L'infini

L'infini traverse toute l'histoire de l'humanité aussi bien dans le domaine philosophique que mathématique. Cet article retrace quelques jalons historique avant de se consacrer pour l'essentiel au traitement mathématique de l'infini au dix neuvième siècle avec, en particulier, les travaux de Cantor.

Mathématiques grecques et paradoxes sur l'infini

Quand on pense à l'infini, on se heurte très vite à des paradoxes. Par exemple l'expérience de la division en deux « à l'infini » d'une ligne est-elle possible ou se heurte-on à une limite de lignes « insécables »? Quelle est la nature du mouvement ? Y-t-il un ou plusieurs infinis ?
Pour les Pythagoriciens « tout est nombre ». Nous avons vu que pour les Grecs *nombre* = *nombre entier*. Il s'agit toujours du dénombrement d'une collection discrète. Les rapports commensurables (les fractions), sont des relations entre des collections discrètes. Or les pythagoriciens ont découvert que des rapports de longueurs ne sont pas toujours exprimables par un rapport de deux nombres. A cette occasion apparaissent des processus sans fin. Comment en rendre compte ? La découverte des grandeurs irrationnelles par les pythagoriciens met en lumière une difficulté qui va préoccuper les Grecs ; il s'agit du rapport entre le discret et le continu. Une autre école de pensée, les atomistes, défendent le point de vue que la matière est composée d'une infinité d'indivisibles.

L'école des Éléates

L'école fondée par Parménides s'oppose aux conceptions des atomistes. A cette époque, deux conceptions sur l'espace et le temps s'affrontent. Il s'agit de savoir si la droite est divisible à l'infini, ou s'il existe des longueurs insécables. Même chose pour les intervalles de temps. Pour les uns, espace et temps sont indéfiniment divisibles. Pour les autres, espace et temps sont constitués d'intervalles indivisibles.

L'un des philosophes de cette école, *Zénon* avança des paradoxes dont quatre seulement nous sont connus par un texte d'*Aristote* ; deux sont dirigés contre la première hypothèse, deux contre la deuxième. Il s'agit du paradoxe de la dichotomie, de celui d'*Achille* et la tortue, du paradoxe de la flèche et de celui du stade et des rangées mobiles.

La dichotomie.
Le mouvement de A à B est impossible, car pour arriver au but B, il faut d'abord arriver au milieu C. Pour arriver à C, il faut d'abord parvenir au milieu D de AC, etc. La réfutation d'*Aristote* dit qu'il y a deux façons d'être infini, en étendue et en divisibilité. Il est possible de parcourir la longueur AB en un temps fini car le temps est lui aussi divisible de la même façon.

***Achille* et la tortue.**
Achille ne rattrapera jamais la tortue car lorsqu'il arrive à l'endroit où elle était précédemment, la tortue a avancé. *Achille* doit passer par tous les points où est passée la tortue ; il ne peut la rattraper si passer d'un point à un autre prend une unité de temps.

La flèche.
Si le temps est fait d'instants, à chaque instant la flèche est en un point, donc au repos. Le mouvement est donc impossible.

Les rangées mobiles.
On suppose trois rangées de points A, B et C. La rangée A est fixe, les rangées B et C bougent d'une

unité en sens contraire pendant un instant indivisible. Alors le déplacement relatif de B par rapport à C est de deux unités. On peut donc repérer un temps inférieur pendant lequel le déplacement relatif est d'une unité, ce qui s'oppose à l'hypothèse d'un instant indivisible.

Une nouvelle crise philosophique se développa. Elle fut ouverte par les paradoxes de *Zénon*. Elle pose le problème de la validité de résultats obtenus à l'aide de processus infinis que les Grecs utilisaient déjà. La réponse de la mathématique grecque fut d'éviter tout recours explicite à des processus infinis. Les écoles philosophiques grecques se divisent sur la nature du continu et débattent sur la nature de l'infini. Les réponses à ces questions adoptées par la mathématique grecque classique et par le philosophe *Aristote* détermineront les mathématiques jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle. On connaît le rôle très important au Moyen Âge de la logique d'*Aristote* (−384, −322).

