage à l'aide de la hauteur relative à cette hypoténuse en deux rectangles "égaux" aux carrés sur les côtés de l'angle droit.

Les pré-requis de la démonstration

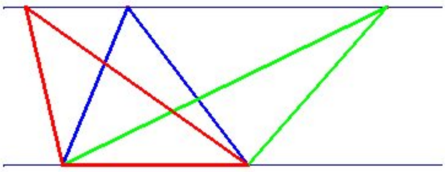
La justification de la construction du carré

La proposition 46 du livre 1 sert à justifier la construction classique d'un carré de côté donné : *Décrire un carré au moyen d'une ligne donnée.*

L'"égalité" de triangles

Les propositions 4, 8 et 26 établissent les cas de congruences de triangles appelés "cas d'égalité" dans la littérature classique. La proposition 4 établit que *Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.* Cette proposition est utilisée dans la démonstration de la proposition 47.

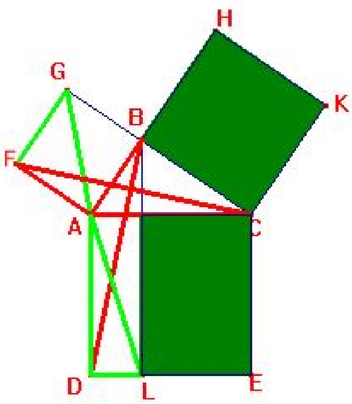
Pour la démonstration de la proposition 47, *Euclide* fait appel, en dehors de la proposition 4, à la Proposition 37, très utilisée par *Euclide* : *Les triangles qui sont entre les mêmes parallèles et qui ont la même base sont égaux.* Ici, il importe de comprendre que la notion d'égalité en jeu recouvre ce que nous appelons égalité d'aire et non une congruence ou isométrie de triangles. Elle se prouve par des démonstrations analogues à des découpages. Nulle part dans *Euclide,* ne se trouve écrite une formule de calcul d'aire.



Proposition 37
Les triangles qui sont entre les mêmes parallèles et qui ont la même base sont égaux.

La démonstration d'*Euclide*

On construit un carré sur chacun des côtés du triangle rectangle ABC. Soient les carrés $ABGF$, $BCKH$, $ACED$. Avec des critères définis précédemment, on montre que le carré construit sur l'hypoténuse peut être découpé par la perpendiculaire BIL au côté DE en deux rectangles égaux aux carrés construits sur les côtés. On montre par la proposition précédente que les triangles AFG et AFC sont égaux ; puis que ABD et ALD sont égaux. Enfin à l'aide d'un des cas d'égalité des triangles sur les deux triangles AFC et ABD sont égaux. Ceci montre l'égalité du carré $ABGF$ et du rectangle $AILD$.



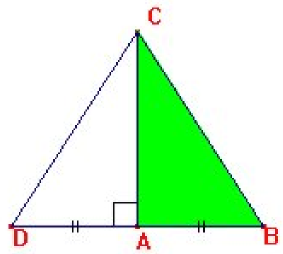
Proposition 47
Dans un triangle rectangle, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

La proposition 48

Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les côtés restants du triangle est droit.

C'est la réciproque de la proposition précédente. La démonstration est une démonstration qui utilise le théorème direct. Si $BC^2 = AC^2 + AB^2$, on mène à angle droit à l'extérieur de ABC un segment AD égal à AB, en appliquant le théorème 47 on montre $CD^2 = AD^2 + AC^2$ et on déduit l'égalité de CD et CB

et celle des triangles ADC et ABC qui ont leurs cotés égaux, et donc que l'angle en A du triangle ABC est droit.

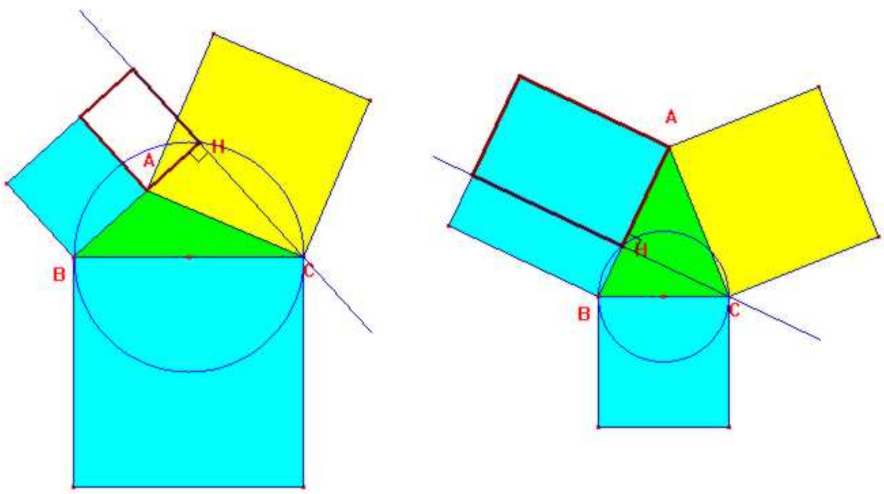


Proposition 48
Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les côtés restants du triangle est droit.

Les prolongements du livre 2

Dans le livre 2, *Euclide* pose le problème de carrés construits sur les côtés d'un triangle quelconque. Il énonce les deux résultats suivants.

Proposition 12 *Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au delà de l'angle obtus.*



Proposition 13 *Dans les triangles acutangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle aigu est plus petit que les carrés sur le côtés contenant l'angle aigu de*

deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée par la perpendiculaire en deçà de l'angle aigu.

Activité de découverte

Ce résultat donne l'idée d'une activité de découverte du théorème de *Pythagore*à l'aide de calculatrice supportant des animations géométriques ou d'un ordinateur. On construit des carrés sur les côtés d'un triangle quelconque, ABC. On fixe les points A et C. On cherche les points B tels que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (en faisant varier B sur une perpendiculaire à AC d'abord).

4 Les commentaires de *Proclus*

Celui-ci écrivit au cinquième siècle de notre ère un commentaire sur le premier livre des Éléments qui contient beaucoup d'indications historiques sur les mathématiques grecques. Nous nous intéresserons ici exclusivement à son commentaire des propositions 46, 47 et 48.

