Des irrationnels aux réels

par Eliane Cousquer, Laboratoire LAMIA [1]

Table des matières

1 Des irrationnels aux réels **2**
1.1 Les nombres décimaux 2

2 Les irrationnels **3**
2.1 Calcul de racines carrées 4
2.2 *Newton*, les décimaux et les approximations 5

3 Les nombres transcendants **6**

4 Un irrationnel est-il un nombre ? **7**
4.1 Certainement 7
4.2 Réponse ambiguë 9
4.3 Tentative claire de justification 11

5 Les relations entre numérique et géométrique **13**
5.1 Nombres et traités de géométrie 13
5.2 La conception des mathématiques au dix-huitième siècle 14
5.3 Les géométries non-euclidiennes. 15

6 Références bibliographiques **16**
6.1 Les irrationnels 16

[1] http ://www.lille.iufm.fr/labo/entreelabo2.html

1 Des irrationnels aux réels

Les travaux d'approximation de rapports par des rationnels et amènent les mathématiciens à s'interroger sur le statut des rapports irrationnels. Sont-ce des nombres ou sont-ils associées à des nombres ? La découverte des décimaux chez les arabes et leur redécouverte en Europe poussent certains mathématiciens à des prises de position nettes sur cette question.

1.1 Les nombres décimaux

Nous avons vu naître chez les Arabes la conception et la notation des nombres décimaux. Le contexte dans lequel est apparue la théorie des décimaux est important [2], lié à la fois à des calculs sur les polynômes, et à des calculs d'extractions de racines n^e. Les traces de la diffusion de ce savoir vers l'Europe sont très parcellaires, mais attestées. Les décimaux semblent avoir fait l'objet d'une redécouverte en Europe au seizième siècle. D'autres auteurs, avant la parution de la *Disme*, par exemple Regiomontanus *Borgi* (1484) et *Rudolff* (1525), avaient fait occasionnellement usage de décimaux en adoptant une barre verticale séparant la partie entière et la partie décimale.

Stevin, dans *La Disme* (1585), expose avec enthousiasme sa découverte de nombres si utiles pour les besoins des artisans et des inventeurs. Il est conscient que ces nombres ne représentent pas tous les nombres en donnant l'exemple de $\frac{1}{3}$ où la division ne s'arrête pas, ce nombre "valant" $0{,}33333\frac{1}{3}$, mais il considère que la différence avec le décimal $0{,}33333$ est négligeable dans les calculs pratiques. Les notations adoptées par *Stevin* sont lourdes : $2^{⓪}3^{①}6^{②}7^{③}$ pour $2,367$. Les décimaux ont tout de suite été utilisés, par exemple par *Viète* pour la détermination d'approximations sous forme de fractions décimales des solutions positives d'équations algébriques [3] de degré 2 à 6.

Cependant, l'invention des logarithmes par *Neper* (1550–1617) et l'établissement de tables de logarithmes telles celles de *Briggs* (1561–1631) généraliseront l'usage des décimaux dans les calculs de valeurs approchées, dans les tables trigonométriques et dans les calculs astronomiques. Pour cet usage des tables et pour la facilité qu'elles apportaient dans les calculs, les décimaux ont été adoptés partout en Europe, relativement rapidement et n'ont pas été oubliés comme chez les mathématiciens arabes des treizième et quatorzième siècles.

L'amélioration des notations avec l'utilisation de la virgule, (ou du point décimal pour les pays anglo-saxons) est plus tardif, et apparaît en particulier chez

[2] Pour cette étude, on se reportera à l'article très complet de Roshdi *Rashed*, *L'extraction de la racine n^e et l'invention des fractions décimales onzième - douzième siècles)*.

[3] voir en particulier *Histoire d'algorithmes*, pages 243 à 248

Pitiscus (1612), chez *Napier* (*Neper*) (en 1617). La stabilisation de la notation des décimaux prendra deux siècles.

Rôle des décimaux

Les décimaux ont une importance considérable pour l'unification du champ numérique. En effet, à la différence des fractions où pour comparer des fractions, une réduction au même dénominateur est nécessaire, la comparaison des nombres décimaux, une fois franchies les premières difficultés d'apprentissage, est intuitivement immédiate. La correspondance entre une droite géométrique avec choix d'une origine, d'une unité et de sous-unités avec les nombres décimaux relève de l'évidence. Historiquement, les calculs d'approximations sont facilités et la possibilité d'approcher autant qu'on veut une quantité irrationnelle est devenue intuitivement évidente.