Aristote discute les définitions et les principes de base des mathématiques. Il distingue axiomes et postulats. Il élabore la distinction entre les notions d'infini actuel et infini potentiel, étendant à la notion d'infini la distinction qu'il établit entre les deux modalités de l'existence : l'existence en acte et l'existence en puissance. Qu'entend-on par existence en puissance ? Donnons l'exemple d'un bloc de pierre dont un sculpteur veut faire une statue. Avant sa réalisation la statue n'existe qu'en puissance, après, elle existe en acte.

L'infini potentiel : En mathématiques, on désigne par infini potentiel un infini qui est le résultat d'un processus. Par exemple si un grec dit qu'il y a une infinité d'entiers, cela veut dire que pour tout entier, on peut en trouver un plus grand. De même, si on dit qu'un segment de la droite est indéfiniment divisible, cela veut dire que si à chaque étape on prend la première moitié du segment précédent, ce processus ne s'arrête pas.

L'infini actuel : Donnons a contrario des exemples d'infini actuel. Quand on parle aujourd'hui de l'ensemble des entiers, on a un objet mathématique constitué d'une infinité d'entiers que l'on considère comme existants. C'est un infini actuel. De même lorsqu'on s'autorise à penser un segment comme l'ensemble de ses points, on utilise un infini actuel.

Le continu est-il indéfiniment divisible ?
L'infini est-il acceptable en mathématiques?
Quel usage peut-on en faire ?

Les réponses adoptées par le philosophe *Aristote* détermineront les mathématiques jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle :

- le continu est indéfiniment divisible,
- seul l'infini potentiel est acceptable,
- l'infini actuel est rejeté.

Classiquement, on peut dire qu'un point appartient à une droite, mais il est impossible de dire que la droite est constituée de points. Ceci sert de garde-fou après les querelles provoquées par l'usage de l'infini.
Le rejet de l'infini actuel entraîne la nécessité de trouver une autre définition du rapport des grandeurs incommensurables que celle donnée par la suite infinie des quotients dans l'algorithme d'antiphérèse qui, selon certains historiens des mathématiques (comme *Knorr)*, a été utilisée après la découverte de l'incommensurabilité de longueurs. On trouve cette nouvelle définition, attribuée à *Eudoxe*, dans le livre 5 des *Éléments d'Euclide*, consacré aux rapports de grandeurs.
De même, le traitement des quadratures et des cubatures sera faite par des raisonnements « par exhaustion », comportant des doubles réductions par l'absurde, en évitant le recours à des « passages à la limite ».
Dans les Éléments d'Euclide on trouve un axiome promis à une longue postérité en ce qui concerne

l'infini : « *le tout est plus grand que la partie* » , ce qui sera une source de débats et de polémiques.

Les successeurs

La conception d'Aristote est reprise par les mathématiciens grecs puis arabes ultérieurs avec toutefois des inflexions. Certains le refusent catégoriquement, d'autres y voient un détour en vue « du fini ». Un mathématicien comme Thabit Ibn Qurra soutient qu'iil y a plusieurs ordres d'infinis: par exemple les entiers pairs et les entiers impairs montrent l'égalité de deux infinis, mais l'exemple des entiers et des entiers pairs montrent deux infinis différents.

Pendant le Moyen Âge, l'infini a fait l'objet d'une attention particulière. L'infini, maintenant lié aux attributs divins, reçoit une connotation positive. Bien que liée toujours à des débats théologiques, les «disputes» portent sur des sujets intéressants, par exemple l'infini, qui sont aussi intéressants du point de vue scientifique.

