

LES DÉBUTS DE LA NUMÉRATION MODERNE

Table des matières

1	L'Inde	1
1.1	Les numérations indiennes	2
1.2	Des virtuoses du calcul	4
1.3	L'évolution du zéro et les calculs sur les négatifs	6
2	La civilisation arabe	7
2.1	Assimilation de l'Antiquité grecque	8
2.2	La propagation du système décimal de position	9
2.3	Les fractions	11
2.4	Le développement de l'algèbre	12
2.5	Les fractions décimales	13
2.6	Les nombres réels et la théorie des proportions	14
2.7	Conclusion	15

1 L'Inde

La civilisation indienne est ancienne et ses débuts datent de deux mille ans avant notre ère. C'est dans le nord de l'Inde aux environs du cinquième siècle de notre ère qu'est né l'ancêtre de notre système de numération et qu'ont été établies les bases du calcul écrit que nous connaissons aujourd'hui. En effet, notre expression chiffres arabes est trompeuse au niveau historique. S'il est certain que nous devons aux Arabes la connaissance de ce système de numération, eux-mêmes l'avaient repris aux Indiens. Au début du siècle, certains historiens des sciences prétendaient que les Indiens l'auraient reçu des Grecs. Aujourd'hui, plus personne ne croit ces affirmations, et des témoignages précis d'auteurs de Syrie (en 662) et de Chine (en 718) attestent l'origine indienne de cette numération.

Les premières traces d'activité mathématique¹ se trouvent dans des hymnes liturgiques de mille cinq cents ans avant notre ère. On y trouve des éléments géométriques nécessaires à la construction d'édifices religieux. Les débuts des mathématiques indiennes datent de huit cents ans avant notre ère. L'apogée de leurs travaux

¹articles de Mazars, *l'Inde* dans *Le matin des mathématiciens* et *Introduction à l'histoire des mathématiques indiennes* dans *D'Imhotep à Copernic*.

se situent aux alentours des années 1200. Depuis environ –200 des échanges entre la Grèce, la Mésopotamie et l’Inde avaient fait connaître aux Indiens les travaux des savants de Grèce et du Moyen-Orient. Cette tradition mathématique est très discontinue et les historiens ont de grandes difficultés à dater certains textes. Les plus anciens textes sont des livres de règles en vers, appelés *Sulvasutras* (règle de la corde), entre 800 et 200 avant notre ère. On y trouve l’équivalent du théorème de *Pythagore*, le calcul de $\sqrt{2}$, certaines figures régulières, un calcul de l’aire du cercle.

Ensuite les Indiens ont développé des systèmes d’astronomie, les *Siddhantas*, probablement sur la base de sources grecques et mésopotamiennes. Jusqu’au cinquième siècle, le méridien de référence est celui d’Alexandrie ; ensuite, c’est celui d’une ville indienne. La valeur de π utilisée est celle donnée par *Ptolémée*, ($\pi \approx \frac{3177}{1250} = 3; 8, 30$). À cette époque sont établies les premières tables de sinus.

Les mathématiciens indiens les plus connus sont *Aryabhata* et *Brahmagupta* au sixième siècle. *Aryabhata* publie des ouvrages en vers de mathématiques et d’astronomie. Par exemple, on connaît un ouvrage de 123 vers qui fournissent des règles de calcul, tantôt justes, tantôt fausses sur des aires et des volumes, sur des progressions géométriques et sur la trigonométrie sphérique. *Brahmagupta* publie un ouvrage d’algèbre où il fournit des solutions d’équations du troisième degré, utilise des racines négatives d’équations, considère le zéro comme un nombre et donne la règle des signes. Pour lui les quantités irrationnelles sont des nombres. Il étudie les triplets pythagoriciens et certaines équations diophantiennes. Il fait usage de lettres pour représenter des inconnues. Un siècle plus tard, *Bhaskara* montre qu’une quantité $\frac{a}{0}$ doit être considérée comme infinie. Il étudie des équations linéaires, quadratiques, déterminées et indéterminées.