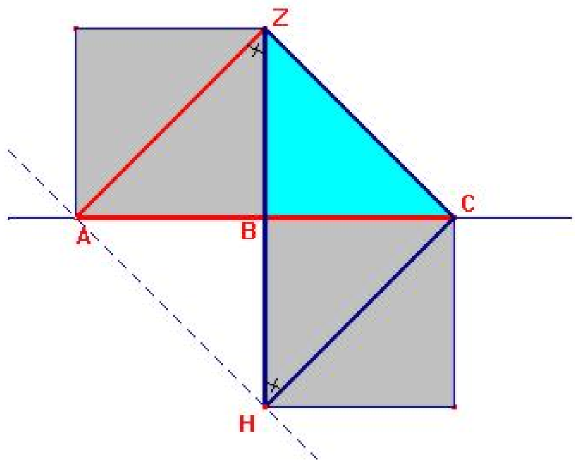
Commentaire de la proposition 46

> *Euclide avait éminemment besoin de ce problème pour organiser celui qui va suivre. Mais il semble toutefois avoir voulu nous transmettre la genèse des deux meilleures figures rectilignes : le triangle équilatéral et le carré en raison, sans doute, de leur emploi dans la structure des corps cosmiques et principalement de quatre d'entre eux dont ces figures sont la genèse et la résolution. En effet, l'icosaèdre, l'octaèdre et la pyramide se composent de triangles et le cube de carrés, et c'est, nous semble-t-il la raison pour laquelle il a d'abord constitué le triangle et décrit le carré. Il a, du reste, imaginé ces expressions comme convenant à ces figures : l'une ayant besoin d'une constitution en tant que réalisant un assemblage de plusieurs côtés, l'autre d'une description en tant qu'engendrée par un seul et même côté.*

Ce commentaire souligne l'importance des solides polyèdres réguliers et l'on a pu dire que la justification de leur construction était l'objectif du livre treize des Éléments d'*Euclide*. La suite du commentaire de la proposition 46 du livre 1 insiste sur une distinction pour nous peu évidente entre le triangle équilatéral construit dans la proposition 1 du livre 1 et celle du carré décrit dans la proposition 46 (qui nécessite la théorie des parallèles).

> *D'ailleurs, nous obtenons le triangle, non pas de la même manière que le carré en multipliant par lui-même le nombre d'une droite donnée, mais en menant les droites de jonction d'un autre lieu sur les extrémités d'une droite, nous composons au moyen de ces droites un seul triangle équilatéral, et une description de cercles contribue à trouver le point d'où les droites de jonction doivent être menées sur les extrémités de la droite donnée.*

Ensuite, *Proclus* ajoute deux démonstrations, l'une pour montrer que des carrés construits sur des droites égales sont égaux (en montrant l'égalité de triangles moitié des carrés) mais aussi pour justifier une réciproque, que si deux carrés sont égaux, ils sont construits sur des droites égales. Ce texte est important car la figure présentée par *Proclus* a été présentée comme une source possible du résultat de *Pythagore* dans le cas d'un triangle rectangle isocèle. Pour nous, il est difficilement compréhensible si on ne se souvient pas que la notion de carrés égaux ou de figures égales représente l'égalité des aires.



Si des carrés sont égaux leurs côtés sont égaux.

> *Soient AZ, CH des carrés égaux et disposons les de manière que la droite AB soit dans la direction de la droite BC. Dès lors, les angles étant droits, la droite ZB est aussi dans la direction de la droite BH. Menons les droites de jonction ZC, AH. En conséquence, puisque le carré AZ est égal au carré CH, le triangle AZB est aussi égal au triangle CBH. Ajoutons de part et d'autre le triangle BZC ; il s'ensuit que le triangle entier ACZ est égal au triangle entier CZH ; donc la droite AH est parallèle à la droite ZC. ...*

Ici *Proclus* utilise le résultat de la proposition 37 qui dit que deux triangles égaux ayant la même base sont entre les mêmes parallèles.

> *Derechef, puisque l'angle compris sous les droites AZ, ZH est la moitié d'un angle droit ainsi que l'angle compris sous les droites CH, HB, la droite AZ est parallèle à la droite CH ; donc la droite AZ est égale à la droite CH, vu que ces droites sont les opposées d'un parallélogramme. Dès lors, puisque les droites AZ, CH étant parallèles, on a deux triangles ABZ, BCH ayant les angles opposés égaux et un côté AZ égal au côté CH, il s'ensuit que le côté AB est aussi égal au côté BH et le côté BZ au côté BH. Il est donc démontré que, si les carrés AZ, CH sont égaux, les côtés au moyen desquels ils sont construits sont égaux aussi.*

Proclus et les propositions 47 et 48

> *Dans les triangles rectangles, le carré décrit au moyen du côté qui sous-tend l'angle droit équivaut aux carrés décrits au moyen des côtés qui entourent l'angle droit.*

> *À entendre ceux qui prétendent nous rapporter des choses anciennes, on les trouve attribuer ce théorème à* Pythagore *et dire qu'il sacrifia un bœuf à l'occasion de sa découverte.*

Le seul témoignage antérieur à notre ère qui nous soit parvenu sur *Pythagore* est un distique d'*Appollodore* de Cyzique, disciple de *Démocrite* vivant au quatrième siècle avant notre ère.

> *Pythagore inventant la célèbre figure*
> *offrit une victime et rendit grâce aux dieux*

Il est cité par *Plutarque*, (premier siècle de notre ère), et *Diogène Laërce*, (troisième siècle). *Vitruve* quant à lui attribue la découverte du triplet $(3, 4, 5)$ à *Pythagore* et en fait l'occasion du sacrifice.

> *Quand Pythagore eut fait cette découverte, il ne douta pas qu'elle ne lui eut été inspirée par les muses, et l'on dit qu'en action de grâces, il leur fit un sacrifice.*

Proclus est sceptique, peut-être parce que ce sacrifice est en contradiction avec les moeurs végétariennes de la secte pythagoricienne.

> *Mais pour ma part, j'admire ceux qui se sont appliqués les premiers à la vérité de ce théorème, et je loue encore plus l'Auteur des Éléments, non seulement pour nous avoir convaincus de ce théorème par la démonstration la plus claire, mais pour nous avoir persuadés d'un théorème plus général que celui-ci par les raisonnements irréfutables de la science dans son sixième livre.*

C'est à peu près tout ce que dit *Proclus* sur le théorème 47. On voit donc qu'il attribue à l'auteur des Éléments la démonstration de la proposition. Ceci a alimenté deux types de discussions :

- Quelles furent les découvertes de *Pythagore* ?
- Quelle a été la démonstration fournie par *Pythagore* pour le résultat connu sous son nom ?
- Quelles sont les méthodes de démonstration antérieures à celles d'*Euclide* ?

5 Les généralisations du théorème de *Pythagore*

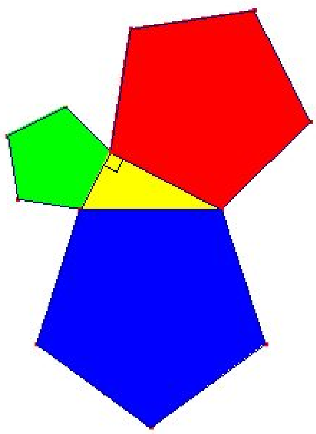
La généralisation d'*Euclide*

Quel est donc le résultat, généralisation de la proposition 47 du livre 1, admiré par *Proclus* ?