A la Renaissance, la perspective donne un exemple d'apparition d'une notion nouvelle liéé à l'infini. Des peintres *Brunelleschi* (1377–1446), *Alberti* (1404–1472), *Piero delle Franscesca* (1410– 1492) et *Dürer* (1471–1528) développent la perspective et introduisent une notion de « ***point à l'infini*** ». Alors que dans les Éléments d'Euclide tout objet était d'abord défini, son existence démontrée avant qu'une propriété soit établie à son sujet, les mathématiciens utilisent des objets *impossibles*, à savoir les points à l'infini, c'est-à-dire les points d'intersection de droites parallèles, qui, par définition, selon le canon euclidien, sont des droites coplanaires qui n'ont aucun point commun.

L'infini au dix-neuvième siècle

De tout temps, les mathématiciens ont fait usage de raisonnements élémentaires de théorie des ensembles de façon plus ou moins consciente. Le maniement des syllogismes, la question de l'appartenance d'un objet à une collection, l'inclusion d'un ensemble dans un autre relève de ce type de raisonnement.
La notion d'équipotence entre ensembles est dégagée petit à petit. *Galilée* remarque que la relation entre les entiers naturels et leurs carrés est bijective ; donc qu'une partie des entiers est en bijection avec les entiers. La relation *«Le tout est plus grand que la partie»*, ne s'applique pas aux ensembles infinis. Ceci renforce la méfiance des mathématiciens vis à vis de l'usage de l'infini actuel mais pourtant les nécessités de l'analyse les confrontent à ce problème. Ainsi, on voit une évolution chez un mathématicien comme *Bolzano*. En 1817, il montre l'existence de la borne inférieure d'un ensemble minoré de nombres réels par un raisonnement en compréhension. Trente ans plus tard, il utilise l'infini actuel en montrant que deux intervalles compacts de R sont équipotents. Il remarque qu'une différence caractéristique entre ensemble fini et ensemble infini est l'existence de sous-ensembles propres équipotents au tout. Cependant *Bolzano* n'arrive pas à dégager clairement la notion de puissance d'un ensemble et à la distinguer de la notion d'ordre de grandeur.

Les travaux de CANTOR

Cantor donne la «définition» suivante : *Par ensemble, on entend un groupement en un tout, d'objets bien distincts de notre intuition liées à l'infini et à la notion de cardinal d'un ensemble, beaucoup plus difficiles. Cantor* aborde ces questions à propos d'ensembles exceptionnels apparus dans l'étude des séries trigonométriques. En 1873 il montre que l'ensemble des rationnels est dénombrable et que l'ensemble des nombres réels ne l'est pas. En 1874, après avoir montré que les ensembles R et R^2 peuvent être mis en bijection, il écrit à *Dedekind «Je le vois, je ne le crois pas»*, tant ce résultat est en contradiction avec l'intuition.
De 1878 à 1884, il publiera six mémoires sur la théorie des ensembles. Il dégage la notion

d'équipotence de deux ensembles, de puissance d'un ensemble, d'ensemble totalement ordonné, étudie les propriétés topologiques de R et aborde les problèmes de mesure. Les travaux de Cantor sont très controversés, et s'il reçoit l'appui de *Dedekind* et de *Weierstrass*, il se heurte à une très grande hostilité de mathématiciens influents comme *Schwarz* et *Kronecker*. *Dedekind* prolonge les travaux de *Cantor* en dégageant la notion d'application quelconque d'un ensemble dans un autre, la notion d'ensemble ordonné et celle d'ensemble réticulé.

Les ensembles de nombres

Nous allons ici donner quelques indications sur les démonstrations de dénombrabilité ou non dénombrabilité d'ensembles de nombres.

