LA NOTATION DES NOMBRES

La Préhistoire et ses traces

L'opération de compter est un procès symbolique propre à l'espèce humaine dont il est impossible de dater l'origine. Des dénombrements par entailles sur des os ou des bâtons précèdent les premiers vestiges d'écriture. Les mots désignant des nombres figurent parmi les premières traces d'écriture à Sumer et en Égypte.

Traces dans la langue orale : l'invention des nombres a été un processus très long dont on peut retrouver des traces dans les langues. On sait maintenant que l'invention des nombres a rencontré des obstacles :

Au niveau oral, les ethnologues ont montré que certaines peuplades primitives ne distinguent pas beaucoup de nombres. Certaines distinguent :

$un \quad deux \quad beaucoup$;

$un \quad deux \quad trois \quad beaucoup$;

$un \quad deux \quad deux - un \quad deux - deux$ pour les petits nombres.

On peut trouver dans la langue orale des traces de numérations antérieures. Ainsi, par exemple, les trois cas singulier, duel et pluriel des langues égyptienne, hébraïque, arabe, sanscrite, grecque et gothique.

Certaines langues, comme le japonais, modifient le mot utilisé pour le nombre en fonction de la forme des objets dénombrés. Dans d'autres langues, le passage d'une forme adjectivale à une forme nominale pour désigner des nombres a pu correspondre à une évolution du concept de nombre.

Les linguistes ont remarqué depuis le siècle dernier des parentés entre le grec et les langues européennes, et le sanscrit. Cela les a conduit à rassembler sous une même famille ces langues et à reconstruire une langue mère. Parmi les mots intéressants pour des comparaisons entre langues figurent les nombres. On a constaté que dans les langues indo-européennes, les mots désignant dix, cent pouvant être rattachés à une même origine, mais que par contre, les mots désignant mille ne le peuvent pas. Ce qui amène à penser que les peuples qui parlaient la "langue mère", n'avaient pas atteint le millier dans le processus de comptage.

Nous avons en français oral, un phénomène très intéressant : comptez mentalement jusqu'à cent. Vous trouverez des irrégularités, qui, c'est bien connu, n'existent pas pour les belges ou les suisses, qui utilisent septante, octante et nonante, là où nous disons soixante-dix, quatre-vingt et quatre-vingt-dix ; c'est-à-dire qu'on trouve en français des restes de l'usage d'une base 20. Pourquoi cette anomalie ? Nous ne pourrons avoir de preuves, mais menons notre enquête. Tous les peuples indo-européens ont utilisé la base dix, à l'exception des langues celtes, comme le breton à l'heure actuelle, qui ont utilisé la base vingt. Plusieurs peuples celtes ont vécu dans notre territoire, et tout d'abord "nos ancêtres les gaulois". Se peut-il que leur système de numération ait en partie survécu à la conquête romaine et à l'adoption de la langue latine ? C'est possible car dans l'histoire, on reverra d'autres exemples de telles permanences de calculs et de méthodes. C'est ce que j'ai supposé dans l'édition 1992 de ma brochure. Toutefois, je suis maintenant davantage convaincue par l'opinion de Karl Menninger qui attribue l'usage partiel de la base vingt à une influence normande aux alentours du premier millénaire. En effet, comme le montre très bien le livre de Michel Banniard, "*Genèse culturelle de l'Europe*", c'est à cette époque que se dégagent nettement les différentes langues et que les sermons d'église sont traduits dans les langues vernaculaires. C'est aussi à cette époque qu'on trouve des traces d'usages de la base vingt.

Les numérations écrites

Le passage à l'écriture : l'introduction de l'écriture et des numérations écrites marquent le passage à l'histoire. C'est un progrès fondamental par l'introduction d'une idéographie qui permet des calculs sur des nombres de plus en plus grands, impossibles par oral. Les instruments pour compter, baguettes, abaques, bouliers, tables de calcul se développent depuis l'Antiquité et sont inséparables de l'évolution du concept de nombre. Pendant longtemps, ils ont suppléé tout calcul écrit et ils ont pu même précéder toute numération écrite (baguettes) puis l'accompagner.