La proposition 31 du livre 6 des Éléments

Dans les triangles rectangles, la figure sous-tendant l'angle droit est égale aux figures sur les côtés de l'angle droit, semblables et semblablement décrites.

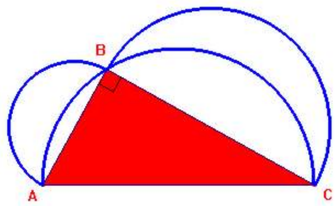
Ce théorème repose sur le fait que les aires des figures semblables sont entre elles comme les carrés du rapport des cotés. Dans le livre 6, il porte sur des figures rectilignes, mais il se généralise à des figures semblables quelconques.



Proposition 31
Si des figures semblables sont construites sur les côtés d'un triangle rectangle, celle sur l'hypoténuse "est la somme" de celles sur les côtés de l'angle droit.

Avec ce théorème, on retrouve un résultat sur les lunules, les aires des demi-cercles étant proportionnelles aux carrés des diamètres.

Les lunules d'Hypocrate



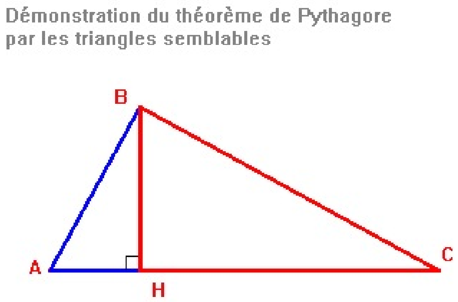
L'aire des deux lunules est égale à l'aire du triangle

Un cas particulier de figures semblables est constitué de demi-disques. On en déduit que les lunules sont "égales" au triangle rectangle.

Le commentaire de *Proclus*

> (L'Auteur des Éléments) *démontre dans ce théorème-là, que dans les triangles rectangles, la figure décrite au moyen du côté qui sous-tend l'angle droit équivaut aux figures semblables et semblablement décrites au moyen des côtés placés autour de l'angle droit. En effet, tout carré est semblable à un carré, tandis que toutes les figures semblables entre elles ne sont pas des carrés ; car il y a de la similitude dans les triangles et dans d'autres polygones. C'est pourquoi le raisonnement qui démontre que la figure carrée ou telle autre qu'on voudra, décrite au moyen du côté qui sous-tend l'angle droit, équivaut aux figures semblables et semblablement décrites au moyen des côtés situés autour de l'angle droit, fait voir quelque chose de plus général et de plus savant que le raisonnement qui prouve que le carré seul équivaut aux carrés. C'est en effet là que, du fait même de la démonstration générale, il devient manifeste que la rectitude de l'angle confère à la figure décrite au moyen du côté qui sous-tend cet angle l'équivalence à toutes les figures semblables et semblablement décrites au moyen des côtés qui entourent cet angle, de même que l'état obtus de cet angle confère un excédent et son état aigu un défaut.*

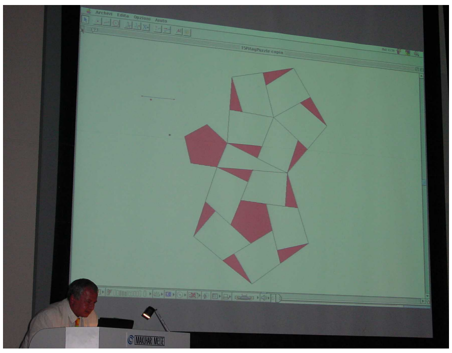
Proclus continue par une remarque sur l'usage des similitudes pour démontrer le théorème dit de *Pythagore* en soulignant que ce type de démonstration n'était pas possible à la fin du livre 1. Par contre, on verra que certains historiens pensent que telle était une des démonstrations possibles donnée par *Pythagore*.

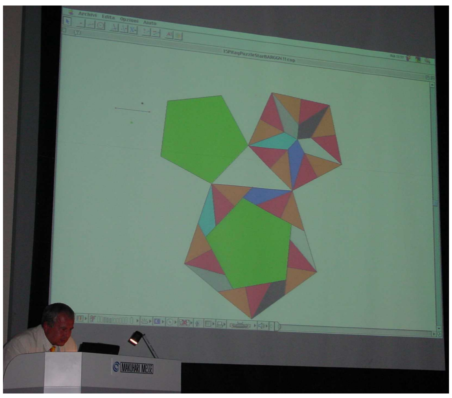


*On utilise la similitude des triangles ABC, BHC et AHB pour écrire AH/AB = AB/AC et HC/BC = BC/AC ; ensuite on utilise AC = AH + HC pour déduire (AH + HC)*AC = AB*AB + BC*BC et le résultat cherché.*

> *C'est donc là que se manifestera la manière dont se démontre le théorème qui se trouve dans le sixième livre et nous remarquerons comment se justifie ici le présent théorème si nous ajoutons que le théorème général n'avait pas à être démontré par qui n'avait encore rien enseigné sur la similitude des figures ni absolument rien démontré sur les proportions ; car c'est par cette voie que beaucoup de choses qui nous sont démontrées ici d'une manière particulière se démontrent de manière plus générale. L'Auteur des Éléments démontre donc actuellement ce qui est mis en question en partant de la considération vulgaire des parallélogrammes...*

Ces deux belles figures de décompositions ont été présentées au colloque ICMI 2000 de Kokyo.



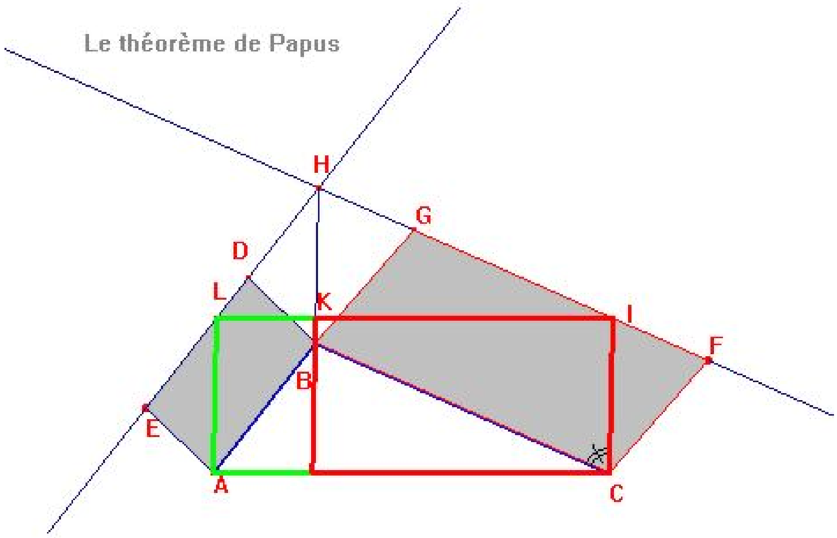


Il faut cependant remarquer que ni la première décomposition ni la seconde ne sont générales. Elles sont valables pour un cas particulier de triangle rectangle.