Cardinal d'un ensemble
Nous utilisons dans les démonstrations les idées suivantes :

1. à tout ensemble est attaché un cardinal et un seul ;
2. si deux ensembles peuvent être mis en bijection, on dit qu'ils ont le même cardinal, ou la même puissance ;
3. un cardinal est le cardinal d'au moins un ensemble ; si un ensemble est contenu dans un autre, le cardinal du premier est inférieur ou égal au cardinal du second ; plus généralement, le cardinal d'un ensemble E est dit inférieur au cardinal d'un ensemble F, s'il existe une injection de E dans F ;
4. cette relation définit une relation d'ordre sur les cardinaux ; la transitivité de cette relation est immédiate, l'antisymétrie résulte du théorème de Cantor- Bernstein établi en 1897 : *Quels que soient les ensembles* E *et* F*, s'il existe une injection de* E *dans* F *et une injection de* F *dans* E*, alors ces deux ensembles sont en bijection ;*
5. on admet que deux cardinaux sont toujours comparables ;

   On désigne par χ_0 le cardinal de l'ensemble des entiers.

L'ensemble des entiers relatifs.
Comment montrer que Z est dénombrable ? Z contient N comme sous-ensemble, donc sa puissance est au moins celle des entiers naturels. Z peut être construit en établissant une relation d'équivalence sur les couples d'entiers positifs :
(a, b) est équivalent au couple (c, d) si a+d = b+c.
Chaque classe d'équivalence admet un représentant du type (n, 0) ou (0, n). Or on peut ranger ces éléments en une suite de la façon suivante : (0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2), . . . , (n, 0), (0, n), . . . Cela montre que la puissance de Z est égale à celle de N.

L'ensemble des nombres rationnels
La démonstration de la dénombrabilité de Q fut faite par *Cantor* en 1874. Comme l'ensemble Q contient l'ensemble des entiers, le cardinal de cet ensemble est au moins χ_0.
L'ensemble Q peut être construit en établissant une relation d'équivalence sur l'ensemble des couples d'entiers relatifs
(a, b) avec $a \in Z$, $b \in Z$ et $b \neq 0$: (a, b) (c, d) si et seulement si $a \cdot d = b \cdot c$.
Il est facile de voir d'après la démonstration précédente que si l'ensemble des nombres rationnels positifs Q_+ est dénombrable, l'ensemble Q l'est aussi. Q_+ est en bijection avec une partie de l'ensemble des couples, donc que son cardinal est inférieur ou égal à celui des couples d'entiers. On peut ranger ces couples d'entiers (a, b), pour $a \in N$ et $b \in N$, en une suite de la façon suivante. On range dans la première ligne les couples de premier terme 1 suivant l'ordre croissant du deuxième terme. Dans la deuxième ligne, les couples de premier terme 2, etc.
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) . . .

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) . . .
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) . . .
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) . . .
Ensuite on range tous les couples en les numérotant suivant des diagonales de ce tableau. Cela donne l'ordre :
(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), . . .
L'ensemble des couples d'entiers positifs est donc dénombrable. Donc Q l'est aussi.

L'ensemble des nombres algébriques
L'ensemble des nombres algébriques est l'ensemble des racines de polynômes à coefficients entiers. Pour un tel polynôme, $P = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ nous définissons un entier positif appelé sa hauteur : $h(P) = n-1+|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$. Il est facile de voir qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes de hauteur h. Chacun de ces polynômes n'a qu'un nombre fini de racines. L'ensemble des nombres algébriques est donc contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles finis, cela permet de montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