Bien entendu, les mathématiciens se donnent la liberté intellectuelle de concevoir des unités d'ordre quelconque. C'est un problème dans l'enseignement : l'élève, habitué à porter des points sur une graduation, se heurte vite aux limites de ses instruments de dessin. Il nous semble que doit être posé et débattu avec les élèves dans l'enseignement le choix que se donnent les mathématiciens de concevoir des unités aussi petites qu'ils le désirent. Les enseignants doivent ouvrir des débats avec leurs élèves sur cet usage de l'infini. Ceux-ci sont d'ailleurs très intéressés par ces questions.

Les développements décimaux illimités

L'extension formelle des décimaux aux développements décimaux illimités attendra le développement de l'analyse ; la première notation de développement décimal illimité périodique date de 1742 dans un texte de John *Marsch*. Plus tard, certains voudront les utiliser pour considérer les irrationnels comme des nombres définis par un développement décimal illimité. Cependant leur usage posera les questions suivantes : le développement décimal illimité des fractions est périodique ; il y a une loi pour écrire les chiffres ; le développement décimal illimité des irrationnels n'a pas de loi ; n'est ce pas un objet vide ?

2 Les irrationnels

À cette période, l'analyse numérique avec les calculs de racines carrées, cubiques etc et des approximations de racines d'équations algébriques se développe. Petit à petit, l'usage des fractions continues, sur lesquelles nous reviendrons, se généralise. Les décimaux forment aussi un outil performant pour le domaine numérique puisque les comparaisons de nombres deviennent évidentes. On établit de multiples tables.

2.1 Calcul de racines carrées

Pour le calcul de racines carrées, nous avons déjà vu un algorithme, qui est obtenu à partir d'idées en apparence très différentes et est le plus efficace, car le nombre de chiffres décimaux exacts double à chaque pas d'itération. Il est programmé dans les calculettes. Nous l'avons vu à propos des babyloniens sous le nom d'algorithme de Babylone (Chapitre 3) et nous l'avons retrouvé sous le noms d'algorithme de *Héron* (Chapitre 5). Il donne en terme de suite :

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}})$$

On peut aboutir au même algorithme à partir du point de vue suivant bien exprimé par *Euler* [4].

> *Le premier moyen dont nous parlerons suppose qu'on ait déjà déterminé assez exactement la valeur d'une racine ; qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse* 4 *et qu'elle est plus petite que* 5*. Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur* $4 + p$*, on est sûr que* p *exprime une fraction. Or si* p *est une fraction, et par conséquent moindre que l'unité, le carré de* p*, son cube, et en général toutes les puissances plus hautes de* p*, seront encore beaucoup plus petites que l'unité, et cela fait que, puisqu'il s'agit d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul.*

Partant d'une valeur approchée a de $\sqrt{A}$, nous cherchons à l'améliorer en introduisant un terme correcteur h. On cherche $(a+h)^2 = A = a^2 + 2ah + h^2$. Négligeons h^2. On prend $h = \frac{A-a^2}{2a}$. Alors la nouvelle valeur approchée est $h = \frac{A+a^2}{2a} = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$.

On le retrouve encore sous une forme appelée algorithme de Newton [5], qui expose sa méthode en 1669 sans donner d'interprétation géométrique ; celle-ci est l'oeuvre de *Raphson* puis la justification celle de *Fourier*. Nous considérons la courbe $y = x^2 - A$ et on cherche la valeur de x pour laquelle $y = 0$. Partant d'une valeur proche a de la racine, nous traçons la tangente à la courbe au point $(a, a^2 - A)$. La tangente à la courbe a pour équation

$$y - (a^2 - A) = 2a(x - a)$$

[4] extrait des Éléments d'Algèbre, ch. 785 et 786

[5] *Histoire d'algorithmes*, chapitre 6 les méthodes de *Newton*.

Alors on obtient pour l'intersection de cette tangente avec l'axe des x la valeur $x = \frac{A+a^2}{2a}$, ce qui est la valeur donnée par les autres méthodes.

2.2 *Newton*, les décimaux et les approximations

Newton a beaucoup travaillé sur les calculs d'approximations de racines d'ordre quelconque, à l'aide de décimaux. Voici un exemple de calcul d'une racine carrée par *Newton*[6]. Ce texte décrit une méthode qui a été enseignée en France jusqu'au développement des calculettes.