La généralisation faite par *Pappus*

Dans sa *Collection mathématique* livre IV proposition 1 propose la généralisation suivante.

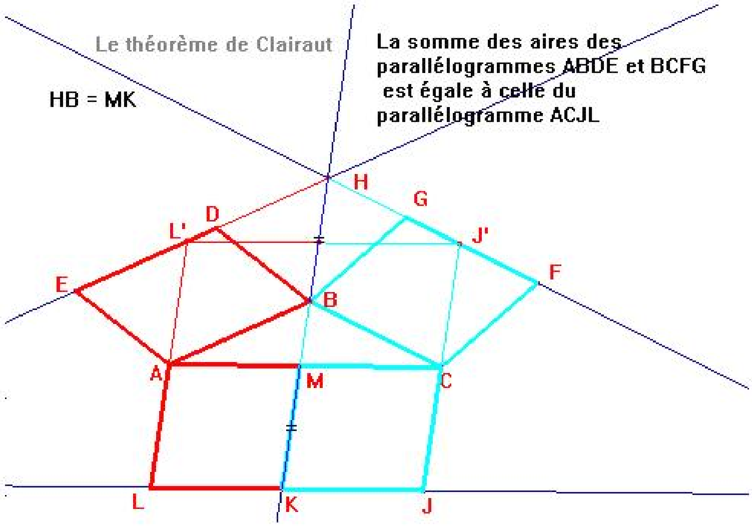
> *Si dans un triangle ABC, on décrit sur les côtés AB, BC des parallélogrammes quelconques $ABDE$ et $BCFG$; si les droites DE et FG se coupent en H et qu'on mène la droite HB ; les parallélogrammes $ABDE$, $BCFG$ deviennent équivalents à celui qui est entouré par les droites AC, HB dans un angle égal à la somme des angles compris sous les droites BA, AC et sous les droites DH, HB.*



La généralisation de *Clairaut*

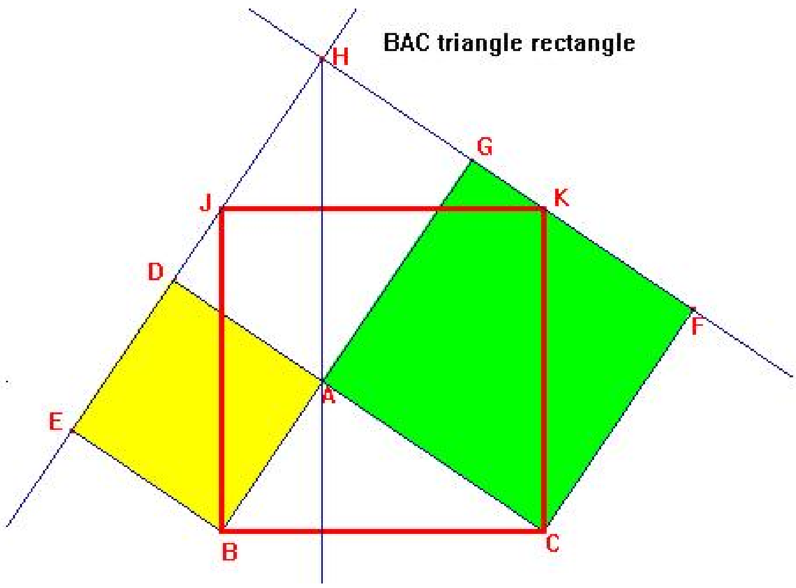
Clairaut a proposé une variante du théorème de *Pappus*. La condition donnée sur les angles est remplacée par une égalité de longueur.[10] *Clairaut* utilise à peu près le même point de départ que *Papus*. Toutefois le parallélogramme contruit sur AC est porté à l'extérieur du triangle ABC et est défini par un report de longueur.

[10] Voir la séquence du site intitulée ... ainsi qu'une applet sur ce thème sur le site de Lilimath



Cas particulier du triangle rectangle

La configuration de *Pappus* fournit une nouvelle démonstration du théorème de *Pythagore* avec la configuration suivante.



6 *Proclus* sur *Pythagore*

La suite du commentaire de *Proclus* sur le théorème de *Pythagore* est intéressante, car elle montre les idées associées par *Proclus* au nom de *Pythagore*.

Proclus sur le triangle rectangle (3, 4, 5)

> *Or les triangles rectangles étant de deux genres, les isocèles et les scalènes, on ne trouvera jamais des nombres qui s'ajustent aux côtés dans les triangles isocèles ; car il n'y a pas de nombre carré double d'un nombre carré, à moins qu'on ne parle d'un nombre approché, et en effet, le carré du nombre 7 est le double du carré de 5 à moins d'une unité. D'autre part, il est possible de trouver dans des triangles scalènes des nombres qui nous montrent d'une manière évidente que le carré du côté qui sous-tend l'angle droit équivaut aux carrés des côtés situés autour de cet angle droit. C'est ainsi que le triangle se comporte dans la* La République [11] *où les nombres 3 et 4 comprennent l'angle droit et où le nombre 5 le sous-tend. Le carré de 5 y est donc équivalent aux carrés de ces nombres, car ce carré est 25 et les carrés des autres nombres sont 9 celui de 3 et 16 celui de 4.*

Proclus sur les triplets pythagoriciens

Il s'agit de caractériser les entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Si on revient à la représentation des nombres carrés figurés, cette situation se produit quand le gnomon est lui même un nombre carré.