C’est à une lignée de savants et de calculateurs indiens que nous devons l’invention de la numération moderne. Contrairement aux Grecs, ces savants indiens étaient tournés vers les applications et se passionnèrent pour les grands nombres et le calcul numérique. Nous emprunterons au livre de Georges *Ifrah*², ainsi qu’au livre de Geneviève *Guitel*³ le récit des découvertes des savants indiens. Cependant, comme nous le rappelle Pierre Sylvain *Filliozat*⁴, beaucoup des éléments donnés ci-dessous doivent être présentés comme des hypothèses plausibles car les problèmes historiques posés par les documents qui nous sont parvenus ne sont pas résolus.

²*Les chiffres ou l’histoire d’une grande invention.*

³*Histoire des numérations écrites.*

⁴*Les incertitudes de l’histoire de la numération indienne*, Bulletin APMEP numéro 398 avril-mai 1995.

1.1 Les numérations indiennes

On connaît des traces écrites des anciennes numérations utilisées depuis le cinquième siècle avant notre ère. Ce système à base décimale attribuait un symbole à chacune des unités, des dizaines, des centaines, des milliers, des dizaines de milliers suivant le même principe que la numération grecque et était donc limité pour écrire les grands nombres qui passionnaient les astronomes. Cependant les symboles employés pour écrire les nombres de un à neuf, détachés de toute représentation graphique de ces nombres préfigurent les futurs chiffres indiens.

Une notation en toutes lettres

Pour pouvoir représenter des grands nombres, on eut l'idée de donner un nom aux différentes puissances de dix et de composer suivant un principe multiplicatif en exprimant d'abord les unités. Un nombre 7 953 s'exprimait donc sous la forme 3 ; 5 10 ; 9 100 ; 7 1000. Contrairement à notre système actuel, les noms pour 10 000, 100 000 et 1 000 000 n'ont aucun rapport entre eux et avec 1 000. Il n'y a pas usage d'une base auxiliaire comme mille ou la myriade. Il suffisait d'une liste de noms de puissances suffisamment longue pour dire des très grands nombres. Ces nombres figurent dans des textes célèbres concernant Bouddha (un autre texte célèbre concernant les grands nombres utilise une progression géométrique de raison 7). Ceci montre que l'usage des nombres n'était pas limité aux besoins du commerce ; les spéculations mystiques sur les très grands nombres faisaient partie de la culture bouddhique et furent aussi transmises en même temps que les aspects religieux à d'autres peuples de la région.

L'intérêt majeur de cette utilisation d'une liste de puissances de dix est que l'évolution vers une numération de position est naturelle, à titre d'abréviation. Par la force de l'habitude, comme les puissances de dix était toujours énoncées dans l'ordre croissant, les mathématiciens et astronomes indiens prirent l'habitude de ne plus nommer les puissances de dix successives. Notre nombre 7 953 s'énonçait donc 3 ; 5 ; 9 ; 7. En opérant cette simplification, ils étaient passés à une numération orale de position.

Bien sûr, à ce moment le problème d'une place manquante dans la chaîne des puissances de dix est posé. Les savants indiens résolurent le problème en prononçant le mot «vide» à chaque fois qu'une puissance de dix manquait. On trouve par exemple le nombre 13 107 200 000 écrit sous la forme vide ; vide ; vide ; vide ; vide ; deux ; sept ; vide ; un ; trois ; un. Nous sommes donc en présence d'une véritable numération orale de position ; les Indiens ont été le seul peuple à inventer une telle numération orale.

Les Indiens avaient donc redécouvert le zéro des anciens Babyloniens et des Grecs de la période alexandrine. Ils avaient à leur disposition tous les éléments qui

allaient les conduire à l'invention de la numération écrite moderne. Pour l'instant le principe en était découvert, mais il ne portait que sur des mots.