Il s'agit d'extraire la racine carrée de 99856. Cet algorithme détermine successivement les chiffres en partant de ceux d'ordre le plus élevé. Il repose entièrement sur l'identité algébrique $(A+b)^2 = A^2 + 2Ab + b^2$. On suppose qu'à une étape on ait déjà déterminé A, qu'on ait retiré au nombre donné le carré de A et qu'on cherche le chiffre b suivant ce qui revient à appliquer l'identité avec $(A \times 10 + b)^2$. Il faut donc retirer $2 \times (A \times 10) \times b + b^2$, ce qui explique que *Newton* double d'abord le nombre A avant de lui juxtaposer le chiffre b pour retirer $(2 \times (A \times 10) + b) \times b$ et donc avoir retiré le carré du nouveau nombre obtenu à cette nouvelle étape.

$$\begin{array}{ccc|c}
9 & 98 & 56 & 316 \\
9 & & & \\
0 & 98 & & 6 \\
 & 61 & & \\
 & 37 & 56 & 62 \\
 & 37 & 56 & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

La première étape consiste à partager ce nombre en tranches de deux chiffres : $9^{\cdot}98^{\cdot}56$. On cherche le plus grand nombre dont le carré soit 9. On obtient 3, premier chiffre de la racine cherchée et on retire son carré au premier bloc sur le gauche. Il reste 0. Le nombre cherché commence par un 3.

On abaisse la deuxième tranche 98, on double le premier chiffre 3 obtenu et on cherche le plus grand chiffre b tel que $6b \times b$ soit inférieur à 98. Cela revient à chercher combien de fois 6 est contenu dans 9. On obtient $b = 1$ comme deuxième chiffre. On retire 61 à 98, on obtient 37. Le nombre cherché commence par 31.

On abaisse la troisième tranche et on travaille maintenant avec 3756. On double le nombre 31 obtenu comme début de notre racine. On obtient 62 et on cherche un troisième chiffre c tel que $62c \times c$ soit le plus grand possible inférieur à 3756, ce qui revient à diviser 375 par 62. On obtient $c = 6$. On retire à 3756 le nombre $626 \times 6 = 3756$, on obtient 0. Le nombre de départ est un carré $99856 = 316^2$.

[6] *Lectures on algebra* p. 88.

Pour extraire la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré, ou d'un nombre décimal la même méthode s'applique en partageant le nombre en tranches de deux chiffres de part et d'autre du point décimal. La suite du texte traite les extractions de racines cubiques etc.

Algèbre et fractions décimales

On sait que ces calculs ont eu une très grande importance pour la pensée de *Newton*. Les fractions décimales lui ont servi de modèle pour le traitement des polynômes. *Newton* a traité des résolutions algébriques par une méthode appelée le polygone de Newton. Il s'agit pour lui *«d'appliquer à l'algèbre la doctrine des fractions décimales»*. Les développements décimaux illimités s'introduisent naturellement dans ces calculs et parallèlement, en analyse les développements en série se sont aussi introduits simplement comme des polynômes à une infinité de places. Nous retrouvons à propos de *Newton* les problématiques associées de calculs numériques de racines, d'usage des décimaux et de calculs sur les polynômes que nous avons trouvées chez des mathématiciens arabes. La conception du nombre chez *Newton* est certainement basée là-dessus. Nous verrons à quel point elle est novatrice par rapport aux mathématiques euclidiennes.

3 Les nombres transcendants

Pendant toute cette période, l'usage des irrationnels en tant que nombres se développe ; certains auteurs désignent ce développement comme le mouvement de *«numérisation des raisons»*. Les rapports commensurables et incommensurables sont utilisés et pensés indépendamment de la géométrie, mais aussi sans fondement autre que l'évidence des calculs. À cette époque, se développe l'usage des fractions continues pour obtenir de telles approximations.

Les progrès faits au XVIIIe siècle concernent la démonstration de l'irrationalité de certains nombres. *Euler* démontre en 1737 que e et e^2 sont irrationnels. *Lambert* (1728–1777), établit plusieurs résultats : e^x est irrationnel pour x entier ; $\ln x$ est irrationnel pour x rationnel distinct de 1 ; enfin, il établit en 1761 l'irrationalité de π à l'aide de propriétés des fractions continues.

La distinction entre nombre algébrique qui est solution d'une équation polynomiale à coefficients rationnels et nombre transcendant qui ne vérifie aucune équation de ce type est clairement établie au XVIIIe siècle. Mais aucun nombre transcendant n'est reconnu à cette époque. Les premières démonstrations de transcendance [7] de nombres sont faites par *Liouville* en 1844. *Liouville* montre que si

[7] *Introduction à la théorie des nombres* de *De Konninck* et *Mercier* ; *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes,* APMEP ; *Les fractions continues* par *Jaboeuf* ; *Une approche*

un nombre irrationnel a est racine d'un polynôme irréductible de degré n, alors on peut trouver une constante $c(a)$ telle que :

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > c(a)q^{-n}$$

pour tous les entiers p et q non nul. Il établit que cette constante n'existe pas pour les nombres

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots$$

(avec les a_i désignant des chiffres), aujourd'hui appelés nombres de Liouville, et donc que ces nombres sont transcendants. Ensuite, en 1873, *Hermite* montre que e est transcendant, tandis qu'en 1882, *Lindemann* montre la transcendance de π (e et π ne sont pas des nombres de Liouville).