L'ensemble des nombres réels
L'ensemble des nombres réels peut être mis en bijection avec un intervalle, par exemple en utilisant la fonction tangente, et deux intervalles quelconques de R peuvent être mis en bijection en utilisant une fonction affine.
Il nous suffit donc de montrer que l'ensemble des réels de l'intervalle [0, 1[est non dénombrable. Chaque nombre réel compris entre 0 et 1 possède un développement décimal illimité ou deux. Les nombres non décimaux en ont un seul, les nombres décimaux possèdent deux développements : l'un comporte des 9 indéfiniment, on l'appelle développement impropre, l'autre, qu'on appelle développement propre, comporte seulement un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule. Nous convenons de n'utiliser que des développements propres. Chaque nombre réel est donc associé à un unique développement propre. Supposons que les nombres réels de l'intervalle [0, 1[puisse être rangés en une suite $A_0,A_1,A_2, \ldots$ Écrivons les développements décimaux propres de ces nombres, (les a_{ij} sont des chiffres) :
$A_0 = 0,a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}\cdots$
$A_1 = 0,a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$
$A_2 = 0,a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots$
$A_3 = 0,a_{30}a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots$
...
$A_n = 0,a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots$
...
Le principe de la démonstration est de montrer qu'au moins un nombre réel échappe à ce classement et donc que nous avons une contradiction.
Fabriquons un nombre réel B par un procédé appelé procédé diagonal en prenant $B = 0,b_0b_1b_2b_3\cdots$ en imposant $b_0 \neq a_{00}$, $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, etc. et que de plus les b_i ne soient pas égaux à des 9 indéfiniment. Comme nous ne travaillons qu'avec des développements propres, nous sommes sûrs que $B \neq A_0$ car le premier chiffre après la virgule de ces deux nombres diffère, $B \neq A_1$ car le deuxième chiffre après la virgule de ces deux nombres diffère, $B \neq A_2$ car le troisième chiffre après la virgule de ces deux nombres diffère, etc. Le nombre B n'a pas été classé et nous avons obtenu une contradiction.
On ne peut donc pas ranger les nombres réels de l'intervalle [0, 1[en une suite. Cet ensemble n'est pas dénombrable. Nous en déduisons immédiatement que l'ensemble des nombres réels R est non dénombrable.

L'ensemble des nombres transcendants
La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Comme l'ensemble des nombres

réels est la réunion de l'ensemble des nombres algébriques et de l'ensemble des nombres transcendants, on peut conclure que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable, sinon l'ensemble R le serait aussi.
Dans l'enseignement au lycée, les étudiants rencontrent quelques nombres transcendants comme et e. Implicitement, ils peuvent en tirer l'idée que ces nombres sont peu nombreux et se limitent à quelques nombres exotiques. On voit combien le résultat mathématique est ici loin de l'intuition.

L'ensemble des nombres complexes
Comme on peut établir une bijection entre R et]0, 1[, les ensembles R^2 et]0, 1[^{2} sont aussi en bijection. *Cantor* a montré qu'on pouvait établir une bijection entre les points de l'intervalle]0, 1] et les points du carré]0, 1]^2, ce qui permet d'affirmer l'existence d'une bijection entre les points de la droite et les points du plan.
Comment fabriquer une bijection entre les points de]0, 1] et les points du carré]0, 1]^2 ? Nous considérons un point du carré de coordonnées x et y et nous écrivons le développement décimal illimité de ces deux nombres, en choisissant cette fois-ci le développement impropre (avec des 9 indéfiniment), si ce nombre est décimal.
Aucun des développements écrits n'a donc que des zéros à partir d'un certain rang. Nous partageons les chiffres de ces développements en blocs de zéros terminés par un chiffre non nul. Puis nous écrivons un développement décimal d'un nombre z en écrivant dans l'ordre le premier bloc de x suivi du premier bloc de y, le second bloc de x suivi du second bloc de y, etc. Donnons un exemple :
x = 0,301204007 · · ·
y = 0,00137008 · · ·
x = 0,3|01|2|04|007| · · ·
y = 0,001|3|7|008| · · ·
z = 0,3|001|01|3|2|7|04|008|007| . . .
z = 0,30010132704008007 · · ·
Il est aisé de voir que ce procédé permet d'établir une bijection entre les points du carré et les points du segment. Par conséquent l'ensemble des points de la droite et celui des points du plan ont le même cardinal, résultat qui avait paru si surprenant à *Cantor* quand il l'avait établi. Cela entraîne que l'ensemble des nombres complexes a le même cardinal que l'ensemble des nombres réels.