Des mathématiques en vers

Pour ne pas avoir à répéter plusieurs fois dans un même nombre le même mot, ils définirent des équivalents, en puisant dans la nature, la cosmologie et dans les associations d'idées traditionnelles dans leur civilisation. Par exemple pour équivalent à un, ils pouvaient employer le premier père (Brahman), le commencement, le corps, un des mots signifiant la terre ou la lune. Pour signifier deux, ils pouvaient employer les dieux jumeaux, le couple primordial, des mots désignant des couples ou des jumeaux, les yeux, les bras, les chevilles, les ailes.

Les auteurs et savants indiens utilisaient ces équivalents pour présenter leurs données numériques sous forme de poème facile à mémoriser. Le calculateur récitait donc des vers pour poser des chiffres lors des opérations. Ce système avait l'avantage de pouvoir conserver en mémoire de façon sûre des nombres, en évitant les erreurs dues aux graphies souvent défectueuses, la forme des chiffres variant souvent d'une région à l'autre.

1.2 Des virtuoses du calcul

Les arithméticiens indiens calculaient très bien et leur virtuosité dans le domaine du calcul faisait l'admiration des étrangers qui venaient à connaître leurs travaux. Comme les savants du monde grec, les limites de leur numération les avaient conduits à utiliser l'abaque ou planche à compter. Il s'agit d'une abaque à colonnes tracées sur du sable fin, la première colonne à droite associée aux unités, la deuxième aux dizaines, etc. Au lieu d'utiliser des cailloux ou des jetons placés sur ces colonnes, les Indiens traçaient dans le sable les chiffres de un à neuf. Vu la disposition des colonnes, notre nombre 7953 s'écrivait donc maintenant 7 ; 9 ; 5 ; 3. Lorsqu'une puissance de dix manquait, il suffisait de laisser vide la colonne correspondante⁵. C'est là l'origine de la numération décimale de position.

Pour opérer des multiplications, des chiffres étaient introduits progressivement en remplacement de chiffres effacés au cours des étapes du calcul. Cette manière de calculer était longue et nécessitait des opérateurs une attention soutenue et beaucoup d'entraînement. De plus, à cause de l'effacement des résultats intermédiaires, les erreurs étaient difficiles à déceler.

Le mieux est de donner un exemple. Soit à multiplier 234 par 567. Les nombres sont disposés sur l'abaque de la façon suivante, afin que les produits effectués ultérieurement soient placés dans les bonnes colonnes :

⁵Voir les livres de *Colette, Guitel, Ifrah* et *Menninger* pour trouver une iconographie.

$$\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

Le principe est de faire d'abord tous les calculs avec le 2, en faisant apparaître les résultats intermédiaires sur la première ligne. Calcul de 2×5 :

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

Calcul de 2×6

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

Calcul de 2×7 . On remarque que l'on aura plus besoin du 2 et que sa place peut donc être utilisée :

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On déplace le nombre de la deuxième ligne pour le mettre en bonne position pour effectuer les calculs avec le chiffre 3 du premier nombre :

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On effectue 3×5

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 8 \ 4 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On effectue 3×6

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 0 \ 2 \ 3 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On effectue 3×7 et on constate que la place du 3 devient disponible :

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 0 \ 4 \ 1 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On déplace le deuxième nombre pour effectuer les calculs avec le 4 du premier nombre :

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 0 \ 4 \ 1 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On calcule 4×5

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 1 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On calcule 4×6

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 5 \ 4 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

On calcule 4×7 et on constate que la place du 4 dans le premier nombre devient disponible. Le calcul est fini. Le résultat est inscrit sur la première ligne.

1 3 2 6 7 8
5 6 7

Ce calcul sur abaque, avec la disposition de chiffres en colonnes permet de penser à utiliser par écrit la même disposition que sur l'abaque et faire intervenir les mêmes principes de numération que ceux utilisés à l'oral. Ce pas fut franchi lorsqu'ils commencèrent à noter les entiers, aux variations de la forme des chiffres près, de la manière que nous utilisons encore aujourd'hui. Cette inversion de la direction de l'écriture des nombres s'est opérée vers le cinquième siècle. C'est là l'origine de notre notation des nombres.