On peut remarquer qu'à l'heure actuelle, on ne connaît toujours pas la nature de la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n).$$

On ne sait même pas si elle est ou non rationnelle.

Nous reviendrons plus tard sur les ensembles de nombres rationnels, algébriques et transcendants.

4 Un irrationnel est-il un nombre ?

À partir du XVI$^{\text{e}}$ siècle, le zéro est accepté comme nombre et les irrationnels sont utilisés librement. Toutefois leur statut est ambigu et diffère suivant les auteurs. Pour certains, tels *Pascal*, *Barrow*, les irrationnels ne peuvent être compris qu'en liaison avec la géométrie. Par contre d'autres auteurs tels que *Stevin* et *Newton* ont eu une conception beaucoup plus novatrice des nombres.

4.1 Certainement

Pour *Stevin*, les irrationnels sont des nombres et l'incommensurabilité des grandeurs doit être comprise comme l'incommensurabilité des nombres qui mesurent ces grandeurs. Les extraits du livre *Traité des grandeurs incommensurables* [8] de *Stevin* (1585) sont très clairs :

de l'irrationalité : algorithme d'Euclide et fractions continues par *Daumas* ; *An introduction to number theory*, *Hardy* et *Wright*.

[8] voir *Mathématiques au fil des âges*.

> *Thèse 1 : que l'unité est nombre,*
> *Thèse 2 : que nombres quelconques peuvent être nombres carrés, cubiques, de quatre quantités, etc.,*
> *Thèse 3 : qu'une racine quelconque est nombre,*
> *Thèse 4 : qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds.*

Stevin escamote toute justification par une pirouette : «si vous voulez que je vous dise pourquoi $\sqrt{2}$ est un nombre, expliquez-moi d'abord pourquoi $\frac{3}{4}$ en est un...» Pour beaucoup de mathématiciens, son point de vue n'est pas acceptable. Voici la diatribe de *Arnaud* et *Nicole* contre ce point de vue : *La logique ou l'art de penser* (1662), consacre le chapitre 5 à la réfutation de *Stevin*.

> *Le même* Stevin *est plein de semblables disputes sur les définitions des mots comme quand il s'échauffe pour prouver que le nombre n'est point une quantité discrète ; que la proportion des nombres est toujours arithmétique et non géométrique ; que toute racine, de quelque nombre que ce soit, est un nombre. Ce qui fait voir qu'il n'a point compris proprement ce qu'était une définition de mot et qu'il a pris les définitions des mots, qui ne peuvent être contestées, pour les définitions des choses que l'on peut souvent contester avec raison.*

Ces mathématiciens restent dans la logique euclidienne en opposant le nombre quantité discrète et le continu géométrique. En bref *Stevin* ne comprend rien aux bonnes définitions. Souvenons-nous à cette occasion du refus de leur ami *Pascal* de considérer le zéro comme un nombre. La position de *Pascal* est ambivalente sur beaucoup de questions. Il développe des mathématiques nouvelles et créatrices et pour les fonder, il évoque la possibilité de les démontrer, (par exemple par réduction à l'absurde) «à la manière des anciens». Cela veut dire aussi qu'à cette époque, les questions de fondements ne sont pas premières, et on peut affirmer la pertinence du cadre euclidien sans y regarder de trop près.

Par contre *Newton* défend un tout autre point de vue ans l'arithmétique universelle (1707) :

> *On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'un quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le nombre est de trois espèces, l'entier, le fractionnaire et le sourd. L'entier est mesuré par l'unité ; le fractionnaire par un sous-multiple de l'unité ; le sourd est incommensurable avec l'unité.*

La conception de *Newton* du nombre est très proche de la notre. Ce nombre est un rapport abstrait et n'est pas défini par référence à l'existence d'une mesure commune. Cependant la suite se limite à dire que tous les rapports sont des nombres et distinguant les entiers, les rationnels et les irrationnels.

Stevin, *Newton*, deux auteurs qui ont le positions les plus nettes dans cette période pour affirmer que tous les rapports sont des nombres, ont été délibérément rapprochés. Leur travail sur les décimaux et les calculs d'approximations par les décimaux de n'importe que irrationnel est, de mon point de vue, certainement à l'origine de ces prises de positions. J'y vois une nouvelle confirmation de l'importance des décimaux sur la conception du champ numérique. Notons que la définition de *Newton* est citée en référence cinquante ans plus tard par *D'Alembert*, comme l'un des points de vue possible sur les nombres.