Systèmes de numération, pratiques calculatoires, pratiques de mesure, et développement du concept de nombre sont liés au cours de l'histoire. Sont liées également des conceptions mystiques sur les nombres, de même que pendant des millénaires, calculs astrologiques et calculs astronomiques sont souvent allés de pair. Nous les suivrons dans toute une région, essentiellement Proche et Moyen-Orient, et Europe, en mentionnant les influences possibles venues d'Extrême-Orient. Par manque de temps, nous ne donnerons que de brèves indications sur la Chine et nous laisserons de côté la civilisation maya qui n'a joué aucun rôle pour le développement de cette conception, étant restée isolée pendant longtemps.

Nous ne présentons pas du tout dans ce chapitre les numérations gestuelles qui ont pu exister ou qui existent dans différentes civilisations et nous renvoyons au livre de Geneviève Guitel ou au livre de G. Ifrah pour plus d'information.

Les numérations écrites : la notation des nombres à l'aide d'entailles ou de traits rencontre très vite des limites. L'étape suivante est l'utilisation de groupements notés par des symboles différents. Les systèmes de numération développés au cours de l'histoire furent très nombreux. Les principales bases utilisées ont été les bases 2, 5, 6, 10, 12, 16, 20, 24, 60 et des combinaisons de plusieurs de celles-là.

Les problèmes de mesures de quantité plus petites que l'unité amènent la nécessité d'écrire des fractions et nous verrons les différentes solutions adoptées par les mêmes civilisations.

Notre système décimal : si nous examinons notre système de notation des entiers qui utilise une notation positionnelle à base 10 avec un système de 10 chiffres arabes, on ne se souvient guère que ce système est le produit de plusieurs millénaires d'évolution. Lorsque nous notons le nombre $71\,755\,875$, nous savons que nous voulons dire :

$$7\,10^7 + 10^6 + 7\,10^5 + 5\,10^4 + 5\,10^3 + 8\,10^2 + 7\,10 + 5.$$

- nous utilisons la base 10,
- nous utilisons les chiffres arabes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
- les chiffres n'ont pas la même signification suivant leur place dans le nombre, on dit que nous avons un système positionnel,
- nous disposons d'un zéro pour indiquer une puissance de dix manquante,
- avec ce système, nous pouvons noter des nombres aussi grands que nous voulons,
- à l'oral et à l'écrit, nous procédons à un découpage en utilisant 10^3 comme base auxiliaire,
- ce système peut être étendu à la notation de parties fractionnaires avec usage d'une virgule ou d'un point décimal, pour noter les nombres décimaux.
- on peut, en utilisant des représentations décimales illimitées, représenter (théoriquement) tout nombre réel.

Ce système de notation de nombres est un *système positionnel à base dix*. Chacun des éléments indiqué ci-dessus est le produit d'une évolution complexe des notations de nombres au cours de plusieurs millénaires. Il a été achevé par les Arabes, quant à la notation des entiers et l'utilisation des fractions décimales, sur la base des acquis des civilisations antérieures.

Nous allons présenter quelques systèmes de numération qui ont précédé le nôtre, afin de montrer les différents principes de notation des nombres. Nous préciserons les conceptions que les anciens se faisaient des nombres avant de notre ère dans différentes civilisations pour faire prendre conscience de l'évolution du concept de nombre.

Les nombres avant notre ère

Le système babylonien

Les Babyloniens ont utilisé de nombreuses bases différentes pour les usages pratiques. Nous nous intéresserons ici à un système très élaboré à base 60, étendu aux fractions sexagésimales qui leur a servi pour les tables astronomiques et qui a été emprunté partiellement ou totalement par les autres civilisations grecque, indienne, arabe pour ce même usage. Notre propre calcul du temps en heures, minutes, secondes, et notre calcul des angles en degrés sont des vestiges de ce système de quatre mille ans d'âge.