Parallèlement, ils commencèrent à développer des techniques de calcul écrit particulièrement efficaces. Pour les multiplications, ils développèrent un procédé par grillage ou tableau qui sera transmis aux Arabes et par eux, arrivera en Europe sous le nom de multiplication par jalousie. Cette méthode avait l'avantage de laisser apparents les résultats intermédiaires et d'être relativement sûre et plus facile que les techniques précédentes. Cela permettra une démocratisation des techniques de calcul, jusque là confinées au sein d'une caste très privilégiée. Reprenons l'exemple précédent. Les deux nombres sont inscrits dans une grille, le premier 234 horizontalement, le second 567 verticalement. Dans une case, nous inscrivons le produit du chiffre de la colonne par le chiffre de la ligne, en inscrivant les dizaines dans le coin supérieur gauche de la case et les unités dans le bord inférieur droit. Un coup d'oeil et un instant de réflexion permettent de com-

		2	3	4	
1	0	2	6	8	
3	3	6	9	12	5
2	4	8	12	16	7

prendre que le chiffre des unités est dans le bord inférieur droit du tableau, que les dizaines sont dans une parallèle à la diagonale, de même pour les centaines etc. Il suffit d'additionner les chiffres de ces lignes en biais, en tenant compte des retenues éventuelles :

1.3 L'évolution du zéro et les calculs sur les négatifs

À la fin du sixième siècle une évolution importante eut lieu pour la première fois dans l'histoire. Jusque là, le symbole du zéro⁶ avait toujours eu pour seule signification une place vide. Il s'enrichit alors de la signification rien et devint un nombre comme un autre, ce qui est un pas conceptuel important.

En 628, un mathématicien nommé *Brahmagupta*, enseigna dans un ouvrage la façon de faire les opérations addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances et extraction de racines sur ce qu'il appelait les biens, les dettes et le néant, c'est à dire les nombres positifs, négatifs ou nul. Il en exprimait ainsi une des règles : «*Une dette retranchée du néant devient un bien, et un bien retranché du néant devient une dette*». Il avait inventé là la règle des signes. Cela a permis le développement de l'algèbre chez les Indiens qui donnaient un nom à l'inconnue et à son carré. *Brahmagupta* énonça aussi la façon d'écrire les solutions des équations du second degré.

Suivant les auteurs, les nombres négatifs n'étaient pas toujours acceptés comme solutions d'équations. Par contre, les mathématiciens indiens travaillaient librement avec des nombres irrationnels, sans se poser de questions sur la nature de ces nombres. Par exemple, ils écrivaient des égalités qui revenaient à utiliser une formule : $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}}$.

Les savants indiens ont adopté une notation pour les fractions qui par exemple superpose 3 et 4 sans barre de fraction $\frac{3}{4}$ pour écrire la fraction $\frac{3}{4}$. Ils utilisaient les fractions sexagésimales en astronomie. Ils ont utilisé les débuts de fractions continues pour résoudre des problèmes.

On a pu juger de l'apport considérable des Indiens dans le domaine de la numération et des techniques de calcul. Par contre, les savants indiens ont peu fait progresser l'astronomie et la trigonométrie par rapport à *Ptolémée*, mis à part l'invention de l'usage du sinus et le perfectionnement des tables. Les mathématiques indiennes ont commencé à décliner après 1200.

2 La civilisation arabe

On sait que la religion de l'Islam a été fondée par *Mahomet* en Arabie, chez des tribus arabes. L'ère musulmane débute à la fuite en 622 de *Mahomet* à Medine. *Mahomet* mourra en 632 à la Mecque et ses continuateurs se lancent dans la conquête du Moyen et du Proche-Orient. Cette expansion dure jusqu'au milieu du huitième siècle et s'arrêtera en Inde, en Espagne et à Constantinople. Cet immense empire ne tarde pas à éclater entre diverses féodalités, mais conserve une unité lin-

⁶Filloziat, *Le triomphe du zéro* dans *Comptes et légendes* revue de l'Unesco.

guistique et religieuse. Les peuples dominés adoptent majoritairement la religion musulmane, mais certaines minorités linguistiques et religieuses sont tolérées.