4.2 Réponse ambiguë

Dans sa *Géométrie* de 1637. *Descartes* abandonne la loi de l'homogénéité, et représente toutes les grandeurs (les rapports géométriques, les produits, les aires, les volumes, les racines) par des longueurs, après choix d'une unité. C'est un premier pas très important vers la numérisation des rapports de grandeurs. Cependant nulle part dans son livre, il n'affirme que tous les rapports sont des nombres. Ils sont représentés par des longueurs. Jacob *Klein* qualifie le travail de *Descartes* comme une algèbre des longueurs. Ce point de vue est à rapprocher du point de *Wolff*, cité dans l'Encyclopédie Diderot D'Alembert, où on retrouve ce thème de la représentation des nombres par des lignes droites.

> Nombre *: se dit vulgairement dans l'arithmétique, d'une collection ou assemblage d'unités ou de choses de même espèce.*
>
> *M.* Newton *définit plus précisément le* nombre*, non pas une multiplicité d'unités, comme* Euclide *mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de même espèce, que l'on prend pour l'unité...*
>
> Wolf *définit le* nombre*, ce qui a le même rapport avec l'unité qu'une ligne droite avec une autre ligne droite : ainsi, en prenant une ligne droite pour une unité, tout nombre peut être appréhendé par quelqu'autre ligne droite ; ce qui revient à la définition de M.* Newton.

Les cinq pages suivantes sont consacrées aux entiers et un peu aux rationnels. L'auteur des articles de mathématiques de l'encyclopédie est *D'Alembert*. Le structure de cet article montre que pour lui les seuls nombres sont les rationnels. Il l'affirme d'ailleurs nettement dans un autre article de l'encyclopédie.

> Commensurable : *les quantités commensurables en mathématiques sont celles qui ont quelque partie aliquote commune, ou qui peuvent être mesurées par quelque mesure commune, sans laisser aucun reste, ni dans l'une ni dans l'autre...*
>
> *Les nombres commensurables sont ceux qui ont quelque autre nombre qui les mesure, ou qui les divise sans aucun reste...*

> *Les nombres commensurables sont proprement les seuls et vrais nombres. En effet, tout nombre renferme l'idée d'un rapport... et tout rapport réel entre deux quantités suppose une partie aliquote qui leur soit commune...* $\sqrt{2}$ *n'est point un nombre proprement dit, c'est une quantité qui n'existe point, et qu'il est impossible de trouver. Les fractions même ne sont des nombres commensurables, que parce que ces fractions représentent proprement des entiers...*[en prenant les parts pour véritable unité...].
>
> *De là, on peut conclure que non seulement les nombres commensurables sont proprement les seuls et vrais nombres, mais que les nombres entiers sont proprement les seuls et vrais nombres, puisque tous les nombres sont proprement des nombres entiers.*
>
> Incommensurable : *se dit de deux quantités qui n'ont point de mesure commune, quelque petite qu'elle soit, pour mesurer l'une et l'autre. Le côté d'un carré est incommensurable avec la diagonale... Il y a cette différence entre les incommensurables et les imaginaires, que les incommensurables peuvent se représenter par des lignes (comme la diagonale du carré), quoiqu'ils ne puissent s'exprimer exactement par des nombres, au lieu que les imaginaires ne peuvent ni se représenter, ni s'exprimer. Qu'on approche des incommensurables autant qu'on veut par le calcul, ce qu'on ne peut faire avec des imaginaires.*

Ce texte est particulièrement intéressant par l'opposition entre s'exprimer et se représenter qui recouvre l'opposition numérique géométrique. Il confirme aussi ce qui a été dit plus haut à propos de *Descartes*. L'autre intérêt de ce texte réside dans le rapprochement que fait *D'Alembert* entre irrationnels qui peuvent se représenter et nombres complexes qui ne le peuvent pas. Souvenons nous que la représentation géométrique des nombres complexes est beaucoup plus tardive. Dans un autre livre [9], en 1759, *D'Alembert* explique c'est par abus de langage qu'on parle de nombres irrationnels

> *On dit par exemple que la diagonale du carré est à son côté comme la racine carrée de 2 est à 1 ; pour avoir une idée bien nette de la vérité que cette proposition exprime, il faut d'abord remarquer qu'il n'y a point de racine carrée du nombre 2, ni par conséquent de rapport proprement dit entre cette racine et l'unité, ni par conséquent de rapport proprement dit entre la diagonale et le côté du carré, ni par conséquent enfin, d'égalité entre ces rapports puisqu'il n'y a point proprement d'égalité entre des rapports qui n'existent pas.*