> *Ce que nous venons de dire est donc évident dans les nombres. Or certaines méthodes pour découvrir de tels triangles nous ont été transmises, et l'on fait remonter l'une à Platon, l'autre à Pythagore. La méthode pythagoricienne part des nombres impairs, pose le nombre impair donné comme étant le plus petit des côtés situés autour de l'angle droit et, après avoir pris le carré de ce nombre et en avoir retranché une unité, pose la moitié du nombre restant comme étant le plus grand des côtés situés autour de l'angle droit, et forme enfin le côté restant, qui sous-tend, après avoir ajouté aussi une unité à ce nombre. Ainsi, par exemple, si après avoir pris 3, l'avoir carré et en avoir retranché une unité, l'on prend 4, moitié de 8 et si on lui ajoute de nouveau une unité, on forme 5 et l'on trouve la triangle rectangle ayant un côté de 3 unités, un autre de 4 unités et un autre de 5 unités.*

Proclus attribue à *Pythagore* la formule : si N donné est un nombre impair, alors les nombres suivants forment un triplet pythagoricien :

$$N, \qquad \frac{N^2-1}{2}, \qquad \frac{N^2+1}{2}$$

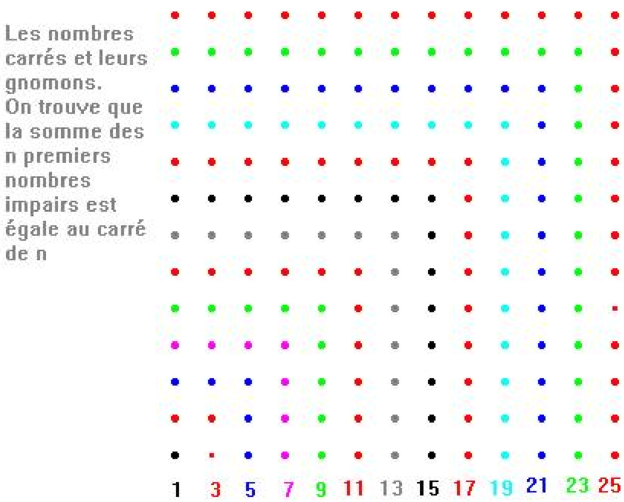
[11] de *Platon*

D'autre part, la méthode platonicienne procède en partant de nombres pairs. En effet, prenant le nombre donné pair, elle le pose comme étant un des côtés de l'angle droit, le divise en deux parties égales, carre la moitié, puis forme le côté qui sous-tend l'angle en ajoutant une unité à ce carré et forme l'autre côté situé autour de l'angle droit en retranchant une unité de ce carré. Ainsi, par exemple, ayant pris le nombre 4, ayant carré sa moitié 2 et formé 4, si l'on retranche une unité, on forme 3, et, en ajoutant une unité, on forme 5 et obtient le même triangle produit par l'autre méthode ; car le carré de ce dernier nombre est égal à la somme des carrés de 3 et 4.

Proclus attribue à *Platon* la formule : si N un nombre pair donné, alors les nombres suivants forment un triplet pythagoricien :

$$N, \qquad (\frac{N}{2})^2 - 1, \qquad (\frac{N}{2})^2 + 1$$

Usage du gnomon On peut établir ces formules à l'aide des représentations figurées.



Le gnomon qui permet de passer d'un carré de côté n au suivant de côté $n+1$ vaut $2n+1$. En imposant qu'il soit un carré N^2, on obtient la première formule. Le gnomon qui fait passer de n^2 à $(n+2)^2$ vaut $2n+1+2n+3$, donc $4n+4$. En imposant qu'il soit un carré N^2, on obtient la deuxième formule. L'hypothèse avancée par les historiens est plutôt qu'on part d'un carré, qu'on ajoute et qu'on retranche une unité au côté.

Bilan sur les triplets Les connaissances grecques sur les triplets pythagoriciens étaient moins avancées que celles des babyloniens, qui savaient trouver d'autres triplets que ceux-là.

7 Recherches historiques

Le commentaire de *Proclus* associe au théorème dit de *Pythagore* une discussion sur les triangles rectangles en nombres entiers et une mention des questions d'irrationalité. Tous les auteurs de l'antiquité attribuent la découverte de la question de l'irrationalité aux pythagoriciens.

L'irrationalité

Les pythagoriciens voyaient dans le nombre entier le principe de base de l'univers. La découverte dans cette école de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, (l'irrationalité de $\sqrt{2}$), a provoqué une crise philosophique. La légende dit que son auteur probable (sans doute vers -500), *Hippasus* de Métapont se serait noyé ou aurait été jeté par dessus bord d'un navire en punition de la rupture du secret. On ne dispose d'aucune trace précise de la découverte de l'incommensurabilité de lignes. On a seulement des témoignages de commentateurs *Pappus*, *Proclus* et *Iamblicus* qui écrivent plus de sept siècles après les faits. *Pappus* la situe dans la secte pythagoricienne à propos de la diagonale du carré, et l'attribue à *Hyppasius*, *Proclus* l'attribue à *Pythagore*. *Iamblicus* situe cette découverte des irrationnelles non pas pour la diagonale du carré, mais pour le partage d'un segment en extrême et moyenne raison, c'est à dire à propos du nombre d'or. Les textes de *Platon* et d'*Aristote* plus proches des pythagoriciens la situent dans la secte pythagoricienne et parlent de la diagonale du carré.

Aristote dit que si la diagonale était commensurable avec le côté, alors un même nombre serait pair et impair. On suppose que la diagonale et le côté sont commensurables, et que l'unité de longueur est contenue m fois dans la diagonale et n fois dans le côté, les entiers m et n n'étant pas tous les deux pairs car sinon on utiliserait une unité double. D'après le théorème de *Pythagore*, on a $m^2 = 2n^2$, ce qui montre que m^2 est pair et donc que m est pair. En posant $m = 2m'$ et en reportant dans l'égalité, on obtient en simplifiant par 2 l'égalité $2m'^2 = n^2$ qui montre que n est pair et ceci est en contradiction avec l'hypothèse que m et n ne sont pas tous les deux pairs. Cette démonstration n'utilise que des connaissances arithmétiques des pythagoriciens.

Doubler le carré

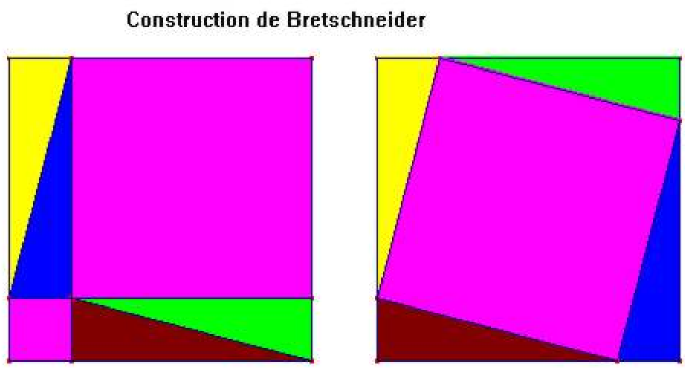
Platon a joué un grand rôle pour les mathématiques grecques en systématisant les règles de démonstration et en insistant sur les preuves et les démonstrations comme caractéristiques de l'activité mathématique. Le dialogue de *Platon «Le* Ménon» entre *Socrate* et *Ménon* montre que le doublement du carré était familier et bien connu à son époque. *Socrate*, pour prouver à *Ménon* ses conceptions sur la connaissance, (on n'apprend rien, on redécouvre des connaissances antérieures,) fait réaliser le doublement d'un carré par un jeune esclave. Cette figure où *Socrate* fait découvrir le rôle d'un diagonale du carré initial comme côté fournit un cas particulier du théorème de *Pythagore*.