Un contresens est souvent fait à propos des mathématiques arabes. On y voit parfois un simple transfert des mathématiques grecques vers l'Europe. C'est oublier qu'au moment de la conquête arabe, il n'y avait plus de mathématique vivante dans l'empire byzantin⁷. Des manuscrits se trouvaient dans des monastères et seule une tradition de commentaires de ces manuscrits subsistait. La conquête arabe apporte une profonde transformation culturelle et religieuse dans l'ancienne grande Grèce. Les populations changent de langue et de religion majoritairement. On désigne par mathématiques arabes⁸ l'ensemble des travaux produits dans cette aire géographique et publiés en arabe, parfois par des savants d'autres origines.

Lors des premières conquêtes, des bibliothèques sont détruites, en particulier celle d'Alexandrie est mise à sac (pour la deuxième fois, après la première destruction sous l'influence des chrétiens)⁹. Cette période de fanatisme destructeur ne dure pas et très vite les souverains arabes encouragent le renouveau scientifique et la recherche systématique d'anciens manuscrits grecs ou d'autres cultures. Des traductions des œuvres scientifiques et philosophiques de l'Antiquité sont faites, alors que le grec est encore connu et pratiqué comme langue savante dans la région. Il faut souligner que la nécessité de traduire des textes institutionnels et administratifs avait conduit à des recherches linguistiques en arabe tout à fait remarquables¹⁰. Le développement des relations commerciales avec l'ensemble du monde connu favorise aussi les échanges scientifiques.

À la fin du huitième siècle, de nombreux savants se regroupent à Bagdad¹¹ où un observatoire et plusieurs bibliothèques sont créées. Des écoles scientifiques et philosophiques se développent. Le centre le plus connu¹² *la Maison de la sagesse*, héberge des traducteurs et des savants. Le premier grand philosophe arabe, *Al Khindī*, mort en 873 connaît bien la science et la philosophie grecque, s'intéresse à l'astronomie indienne avec l'arrivée de savants indiens à l'observatoire de Bagdad et traduit des œuvres indiennes d'astronomie. Il publie la première description en arabe de l'arithmétique indienne.

⁷Caveing, *D'Alexandrie à Byzance* dans Noël, *Le matin des mathématiciens...*

⁸Rashed, *D'Alexandrie à Bagdad* dans Noël, *Le matin des mathématiciens...*

⁹Cette anecdote a été publiée par des historiens arabes importants, comme *Abd al-Latif al Baghdadi*, *Ibn al Ibri*, *Abu al-Fida* et *Ibn al Qifti*. Voir article de *Djebbar* cité ensuite.

¹⁰*Djebbar*, *Le phénomène de la traduction et son rôle dans le développement scientifique en pays d'Islam*.

¹¹*L'âge d'or de Bagdad* Les cahiers de Science&Vie février 1998.

¹²*Tous les savoirs du monde*, <http://www.bnf.fr/web-bnf/pedagos/dossism/islam.htm>

2.1 Assimilation de l'Antiquité grecque

Les œuvres des mathématiciens grecs sont traduites, et parallèlement, on développe une terminologie scientifique en arabe. En moins d'un siècle et demi, les œuvres d'*Euclide*, *Archimède*, *Apollonius*, *Héron*, *Ptolémée*, *Diophante* sont traduites en arabe, parfois, comme les *Éléments d'Euclide*, plusieurs fois. C'est quelquefois par ces traductions arabes¹³ que certaines œuvres grecques sont parvenues jusqu'à nous. Il faut souligner que ces traductions sont l'œuvre de savants inventifs qui publient une traduction souvent après un travail d'approfondissement de l'œuvre grecque. Cela permet d'éviter les contresens mathématiques, mais ne garantit pas, en dépit des nombreux débats sur la traduction parmi ces savants, contre une relecture de l'œuvre grecque à la lumière des mathématiques de l'époque. D'une façon générale, il s'agit plutôt d'une traduction critique accompagnée de nombreux commentaires.