[9] *Essais sur les Éléments de philosophie naturelle.*

> *Mais il faut remarquer en même temps que si on ne peut trouver un nombre qui multiplié par lui-même produise 2, on peut trouver des nombres qui multipliés par eux-même produisent un nombre aussi approchant de 2 qu'on voudra, soit en dessus, soit au dessous…*
>
> *Cette facilité qu'on a de représenter les rapports incommensurables non par des nombres exacts, mais par des nombres qui en approchent aussi près qu'on voudra sans jamais exprimer rigoureusement ces rapports, est cause que les mathématiciens aient étendu la dénomination de nombres aux rapports incommensurables, quoiqu'elle ne leur appartienne qu'improprement, puisque les mots nombre et nombrer supposent une dénomination exacte et précise dont ces sortes de rapports ne sont pas susceptibles. Aussi n'y a-t-il à proprement parler que deux sortes de nombres, les nombres entiers et les nombres rompus ou fractions…*
>
> *De là il est aisé de voir que si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres, c'est par la raison que s'ils ne sont pas des nombres, il ne s'en faut de rien pour ainsi dire, qu'ils n'en soient réellement, puisque la différence d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, peut être aussi petite que l'on voudra.*

Ce texte est très clair car *d'Alembert* s'efforce d'expliciter ses conceptions sur les nombres pour un large public. Il contient à la fois des aspects scolastiques avec l'égalité impossible de rapports qui n'existent pas, mais aussi des idées novatrices qui prendront une importance dans la suite, en particulier que si ce ne sont pas des nombres, en fait, on peut les approcher autant qu'on veut par des nombres. Cette idée est affirmée et exploitée beaucoup plus nettement par *Kästner*.

4.3 Tentative claire de justification

Kästner est un précurseur. En 1758 il se propose de définir les nombres réels indépendamment de la théorie des proportions, de façon purement arithmétique.

> *Tous les concepts de l'arithmétique sont, à mon avis fondés sur les nombres entiers ; les fractions sont des nombres entiers dont l'unité est une partie du tout pris au début pour l'unité, et les nombres irrationnels sont des fractions dans lesquels cette unité est une partie variable, de plus en plus petite du tout...*
>
> *On peut considérer le nombre irrationnel comme étant composé de deux parties : l'une, le commencement, est rationnelle et peut être prolongée à volonté de telle sorte que l'autre partie, la fin, qui reste en toute rigueur toujours inconnue, devienne plus petite que toute grandeur donnée…*

> *Si X est un nombre irrationnel, A son commencement rationnel, a sa fin inconnue, alors ce qui est vrai d'un nombre rationnel tel que A, doit aussi être vrai de X, étant donné que cet A peut constituer une partie aussi considérable de X qu'on le désire, par rapport à laquelle a devient de plus en plus petit et peut donc, pour ainsi dire disparaître…*
> *Lorsqu'on divise le 1 sans fin en parties de plus en plus petites et qu'on prend des ensembles de plus en plus grands de ces petites parties, on approche de plus en plus le nombre irrationnel sans jamais l'atteindre complètement. On peut donc le considérer comme un ensemble innombrable de parties infiniment petites…*Celui qui lui dénierait pour cela le nom de nombre devrait faire de même avec les fractions…*(*eine unzählige Menge unendlich kleiner Theile*).*

Pourquoi les lois algébriques sont-elles valables pour les nombres irrationnels ? Cela vient de ce qu'elles sont valables pour le commencement rationnel qui peut approcher de manière aussi précise qu'on veut cet irrationnel de sorte que sa fin,

> *sa deuxième partie inconnue, ne peut rien contenir qui rendrait ces théorèmes faux. Car on peut pour ainsi dire entrer dans cette deuxième partie aussi loin qu'on le désire et y diminuer le reste inconnu autant qu'on le désire. De plus, comme nous l'avons enseigné, on peut enfermer un nombre irrationnel entre deux rationnels qui peuvent se rapprocher l'un de l'autre d'aussi près qu'on le désire …Ce qui est vrai de ces limites qu'on peut rétrécir à volonté, doit également être vrai du nombre qui est compris entre elles. (*Anfansgsgründe…*)*

L'idée exprimée ci-dessus est celle de ce qu'on appelle la densité des rationnels dans les réels. Cette idée est exploitée en analyse en particulier depuis *Euler* dans des démonstrations concernant les fonctions mathématiques. Si des propriétés sont définies pour les valeurs rationnelles de la variable, moyennant des conditions de régularités suffisantes, elles sont valables pour tous les nombres. Donnons un exemple pour comprendre. Cherchons toutes les fonctions f qui vérifient pour toutes les valeurs a et b les relations

$$f(a+b) = f(a) \times f(b)$$

On voit facilement que la relation précédente permet de montrer que $f(0)$ doit être égal à 1 et de définir si on a donné $\alpha = f(1)$, avec $\alpha \neq 0$ $f(2) = \alpha^2$ etc $f(n) = \alpha^n$, $f(-n) = \frac{1}{\alpha^n}$, et après un calcul du même type $f(\frac{p}{q}) = \alpha^{\frac{p}{q}}$. On connaît donc une fonction f répondant au problème pour toutes les valeurs rationnelles de la variable. L'argument de continuité consiste à dire qu'alors on la connaît pour tous les nombres.