Reprenons notre exemple précédent, qui en base 60, vaut :

$$71\,755\,875 = 5 \times 60^4 + 32 \times 60^3 + 12 \times 60^2 + 11 \times 60 + 15$$

Les Babyloniens écrivaient ce nombre sous la forme d'une suite :
5 32 12 11 15, (dans notre notation).
Pour écrire les nombres de 1 à 60, ils disposaient de deux symboles : un clou pour les unités que nous symbolisons ici par `1` et un chevron pour les dizaines que nous symbolisons par `<`. Le nombre précédent s'écrivait donc sur le modèle suivant :

$$11111 <<< 11 < 11 < 1 < 11111$$

Quelles étaient donc les caractéristiques de ce système ?

- les Babyloniens ne disposaient pas de chiffres et opéraient donc par répétition de symboles ; un raccourci de trois clous en biais pouvait remplacer 9 clous ;
- la signification des symboles dépendaient de la place qu'ils avaient dans le nombre, le clou pouvant signifier 1, 60, $60^2, \ldots$ et le chevron 10, 10×60, $10 \times 60^2, \ldots$; il s'agit donc d'un système positionnel, à base 60, avec usage d'une base auxiliaire 10 pour noter les nombres de 1 à 60 ;
- ce système pouvait permettre de noter des nombres aussi grands qu'ils voulaient ;
- ce système était étendu aux parties fractionnaires, la signification du clou devenant aussi 60^{-1}, $60^{-2}, \ldots$ et celle du chevron $10/60$, $10/60^2$, $10/60^3, \ldots$;
- initialement, ils ne disposaient pas du zéro pour noter une place manquante, ce qui était source d'ambiguïté. Les nombres $15 \times 60 + 11$, $15 \times 60^2 + 11$, $15 \times 60^2 + 11 \times 60$, étaient notés de la même façon. Au troisième siècle avant notre ère, un caractère en forme de deux chevrons liés, a été utilisé pour marquer une place manquante au milieu des nombres ; ce caractère n'était pas utilisé à droite d'un nombre pour préciser un ordre de grandeur ; la notation restait donc ambiguë ;

– ils ne disposaient pas de la virgule, ce qui est une autre source d'ambiguïté. Les Babyloniens ne pouvaient donc pas avec leur système distinguer entre les nombres a, $60a$, 60^2a, $60^{-1}a$, etc. ; ils ne notaient pas l'ordre de grandeur du nombre qui se comprenait par le contexte ; par contre, ils avaient la possibilité d'écrire des valeurs approchées aussi précises qu'ils le souhaitaient de n'importe quel nombre.

On peut donc résumer les caractéristiques de ce système et le qualifier de notation positionnelle à base 60 étendu aux fractions sexagésimales, initialement sans zéro, sans notation d'ordre de grandeur ; la base 10 est utilisée de façon auxiliaire pour noter les nombres de 1 à 60 de façon additive.

Ce système était, bien que chronologiquement le premier, le plus élaboré des systèmes de notation de nombres apparus dans l'Antiquité au Moyen-Orient. Il faudra attendre trois mille cinq cents ans pour avoir un système plus performant. Jusqu'au quinzième siècle, ce système fut le seul praticable pour noter les parties fractionnaires des nombres dans les tables astronomiques et trigonométriques.

Systèmes décimaux non positionnels

Les systèmes égyptien, grec attique et romain présentent des caractéristiques communes. On peut les qualifier de systèmes décimaux non positionnels. Des symboles différents sont utilisés pour les différentes puissances de dix et sont répétés autant de fois que nécessaire, avec toutefois dans les systèmes grec et romain un groupement auxiliaire par cinq. L'écriture des grands nombres nécessite un nouveau symbole pour chaque puissance de dix. Illustrons ces systèmes sur l'exemple précédent, notre nombre : $71\,755\,875$. Comment était-il écrit dans ces systèmes ?