En même temps, les Arabes s'intéressent aux autres traditions scientifiques de l'Inde et du Moyen-Orient. Les œuvres arabes comportent beaucoup de problèmes concrets, de constructions de bâtiments, de commerce, de finance, de parts d'héritage et surtout d'astronomie. Les Arabes disposent de meilleurs instruments et donc recherchent une plus grande précision dans les calculs numériques.

Développement scientifique

Il y a donc une première période d'assimilation de l'héritage grec¹⁴ et de la culture orientale. Les œuvres arabes comportent des problèmes de calcul numérique, de méthodes d'approximation, d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie. La grande différence avec les traditions mésopotamiennes et indiennes est la volonté de trouver des règles générales et de les démontrer, au lieu de se contenter de cas particuliers. Les Arabes développent des théories. Dans les commentaires d'*Euclide*, ils remplacent la théorie des proportions d'*Eudoxe* par une théorie avec un concept de nombre réel plus large que le concept de nombre des Grecs. Le style des ouvrages diffère de celui des Indiens. Les sujets des ouvrages font l'objet d'un classement systématique et ils comportent beaucoup de problèmes. Des démonstrations sont données.

À partir de cette assimilation des traditions antérieures, un développement scientifique autonome va aboutir au développement de branches de mathématiques nouvelles¹⁵. Le développement des sciences dans les pays arabes jouera un rôle essentiel quelques siècles plus tard pour la renaissance scientifique européenne qui se fera au contact avec les scientifiques arabes d'Espagne et de Sicile.

¹³*Traducteurs et savants de renom*, Les cahiers de Science&Vie février 1998.

¹⁴*Des savoirs hiérarchisés*, Les cahiers de Science&Vie février 1998.

¹⁵voir *Youschkevitch* et *Rashed* et également *Dahan-Dalmedico*.

2.2 La propagation du système décimal de position

Le premier mathématicien arabe important est AL-KHWĀRIZMĪ qui vécut de 780 à 850. Notre mot algorithme est une déformation de son nom. Il publia des ouvrages d'astronomie, de géographie, d'arithmétique, d'algèbre et sur le calendrier. Ses ouvrages d'arithmétique et d'algèbre ont exercé une influence considérable sur le développement ultérieur des mathématiques.

L'ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ sur l'arithmétique est le premier exposé systématique sur le système décimal de position et sur les opérations à l'aide de cette notation des nombres. Le seul manuscrit connu est une traduction latine partielle de cet ouvrage. Par ailleurs, trois ouvrages qui en sont très proches sont parvenus jusqu'à nous : le *Liber algorismi* de Jean de Séville (1153) et une *Introduction d'Algorisme à l'art de l'astronomie* (1143), ainsi qu'un ouvrage arabe de l'an 1000 *Livre donnant toutes les connaissances sur l'arithmétique indienne*. Le titre probable de l'ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ est *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.

Nous avons décidé d'exposer la manière de compter des Indiens à l'aide de 9 caractères et de montrer comment, grâce à leur simplicité et leur concision, ces caractères peuvent exprimer tous les nombres. Nous faciliterons ainsi la tâche de celui qui veut apprendre l'arithmétique, c'est à dire aussi bien les grands nombres que les petits et tout ce qui s'y rapporte : la multiplication, la division, mais aussi l'addition et la soustraction, etc.

Il faut remarquer que dans la traduction latine parvenue jusqu'à nous, les chiffres ne figurent pas et sont remplacés par des blancs, mais le texte est lisible car les nombres sont aussi écrits en toutes lettres. Les procédés de calcul pour l'addition, la soustraction, la duplication, la multiplication, la médiation, la division sont exposés à l'aide de la méthode de calcul sur tablette avec effacement de résultats intermédiaires. Le procédé de doublement figure-t-il à titre de vestige des techniques antiques, ou pour les besoins des calculs d'extraction de racines ? On ne sait.