5 Les relations entre numérique et géométrique

Les relations entre numérique et géométrique ont été très complexes au cours de l'histoire. Les conceptions des mathématiques dans les différentes civilisations antiques étaient très variées. Pour les Égyptiens et les Babyloniens, le numérique était premier, la géométrie limitée à des calculs d'aires et volumes est un simple domaine d'application de calculs. Les *Éléments d'Euclide* font la synthèse des connaissances mathématiques de l'époque sous forme d'un exposé axiomatique qui restera un modèle pour deux mille ans. Dans cet exposé, l'ensemble de l'édifice est construit de façon rigoureuse sur des axiomes à base géométrique. En particulier, le problème de l'irrationalité relève entièrement de la géométrie sous la forme de la théorie des grandeurs incommensurables. Chez les Arabes, puis dans l'Europe de la Renaissance, on assiste à la naissance et au développement de l'algèbre. Une prise de conscience de l'autonomie des calculs par rapport à la géométrie se fait. Cependant les *Éléments d'Euclide* restent le modèle de rigueur. On assiste donc à une indépendance progressive des justifications calculatoires, qui restent cependant longtemps accompagnées chez les Arabes ou les Européens de justifications géométriques à la manière d'*Euclide*. Ainsi, par exemple, *Viète* explique clairement que l'algèbre qu'il appelle «art analytique» ou «analyse», est une méthode de découverte mais pas de preuve. Par ailleurs, la géométrie connaît un renouvellement et les travaux sur la perspective introduisent une autre approche en géométrie.

5.1 Nombres et traités de géométrie

L'algèbre occupe la première place, la géométrie devient seconde au XVII^e siècle. À partir du livre d'*Arnauld* [10], les grands traités de géométrie sont précédés de chapitres de caractère algébrique, et les théorèmes sur les rapports de grandeurs sont énoncés comme des théorèmes sur les mesures (c'est-à-dire les nombres qui mesurent…) des grandeurs. Cela se reflète la complexité de la situation car les *Éléments d'Euclide* restent la référence concernant la rigueur. Dans les *Élémens de géométrie* (1794) *Legendre* développe le *«vrai sens des proportions»* au livre 3.

> *Si on a la proportion $A : B :: C : D$, on sait que le produit des extrêmes $A.D$ est égal au produit des moyens $B.C$. Cette vérité est incontestable pour les nombres ; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment, ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D sont des lignes, on peut imaginer qu'une de*

[10] *Nouveaux Élémens de géométrie* de 1667, écriture d'*Arnaud* là où nous écririons Éléments.

> *ces quatre lignes ou une cinquième, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors, A, B, C, D représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes A, B, C, D devient une proportion de nombres.*

L'argument n'a aucune valeur dans la mesure où le cas incommensurable est justement celui où il n'y a pas de mesure commune. Il suffit d'imaginer une telle mesure commune...

Confiance illimitée dans le symbolisme

Les calculs algébriques n'ont pas reçu d'exposés à la manière d'*Euclide*, qui fondent cette algèbre. On assiste, au point de vue de la rigueur de l'ensemble de l'édifice mathématique, à une période de flou, entre la référence formelle à l'exposé euclidien pour bâtir l'ensemble de l'édifice mathématique sur une base géométrique, et à une présentation des ouvrages de géométrie faisant appel dans leurs chapitres de début aux propriétés des nombres en particulier irrationnels. Cette période de flou est en elle même féconde et instructive. Il faut noter que cette situation est aussi celle de l'enseignement en particulier secondaire, où il faut faire comprendre les propriétés des nombres réels et en faire acquérir une bonne intuition, alors qu'il est hors de question d'en faire un exposé rigoureux. Le problème des fondements des nombres ne sera résolu qu'au cours du XIX^{e} siècle. Cette période marque donc une transition en ce qui concerne le problème des fondements entre un système euclidien et un système permettant de fonder l'analyse sur une axiomatique de la droite réelle et la géométrie par un système d'axiomes. Il faut remarquer que cette période est extrêmement féconde, en dépit d'idées fausses qu'on peut avoir sur la rigueur en mathématiques.