– dans le système égyptien, il était écrit par répétition de symboles : 7 de 10^7, 1 de 10^6, 7 de 10^5, 5 de 10^4, 5 de 10^3, 8 de 10^2, 7 de 10, 5 de 1 ;
– dans l'ancien système grec attique antérieur à la période classique, le principe de notation des entiers est le même, toutefois l'introduction de nouveaux symboles pour 5, 50, 500 permet un raccourci d'écriture ;
– dans le système romain qui dérive du système précédent, un principe soustractif s'introduit très tardivement au Moyen Âge comme raccourci d'écriture. Ainsi 9 s'écrit non pas VIIII mais IX, 40 s'écrit non pas XXXX mais XL. Le système dispose des symboles I, V, X, L, C, D, M, … il est donc limité pour écrire les grands nombres ; il ne permet pas d'écrire les fractions et parties décimales.

Le système grec alphanumérique

Les Grecs ont développé un système d'écriture alphabétique des nombres qui utilise 28 lettres :

- neuf lettres notent les chiffres de 1 à 9,
- neuf lettres notent les dizaines de 10 à 90,
- neuf lettres notent les centaines de 100 à 900,
- une apostrophe précédant les lettres des unités indique les milliers,
- un nombre est surligné pour le distinguer d'un mot ordinaire,
- le symbole M dénote 10^4 et peut être surmonté d'un nombre de 1 à $9\,999$ pour noter les nombres jusqu'à $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$.

Ainsi notre nombre $71\,755\,875$ s'écrit $M^{7\,155}\,5\,875$ soit $M^{`\zeta\rho o\epsilon`}\epsilon\omega o\epsilon$.

Ce système a l'avantage d'une notation par trois lettres au plus de tous les nombres de 1 à 1000. Il semble d'après le témoignage de Tannery qui s'est entraîné à son usage, que les calculs pratiques étaient aussi simples avec ce système qu'avec le nôtre. Toutefois il est limité pour l'écriture des grands nombres.

Archimède dans un texte célèbre sur le calcul des grains de sable de l'univers, « *l'arénaire* », a imaginé un système d'écriture des grands nombres à l'aide de la base 10^8 soit $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$.

Les systèmes chinois

En Chine archaïque un système de numération en base 60 a été utilisé. Il en subsiste des vestiges dans une façon de noter des cycles de 60 années consécutives.

Le système décimal a très vite été en usage pour des calculs pratiques avec des baguettes. Des baguettes disposées horizontalement et verticalement permettaient d'écrire les chiffres. Les unités étaient notées verticalement pour les unités, les centaines, les dizaines de mille tandis que le cinq correspondant était noté par une baguette horizontale. Pour les dizaines, les milliers, etc, les unités étaient notées horizontalement tandis que le cinq était noté par une verticale. Cela a permis de développer un système positionnel de notation des nombres, non ambigu et très performant pour les calculs. L'astuce de disposer de baguettes de deux couleurs, rouge et noire pour noter des nombres positifs et négatifs a permis plus tard aux Chinois de développer naturellement les calculs avec des entiers relatifs. Ce calcul avec les baguettes a joué un rôle considérable dans le développement de leurs mathématiques.

Et dès le début de notre ère, les Chinois disposaient du système de notation de nombres qu'ils utilisent encore aujourd'hui. Ils ont neuf caractères pour les unités de un à neuf, un caractère pour chacune des puissances de dix suivantes : 10, 100, 1 000, 10 000 et 100 000 000 et les nombres sont partagés suivant les puissances de 10^4 et non 10^3 comme chez nous. Ils ne possèdent pas encore un symbole de zéro dont les premières apparitions attestées datent du huitième siècle.

En chinois notre nombre $71\,755\,875$ s'écrit : $7175\;10^4\;5875$ soit sept-mille un-cent sept-dix cinq dix-mille — cinq-mille huit-cent sept-dix cinq et la prononciation chinoise suit exactement cet ordre avec une syllabe (et un caractère écrit) correspondant aux nombres de cette suite. Il s'agit donc d'un principe multiplicatif de notation de nombres.

L'écriture des très grands nombres nécessite l'invention de nouveaux caractères pour chaque puissance de dix. Cependant divers systèmes combinant des puissances de 10^4 sont apparus au cours des siècles. Ainsi le plus grand nombre apparu dans un traité classique *Dix classiques de calcul* cité par Martzloff est le nombre 1 644 866 437 500 découpé de la manière suivante :

$$1\;10^4\;6448\;10^8\;6643\;10^4\;7500$$

Il faut toutefois remarquer que l'utilisation des très grands nombres est limité dans l'usage courant et les textes scientifiques utilisent maintenant notre système décimal avec les chiffres arabes.