On ne connaît pas la forme des chiffres qui figuraient dans l'œuvre originale d'AL-KHWĀRIZMĪ. Dans son livre d'algèbre, AL-KHWĀRIZMĪ écrit les nombres en toutes lettres. On sait que la notation des nombres varie énormément d'un auteur à l'autre dans les textes arabes. Dans les premiers textes, les nombres sont écrits en toutes lettres, ou en utilisant les lettres grecques. L'emploi des lettres grecques disparaît au douzième siècle ; par contre l'habitude de noter les nombres en toutes lettres persiste longtemps après l'introduction de la numération indienne dans les pays arabes. Par exemple, entre 961 et 976, *Abū l-Wafa*, dans un livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands, utilise une notation des nombres en toutes lettres, et n'utilise pas le système décimal de position. De

même, *al-Karagī*, à la fin du dixième siècle, écrit les chiffres en toutes lettres dans son «*Livre suffisant sur la science de l'arithmétique*».

Aux huitième et neuvième siècles, une écriture alphabétique arabe (chiffres gumal) analogue à l'écriture grecque se développe. Au dixième siècle, des systèmes de chiffres différents, issus des chiffres indiens sont créés en Orient et en Occident, (chiffres gubar = poussière). La plus ancienne apparition attestée de chiffres arabes se trouve dans un manuscrit daté de 873. Dans les textes astronomiques, les nombres sont écrits sous forme sexagésimale, soit à l'aide de chiffres, soit avec des lettres.

2.3 Les fractions

AL-KHWĀRIZMĪ expose les calculs sur les fractions ¹⁶, (mot qui vient de briser et qui donnera nombre rompu en Europe), dans son livre d'arithmétique. Il existe des noms pour un certain nombre de fractions simples désignées sous le nom de fractions exprimables. Ce sont les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$. Les autres fractions de ce type, sont appelées une partie de n : par exemple $\frac{1}{13}$, est lue une partie de 13, et les fractions du type $\frac{m}{n}$, sont dites m parties de n : par exemple, $\frac{3}{17}$, 3 parties de 17. Elles sont dites inexprimables.

AL-KHWĀRIZMĪ expose la théorie des fractions sexagésimales, qu'il appelle les fractions indiennes. Il décrit les opérations sur ces fractions. Il développe le calcul avec les fractions ordinaires. On trouve des réductions de fractions au même dénominateur. Par exemple le produit de $8 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{5}$ par $3 \frac{1}{3} \frac{1}{9}$ est mené en faisant le produit de $\frac{358}{40}$ par $\frac{93}{27}$ et donne $\frac{33294}{1080} = 30 \frac{894}{1080}$. Ce dernier nombre est écrit par superposition successive de 30, puis de 894 puis de 1 080. On voit donc que les mathématiciens arabes ont conservé l'antique tradition égyptienne d'écriture des fractions comme somme de fractions de numérateur 1.

Abū l-Wafa distingue trois groupes de fractions : les fractions dites principales de numérateur 1 de $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{10}$, les fractions composées de type $\frac{m}{n}$ avec $m < n \leq 10$, parmi lesquelles la fraction $\frac{3}{2}$ joue un rôle particulier et les fractions dites unifiées, c'est à dire des produits de fractions principales. Il appelle fractions exprimables, les fractions somme et produit des précédentes et inexprimables ou muettes les autres fractions (il faut prendre garde que les auteurs arabes désignent aussi par ces mêmes termes les nombres irrationnels). Une partie de l'ouvrage d'*Abū l-Wafa* est consacré à des conversions des fractions d'une forme dans une autre. Un certain nombre de conversions nécessaires était aussi lié à des systèmes d'unités de monnaie et faisait intervenir des dénominateurs 6, 24 et 96.