Cette période est celle d'une confiance illimitée dans les possibilités du symbolisme. Les anciens interdits sur la manipulation de l'infini en mathématiques sont levés avec le développement de l'analyse en particulier à la suite de *Newton* (1642–1727) et *Leibniz* (1646–1716). Des calculs faits pour les polynômes, par exemple la formule du binôme, sont étendus aux sommes infinies. Des résultats sont affirmés *«suivant le principe de généralité de l'algèbre»*. Cette période est celle d'une explosion créatrice en analyse, où les problèmes de fondements sont laissés de côté. Le souci de rigueur des Grecs est même considéré par certains comme excessif.

5.2 La conception des mathématiques au dix-huitième siècle

Au niveau métaphysique, les mathématiques reflètent le plan de l'univers. Cependant, le rôle attribué à Dieu dans la pensée scientifique devient de moins en moins important. Les motivations principales pour le développement des mathématiques sont la mécanique et la physique ; les succès de la mécanique céleste sont importants.

C'est la raison pour laquelle en analyse, beaucoup de propriétés sont considérées comme allant de soi. En particulier les convergences de séries et d'intégrales, l'échange des signes de la dérivation et de l'intégration, l'existence des solutions d'équations différentielles, l'usage des dérivées d'ordre supérieur ne sont pas justifiés. La justification s'obtient *a posteriori*, par les résultats obtenus. Les mathématiques sont guidées par le sens physique, et c'est sans doute la raison pour laquelle la rigueur semble moins essentielle.

La géométrie est vue comme la physique de l'espace et pour les mathématiciens de ce siècle, la géométrie euclidienne est considérée comme une idéalisation correcte de l'espace physique. La seule voix discordante là dessus est celle d'un philosophe *Hume* (1739) qui critique ces conceptions.

5.3 Les géométries non-euclidiennes.

Quelques brèves remarques sur cette question. Dans l'édifice euclidien, un des postulats, le cinquième, dit axiome des parallèles, a toujours été source de difficultés. En voici l'énoncé :

> *Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

Pourquoi ces difficultés ? Les postulats sont des demandes considérées comme évidentes. Or le cinquième postulat n'a aucun caractère d'évidence géométrique. Aussi, dès l'Antiquité grecque, les tentatives soit pour remplacer ce postulat par un autre plus évident, soit pour démontrer ce postulat à partir des autres ont fait l'objet de recherches. Les Arabes ont prolongé ces travaux qui aboutissaient toujours à d'autres demandes ou postulats équivalents au précédent. En Europe, *Saccheri* (1667–1733), *Legendre* (1752–1833) et *Lambert* (en 1766) se sont aussi intéressés à cette question.

L'échec de toutes ces tentatives ont conduit à un renversement de perspective. Quelques mathématiciens se persuadent que ce postulat est indémontrable et entreprennent de développer les conséquences de la négation de ce postulat. *Gauss* en 1813, développe des travaux dans ce sens et est convaincu de la cohérence de géométries non euclidiennes, mais il ne publie rien là-dessus. *Lobatchewsky* (1793–1856) en 1829, *Bolyai* (1802–1860) en 1832 publient indépendamment leurs travaux de géométrie non euclidienne.

Les implications de cette découverte en mathématiques sont considérables. Pendant deux mille ans, la structure euclidienne de l'espace physique a été considérée comme une évidence, une vérité absolue, et les fondements des mathématiques assurés sur cette base. Avec la découverte de géométries logiquement cohérentes qui ne sont pas euclidiennes, le lien entre le monde réel et les mathématiques est remis en question. La géométrie euclidienne n'est pas nécessairement celle de l'espace physique. Les fondements des mathématiques qui étaient pensés sur la base de cette géométrie doivent être reconstruits autrement.

6 Références bibliographiques

6.1 Les irrationnels

APMEP. Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes.
ARNAUD et NICOLE. La logique ou l'art de penser. Champs Flammarion, 1960.
COUSQUER. De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels. Actes des journées de Cherbourg, La mémoire des nombres, 1994.
COLLECTIF IREM. Histoires d'algorithmes. Belin, 1993.
DAUMAS. Une approche de l'irrationalité : algorithme d'EUCLIDE et fractions continues, et De PYTHAGORE à THÉON de Smyrne. IREM de Toulouse, 1996.
DE KONNINCK et MERCIER. Introduction à la théorie des nombres. Modulo, 1994.
HARDY et WRIGHT. An introduction to number theory. Oxford university press, 1960.
JABOEUF. Les fractions continues. Revue Quadrature, 1989, 1990.
NEWTON. Lectures on algebra, 1673-1682. et Arithmétique universelle.