La notation des fractions

Les calculs égyptiens de fractions utilisaient des fractions de numérateur 1 et quelques fractions simples. Ce système était aussi en usage chez les Grecs pour des calculs de la vie pratique.

Les Grecs possédaient un système de notation pour toutes les fractions et ils utilisaient les fractions sexagésimales babyloniennes adaptées à leur notation des nombres pour les calculs astronomiques. Nous traiterons ces points plus en détail ultérieurement. Cependant à titre d'illustration nous pouvons sur un exemple, montrer comment les nombres avec une partie fractionnaire étaient notés dans ces différentes civilisations.

Un texte égyptien indique « J'ai reçu un deben d'argent soit 9 kites $\frac{2}{3}\;\frac{1}{6}\;\frac{1}{10}\;\frac{1}{20}\;\frac{1}{60}$ ». Les fractions égyptiennes sont notées successivement sans signe d'addition.

Autre exemple ; on trouve dans un texte un calcul de la division de 2 par 97 :

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56}\quad\frac{1}{679}\quad\frac{1}{776}$$

Illustrons à l'aide de cet exemple, le nombre $340 + \frac{2}{97} = 340{,}02062\cdots$:

- les Babyloniens auraient donné une valeur approchée de ce nombre sous la forme par exemple de 5 40 1 14 13,
- les Égyptiens notaient ce nombre suivant le principe 340 $\frac{1}{56}\;\frac{1}{679}\;\frac{1}{776}$,
- les Grecs en notation alphanumérique (que nous n'utilisons pas ici puisqu'il s'agit d'indiquer le principe de la notation de ce nombre), pouvaient décomposer ce nombre suivant différents principes :

  - $340\ \frac{2}{97}$,
  - dans un texte d'astronomie, avec les fractions babyloniennes :
    340 1 14 13,
  - avec les fractions égyptiennes $340\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{679}\ \frac{1}{776}$,
- les Chinois au début de notre ère connaissaient les fractions et les règles de calcul avec ces fractions.

Le concept de nombre

Toutes ces civilisations ont été rapidement confrontées au problème de quantités dont on ne peut donner une valeur exacte. Ainsi les Babyloniens ont très vite su que $\frac{1}{7}$ posait un problème de notation, car il ne possède pas de développement fini dans la base sexagésimale, les Babyloniens s'en étaient certainement aperçus, car la périodicité du développement apparaît rapidement. Dans certaines tables d'inverses établies systématiquement la ligne correspondante ne figure pas. Dans d'autres cas, une valeur approchée remplace sans commentaires la valeur cherchée. Les textes mathématiques babyloniens et égyptiens qui ont été retrouvés sont soit des tables de calcul, soit des listes de problèmes illustrant un algorithme de résolution donné simplement sur un exemple particulier. On n'a donc aucune trace des réflexions et des conceptions qu'ils avaient des nombres, à part des considérations numérologiques ou astrologiques. Il est probable qu'ils ont développé surtout un point de vue calculatoire et algorithmique.

Les mathématiciens grecs, en particulier les pythagoriciens, ont développé toute une philosophie de l'univers où la notion de nombre entier jouait un rôle fondamental. Ils étaient convaincus que tout pouvait s'exprimer sous la forme de rapport d'entiers. C'est pourquoi la découverte de l'irrationalité de la diagonale du carré de côté 1 a provoqué une crise philosophique majeure, contemporaine pratiquement des paradoxes sur l'infini de Zénon. La réponse à cette question par les Grecs a orienté tout le développement des mathématiques pour deux millénaires. Elle a consisté à séparer le concept de nombre qui chez les Grecs désigne toujours un nombre entier et le concept de grandeur qui fondamentalement relève de la géométrie. Ainsi ce que l'on désigne par le nombre π n'est pas un nombre pour les Grecs, mais le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre. Les résolutions de problèmes que nous faisons à l'aide d'équations du premier ou du second degré, ont été chez les grecs ramenés à des problèmes de constructions géométriques. C'est ce qu'on appelle l'algèbre géométrique. On assiste donc à une séparation entre le dénombrement qui relève du numérique et la mesure qui est du ressort de la géométrie, séparation qui durera deux millénaires.