Les cardinaux infinis

L'axiome du choix
Un principe important dans les mathématiques issues des travaux de *Cantor* est ce qu'on appelle l'axiome du choix qui donne la possibilité de faire une infinité de choix simultanément. En voici l'énoncé :
Étant donné un ensemble E *et l'ensemble* F *de ses parties non vides, on peut définir une application de* F *dans* E *qui à toute partie non vide de* E, *associe un élément de cette partie.*
On peut essayer de définir une autre relation d'ordre sur les cardinaux en disant que le cardinal de E est plus grand que celui de G, si on peut définir une application surjective f de E sur G. L'axiome du choix permet de montrer qu'alors il existe une injection de G dans E. En effet, pour tout élément g de G, $f^{-1}(g)$ est un sous-ensemble de E. À l'aide de l'axiome du choix, nous choisissons un élément (g) dans chacun de ces sous-ensembles $f^{-1}(g)$; on vérifie que l'application de G dans E ainsi obtenue est une injection. Nous n'avons donc défini en fait qu'une seule relation d'ordre sur les cardinaux.

Le théorème de CANTOR
Cantor a établit le théorème suivant :
Pour tout ensemble E*, le cardinal de l'ensemble P*(E) *des parties de* E *est strictement supérieur au cardinal de* E.
On en fait une démonstration par l'absurde en supposant une application surjective f de E sur P(E),

et on considère l'ensemble A des éléments x de E qui n'appartiennent pas à f(x). Cet ensemble A est l'image d'un élément a de E par l'application f. On constate alors que les deux assertions, a appartient à A et a n'appartient pas à A sont impossibles. On a donc une contradiction, ce qui démontre qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble sur l'ensemble de ses parties. Le théorème de *Cantor* nous montre l'existence d'une infinité de cardinaux, puisque pour tout cardinal E, on peut en trouver un strictement plus grand, celui de l'ensemble de ses parties que nous noterons 2^E . Cette notation s'explique, car à tout sous ensemble F d'un ensemble E, on peut associer une application de E dans l'ensemble $\{0, 1\}$ en prenant la fonction caractéristique de F. P(E) peut donc être mis en bijection avec l'ensemble des fonctions de E à valeur dans $\{0, 1\}$, ensemble noté $\{0, 1\}^E$.

Comparaison des cardinaux de N **et** R

Nous désignons par c le cardinal de R et par χ_0 le cardinal de N. Nous avons vu que $\chi_0 < c$ puisque nous avons montré que R n'est pas dénombrable. Nous allons montrer la relation que c est égal au cardinal de l'ensemble P(N) montrant une double inégalité :

Si à tout nombre compris entre 0 et 1, on associe son développement dyadique (propre), on obtient une injection de [0, 1[dans $\{0, 1\}^N$ et donc c est inférieur au cardinal de $\{0, 1\}^N$. Si à toute suite infinie d'éléments de $\{0, 1\}$, on associe un nombre entre 0 et 1 qui admet cette suite comme développement triadique, on obtient une injection de $\{0, 1\}^N$ dans [0, 1[et donc c est supérieur au cardinal de $\{0, 1\}^N$.

On peut se demander s'il existe des cardinaux compris entre χ_0 et c. L'affirmation *«Il n'existe pas de cardinal strictement compris entre χ_0 et* c.*»* s'appelle *l'hypothèse du continu*.

Références

BELNA. La notion de nombre chez DEDEKIND, CANTOR, FREGE. Vrin, 1996.
BENACERRAF et PUTMAN. Philosophy of mathematics, selected readings. Prentice Hall, 1964.
CALAIS. Cours de logique. UFR de mathématiques, USTL, 1980.
CAVAILLÈS. Philosophie mathématique. Hermann, 1962.
DUPIN, VALEIN. Initiation au raisonnement mathématique, logique et théorie des ensembles. Flash Armand Colin, 1993.
HILBERT. Sur l'infini. Dans LARGEAUT, Logique mathématique. Armand Colin, 1972.
KAMKE. Theory of sets. Dover, 1950.
KRIVINE. Théorie axiomatique des ensembles. PUF, 1969.
LARGEAUT. Logique mathématique. Armand Colin, 1972.
RIVENC et ROUILHAN. Logique et fondements de mathématiques, anthologie (1850-1914).