Sur la démonstration faite par *Pythagore*

Si les historiens des mathématiques ne sont d'accord, ni sur la découverte de *Pythagore*, ni sur sa méthode de démonstration, tous s'accordent pour reconnaître à *Euclide* la paternité de la démonstration du livre 1 des Éléments.

Pour la découverte faite par *Pythagore*, la plupart des historiens pensent que sur la base du cas particulier du triangle rectangle isocèle et du triangle rectangle $(3, 4, 5)$, le résultat général a été énoncé. Mais on sait aussi maintenant que mille ans avant *Pythagore* ce résultat était utilisé dans des problèmes babyloniens.

Par ailleurs, les auteurs divergent sur la nature de la démonstration faite par *Pythagore*. Il y a essentiellement deux hypothèses.



– Une démonstration par découpage ou puzzles du même type que les démonstrations faites par les indiens. La propositions la plus connue est celle de Bretschneider.
– Une démonstration utilisant des similitudes de triangles rectangles entre un triangle et les triangles rectangles définis par la hauteur relative à l'hypoténuse. Si ABC est un triangle rectangle en A et AH la hauteur relative à l'hypoténuse BC la similitude des triangles ABC, HAC et HAB permet de déduire le théorème de *Pythagore* en écrivant

$$BA^2 = BH.BC \qquad AC^2 = CH.BC \qquad BC = BH + HC$$

Toutefois, l'hypothèse avancée par les historiens dans ce deuxième cas est celle d'une démonstration incomplète avec uniquement des rapports d'entiers. Les pythagoriciens faisaient initialement l'hypothèse que deux lignes quelconques étaient commensurables et après la découverte de l'irrationalité, ils n'étaient pas en possession d'une théorie générale des rapports de grandeurs.

Le théorème dit de *Pythagore* dans d'autres civilisations

8 Dans les mathématiques babyloniennes

Certaines tablettes prouvent que le résultat que nous connaissons sous ce nom était connu des Babyloniens un millier d'années avant *Pythagore*.

Le théorème de *Pythagore*

Dans une tablette datée d'environ -1700 figure le problème suivant : une poutre de longueur $0;30$[12] est placée contre un mur, de même hauteur (d). Son extrémité supérieure glisse et descend de $0;6$ ($d-h$). À quelle distance du mur (b) se trouve maintenant son extrémité inférieure ? Le calcul de b est fait en calculant $\sqrt{d^2 - h^2}$. Le même problème, sous des formes variées se retrouve jusqu'à nos jours, et était un problème classique dans les textes arabes.

Les triplets pythagoriciens

Une autre tablette [13] tout à fait remarquable présente des listes de nombres entiers appelés triplets pythagoriciens, c'est à dire de triplets d'entiers solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Cette tablette est le plus ancien document connu de théorie des nombres [14]. Elle fut écrite entre -1900 et -1600. Les nombres qui figurent sur cette tablette excluent une découverte par hasard. Voici par exemple les nombres[15] qui figurent sur les quatre premières lignes :

119	120	169
3367	3456	4825
4601	4800	6649
12709	13500	18541

[12] Les nombres sont ici écrits en base 60

[13] Plimpton 322.

[14] *Van der Waerden, Science awakening , Delire, Des mathématiques babyloniennes à l'arithmétique pythagoricienne : la tablette cunéiforme Plimpton 322,* et *Neugebauer Les sciences exactes dans l'antiquité.*

[15] écrits en base 10

Il n'a pas été possible de retrouver la formule générale qui a servi à établir cette tablette ; différentes hypothèses ont été avancées sans qu'il soit possible de trancher avec certitude. On sait que les Grecs très tardivement et les Arabes connaissaient une telle formule :

$$x = 2pq, \quad y = p^2 - q^2, \quad z = p^2 + q^2$$

avec p et q entiers, pour des nombres x, y, z premiers entre eux.

Les Babyloniens disposaient plus de mille ans avant d'un algorithme assez général pour trouver de nombreux triplets pythagoriciens. Par contre, *Pythagore* n'a disposé que de deux formules donnant des cas particuliers de triplets.

Neugebauer suppose, en raison de la présence d'une colonne qui écrit des rapports du type $\frac{z}{x}$ variant de façon régulière, que les Babyloniens connaissaient la formule générale précédente et l'utilisaient de la façon suivante :

$$\frac{z}{x} = \frac{p^2 + q^2}{2pq} = \frac{1}{2}(p \times \bar{q} + q \times \bar{p})$$

en désignant par $\bar{p}$ l'inverse de p. Ils auraient alors choisi des valeurs de p et q dont ils pouvaient connaître l'inverse en sexagésimal. Cependant cette interprétation est contestée par d'autres spécialistes et les Babyloniens n'ont laissé aucune trace de la formule ou de la méthode qu'ils ont employée pour établir cette table.

Calcul de $\sqrt{2}$

Une tablette [16] donne une valeur approchée très précise de $\sqrt{2}$. Sur un carré sont dessinées les deux diagonales. Sur un côté figure le nombre 30. Au dessus de la diagonale le nombre $1; 24, 51, 10$; au dessous de la diagonale figure le nombre $42; 25, 35$. Si nous calculons les valeurs décimale de ces nombres nous obtenons :

$$1; 24, 51, 10 \approx 1,414\,212\,9, \qquad \text{or} \qquad \sqrt{2} \approx 1,414\,213\,5$$

$$30 \times (1; 24, 51, 10) = 42; 25, 35$$

Cette valeur de $\sqrt{2}$, d'une précision tout à fait étonnante pour l'Antiquité, n'était pas toujours utilisée dans les tablettes babyloniennes. Souvent la valeur approchée $1; 25$ était utilisée.

De ces exemples, nous pouvons conclure que le résultat connu sous le nom de théorème de *Pythagore* était connu plus d'un millier d'années avant *Pythagore* et que les Babyloniens possédaient une méthode efficace de calcul des racines que nous allons présenter maintenant.

[16] YBC 7289, voir *Pichot* page 105.

Méthode de calcul de racines

Soit à calculer $\sqrt{A}$. Si l'on utilise une valeur approchée a plus grande que $\sqrt{A}$, la valeur $\frac{A}{a}$ sera plus petite que $\sqrt{A}$ et si l'on utilise une valeur approchée a plus petite que $\sqrt{A}$, la valeur $\frac{A}{a}$ sera plus grande que $\sqrt{A}$. En prenant la valeur

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$$

on peut espérer obtenir une meilleure approximation que a. En itérant le procédé, on obtient des valeurs de plus en plus précises. Ce procédé est essentiellement le même que celui qui sera employé plus tard par les Grecs et les Arabes, et connu sous le nom d'algorithme de Babylone ou de *Héron* (mathématicien grec).