Plusieurs traditions se sont développées à partir de l'Antiquité. Tradition calculatoire depuis les Babyloniens et les Égyptiens, géométrie et algèbre géométrique à partir des Grecs. Chez les Arabes, ces deux traditions sont vivantes et conduisent à élargir le concept de nombre. Mais c'est seulement à la suite du développement de l'analyse infinitésimale et de la réintroduction de l'infini que la conception de nombre réel sera pleinement acquise. Nous suivrons l'évolution de ces conceptions au travers de l'histoire jusqu'à nos jours.

Documentation de base

L'aventure des écritures Une remarquable exposition de la Bibliothèque Nationale de France fournit des documents pédagogiques accessibles sur le WEB sur le site de la BNF, ainsi qu'un CD-Rom intitulé "*Tous les savoirs du monde, l'aventure des encyclopédies de Sumer au vingt-et-unième siècle*", une vidéo de Pierre Dumayet et Robert Bober sur "*La naissance des écritures*", une brochure diffusée gratuitement et un livre, intitulé "*La naissance des écritures*".

Un film de Christian Houzel sur les nombres est accessible sur le WEB sur le site du film scientifique (voir la démo).

Dossier Pour La Science, *Les Langues du Monde,* Octobre 1997.

Courrier de l'Unesco, *Naissances des nombres : comptes et légendes,* Novembre 1993. T. Levy, *Au commencement, le nombre.*

La Recherche spécial, *Nombres,* Juillet août 1995.

Livres

Banniard *Genèse culturelle de l'Europe* Points histoire, Editions du Seuil.

Bonfante et alii *La naissance des écritures, du cunéiforme à l'alphabet* Editions du Seuil, 1994.

Collette, *Histoire des Mathématiques,* 2 tomes, Vuibert, 1979.

Dahan Dalmedico et Peiffer, *Histoire des Mathématiques, Routes et dédales,* (1982), réédition points sciences.

Dedron, Itard, *Mathématiques et mathématiciens,* Magnard, 1972.

Encyclopædia Universalis *Dictionnaire des mathématiques* Éditions Albin Michel.

Guedj, *L'empire des nombres,* Découvertes Gallimard, 1996.

Ifrah, *Histoire universelle des chiffres,* 2 tomes, R.Laffont, 1994. Ce livre a suscité des débats que l'on trouvera dans les bulletins de l'Association des professeurs de mathématiques d'avril, mai et juin 1995.

Georges Jean, *Langage des signes, l'écriture et son double,* Découvertes Gallimard.

Georges Jean, *L'écriture, mémoire des hommes,* Découvertes Gallimard.

Guitel *Histoire comparée des numérations écrites* Flammarion 1975.

Martzloff *Histoire des mathématiques chinoises* Masson 1988.

Menninger *Numbers Words and numbers symbols* Dover 1958

Needham *The shorter science and civilisation in China* 4 books Cambridge University Press.

Noël, *Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques,* présentés par Noël, Belin, 1990.

Serres, *Éléments d'histoire des Sciences,* Bordas, 1989.

Documents et livres IREM

IREM *La mémoire des nombres,* Actes du dixième colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, Université de Caen Cherbourg 1994.
Keller, *Préhistoire de l'arithmétique. La découverte du nombre et du calcul* et article de**Cauty,** *Les numérations parlées : mémoire de la quête des nombres.*
IREM *Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce,* Belin, 1994.
IREM *Histoires d'infini,* Actes du neuvième colloque inter IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques, Brest 1992.
IREM *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques,* Ellipses, 1993.
Groupe inter IREM histoire et épistémologie, *Histoire et épistémologie des Mathématiques, La rigueur et le calcul,* Cedic, 1982.
Dhombres et alii *Mathématiques au fil des âges,* Gauthier Villars, Bordas, Paris, 1987.