Nous utilisons encore cet algorithme, dont on peut montrer qu'il converge vers la racine cherchée rapidement, en moyenne quadratique, c'est-à-dire que le nombre de chiffres décimaux exacts double à chaque pas d'itération. Sans fournir une démonstration, les Babyloniens connaissaient cette convergence et l'utilisaient pour le calcul de racines. Si on fait le calcul de $\sqrt{2}$ par cette méthode à partir de $a = 1$, on obtient la valeur inscrite sur la tablette à la quatrième approximation.

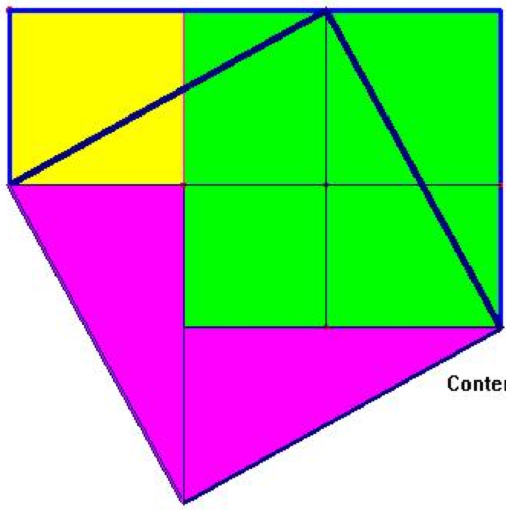
9 Dans les mathématiques égyptiennes

Si l'on pense que l'usage du triangle 3, 4, 5 était connu des égyptiens, on n'a pas de preuve de la connaissance du théorème sur l'hypoténuse du triangle rectangle.

10 Dans les mathématiques indiennes

Heath discute longuement du calcul de la diagonale du rectangle. De études récentes montrent que le résultat de *Pythagore* figure dans des traités de science du construction des autels connue sous le nom de *Sulba-Sastra* et qui signifie mesurer (Sulba=cordeau) et en même temps tracer une ligne droite. Le premier savant indien connu qui ait laissé son nom associé au théorème de l'hypoténuse est *Baudhayana*, auteur d'un célèbre traité *Sulba-Sutra* qui date de -800. [17]. Les justifications associées à cette figure sont des puzzles tels le puzzle de *Bhaskara*

[17] D'après *Soucé Antoine Pitchaya* Les sciences dans la pensée indiennes, actes du colloque *L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoise, européennes et indiennes* édité par l'IUFM de la Réunion (1997)



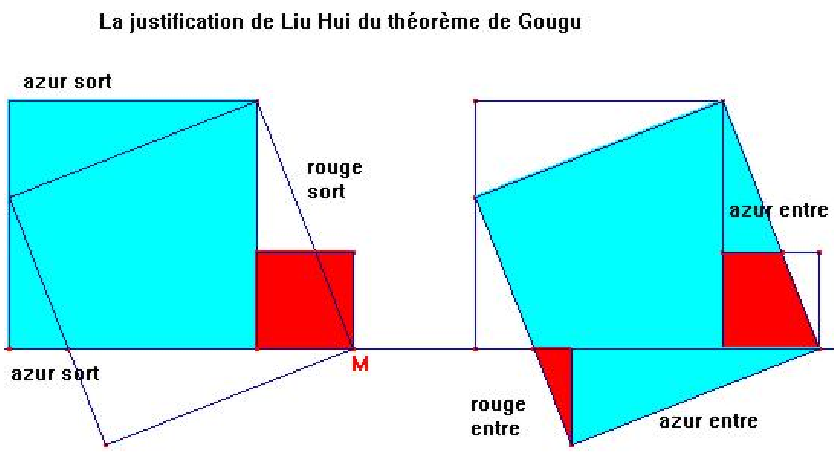
11 Dans les mathématiques chinoises

Le théorème de *Gougu*

Le théorème dit de *Pythagore* est toujours désigné par théorème de *Gougu* dans les mathématiques chinoises. Dans le premier livre connu des mathématiques chinoises "Zhoubi suanjing" datant du deuxième siècle avant notre ère, est énoncé le cas particulier du triangle (3, 4, 5), puis l'énoncé général et de nombreuses applications avec la remarque que l'empereur légendaire *Yu* pouvait mesurer le pays grâce à ce résultat.

Sa preuve

Le théorème de *Gougu* figure aussi dans le plus grand traité antique de mathématiques chinoises, le traité "JiuZhang SuanShu" et dans un commentaire sur ce traité, le mathématicien *Liu Hui* explique comment prouver que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés de la "base" et de la "perpendicule " par la phrase dont la traduction est la suivante.



Démonstration de Liu Hui

Base automultipliée fait le carré rouge ; perpendicule automultipliée fait le carré azur. Appliquons-leur (la technique qui consiste à) "enlever et mettre de manière à procéder à un rapiéçage mutuel en respectant les catégories qui sont les leurs. Profitons du fait que le reste ne bouge pas, formons la surface de l'hypoténuse.

La figure géométrique nécessaire à la compréhension de ce texte est perdue, mais il est clair qu'il s'agit d'une technique de puzzle. On peut utiliser le puzzle suivant qui éclaire bien l'énoncé.

Les calculs utilisant cette figure

La figure de l'équerre se retrouve dans les textes de *Liu Hui* et désigne la même chose que le gnomon des mathématiques grecques. Elle désigne ici la différence de deux carrés. Et permet à partir de la formule $a^2+b^2=c^2$, d'obtenir la propriété $a^2=c^2-b^2$. La figure de l'hypoténuse permet d'obtenir l'équivalent de nos deux identités algébriques :

$$(a+b)^2=(b-a)^2+4ab \quad \text{et} \quad c^2=(b-a)^2+4ab/2$$

Différentes démonstrations du théorème de *Pythagore* dans l'histoire

Ce théorème se retrouve, soit à propos du calcul de la diagonale du rectangle, soit introduit par la problématique : *Comment faire un seul carré avec deux carrés donnés.* Nous distinguons essentiellement trois types de démonstrations.

– des démonstrations par similitudes de triangles telles que celle parfois attribuée à *Pythagore*

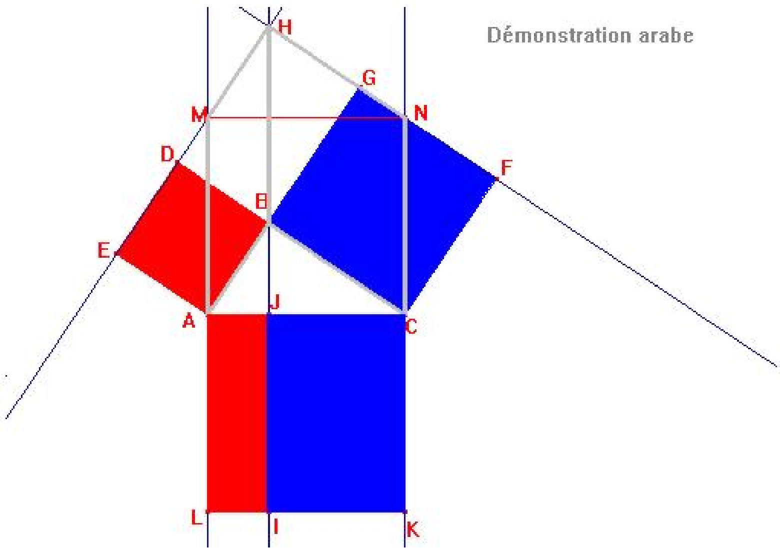
– des démonstrations utilisant les aires, dans la lignée des Éléments d'*Euclide*, ou des calculs d'aires à l'aide de formules.

– des puzzles. Certains de ces puzzles, bien que très visuels ne sont pas évidents à justifier.

Beaucoup de démonstrations différentes sont présentées dans le livre de *Curiosités géométriques* de *Fourrey*. Nous allons ici donner quelques exemples accompagnées d'animations. Pour la plupart, nous laissons au lecteur le soin des justifications. [18]

12 Les démonstrations par les aires

Une démonstration arabe



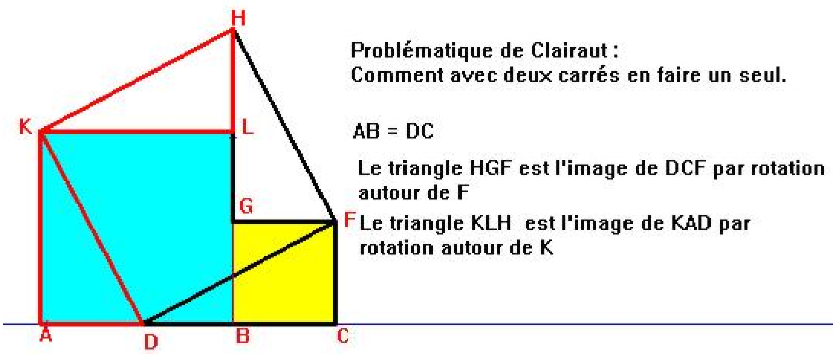
[18]Nous fournissons des applets avec une possibilité d'animation qui permet de faire bouger le sommet A.

La démontration de *Namir El Din* utilise la même configuration que celle d'*Euclide* avec des parallélogrammes de même base entre les mêmes parallèles. Le point crucial de cette démonstration est un résultat démontré par *Héron* sur la concourance de trois droites, la hauteur AJ du triangle rectangle relative à l'hypoténuse, et les droites supporant les côtés des carrés parallèles aux côtés du triangle rectangle, HI et GF. [19]

13 Les puzzles

La problématique de *Clairaut*

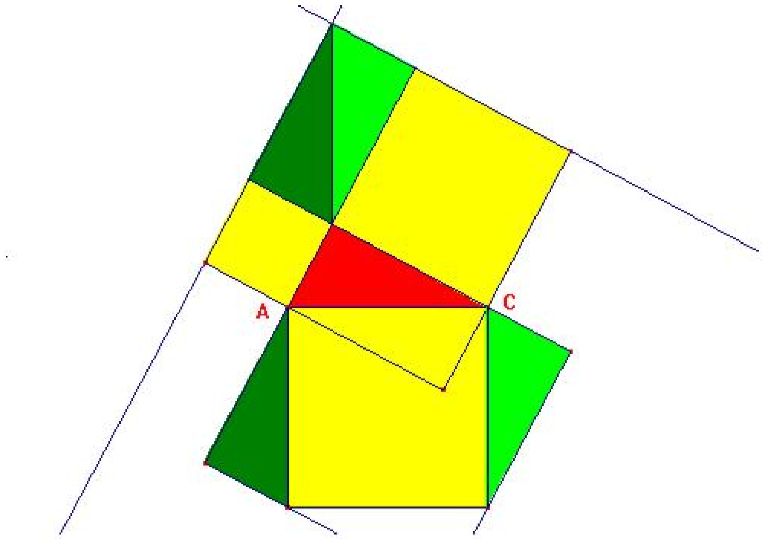
Celui-ci pose le problème de la manière suivante : Comme avec deux carrés en faire un seul. Il propose un découpage de ces carrés et des rotations de pièces. La justification de ce puzzle de Clairaut est assez aisée et laissée au lecteur.



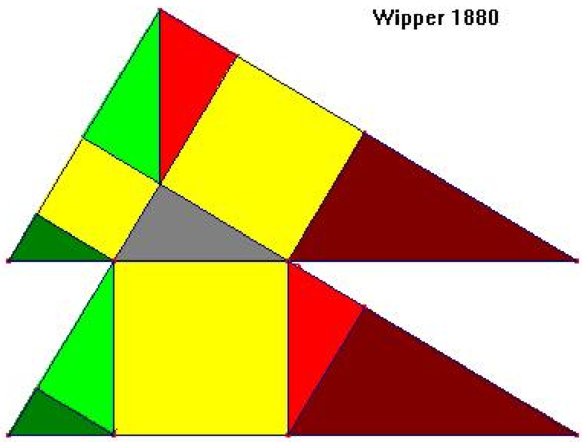
[19]Voir à la séquence proposée sur ce même site par G. Dumont

De beaux puzzles

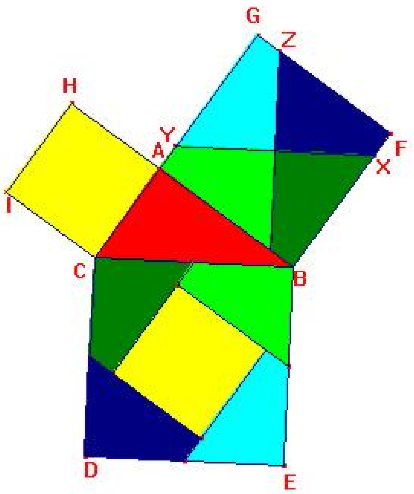
Un puzzle facile à justifier



Un autre puzzle très visuel facile à justifier



Un autre puzzle très visuel



Ce puzzle est très intéressant mathématiquement mais difficile à justifier.