Dans les recherches de racines carrées, les mathématiciens arabes faisaient intervenir des fractions. En utilisant nos notations, la méthode qu'ils employaient

¹⁶cf. *Youschkevitch*.

pour un quotient revenait à utiliser la règle : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$. Par ailleurs, ils savaient qu'ils pouvaient obtenir une plus grande précision¹⁷ en utilisant la règle : $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A \times 10^{2n}}}{10^n}$. Ce point est très important, car il explique en partie comment le développement de calculs numériques et de recherche de racines carrées, cubiques, etc. à l'aide d'algorithmes de plus en plus précis a pu les mettre sur la voie de la découverte des nombres décimaux¹⁸.

2.4 Le développement de l'algèbre

L'ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ sur l'algèbre¹⁹ s'intitule *Bref ouvrage sur le calcul de ḡabr* et de *muqābala*. En fait le mot *ḡabr* désigne l'opération qui consiste à ajouter aux deux membres de l'équation des termes égaux à ceux qui sont affectés du signe moins, de façon à n'avoir plus que des termes positifs. Le mot algèbre en est une déformation. Le terme *muqābala* désigne la réduction des termes semblables. Dans son livre AL-KHWĀRIZMĪ traite des équations du premier et du second degré. Il ramène au moyen des transformations précédentes toutes les équations du second degré aux six formes suivantes, à coefficients positifs :

- les carrés sont égaux aux racines, $ax^2 = bx$,
- les carrés sont égaux à un nombre, $ax^2 = c$,
- les racines sont égales à un nombre, $bx = c$,
- les carrés et les racines sont égaux à un nombre, $ax^2 + bx = c$,
- les carrés et les nombres sont égaux aux racines, $ax^2 + c = bx$,
- les racines et les nombres sont égaux aux carrés, $bx + c = ax^2$.

En fait, explique AL-KHWĀRIZMĪ, on rencontre trois sortes de nombres : les nombres simples, les racines (ou choses) et les carrés. Le carré est le produit de la chose par elle-même. Tous les textes sont écrits avec des mots et sans aucun symbolisme. Les formes canoniques des équations du premier et du second degré sont répertoriées. AL-KHWĀRIZMĪ donne ensuite les règles de résolution pour chacune de ces formes d'équations et les justifie par des démonstrations géométriques à la grecque. La règle de trois et la règle de fausse position sont explicitées et utilisées.

Nous ne développerons pas l'histoire du développement de l'algèbre à partir à la fois des traditions grecques et des traditions mésopotamiennes. Cependant, il faut souligner la nouveauté et l'originalité de l'œuvre d'AL-KHWĀRIZMĪ. Dans son travail, le point de départ est l'équation comme objet d'étude en elle même, et non un problème concret qui conduit à poser une équation. Il faut voir dans son livre le début d'une nouvelle discipline, l'algèbre. Deux autres mathématiciens prolongent ce travail.

¹⁷Youshkevitch.

¹⁸Rashed, *L'extraction de la racine nième et l'invention des fractions décimales*.

¹⁹Rashed, *La naissance de l'algèbre* dans Noël, *Le matin des mathématiciens...*

Abū Kāmil (850–930) énonce dans un ouvrage d’algèbre les règles précises de calcul des solutions des différentes formes d’équations du second degré à l’aide de radicaux. Il développe également les règles du calcul algébrique et insiste sur leur caractère absolument général. Dans de nombreux cas, il déduit ces identités algébriques des règles sur les proportions, sans faire de différence entre proportions de grandeurs commensurables et proportions de grandeurs incommensurables. Pour lui, explicitement, les termes des proportions sont des nombres qui peuvent être aussi bien rationnels qu’irrationnels. Des quantités irrationnelles peuvent aussi intervenir comme coefficients dans les équations. Ce qui n’était pas le cas chez AL-KHWĀRIZMĪ. On constate chez lui une maîtrise tout à fait remarquable des calculs sur des quantités qui s’expriment avec des radicaux. Il traite aussi d’équations qui se ramènent à des équations du deuxième degré.

al-Karagī (mort entre 1019 et 1029) définit la science de ce nouveau calcul à savoir la détermination des grandeurs inconnues à l’aide de grandeurs connues, par les meilleures méthodes. Il développe un calcul sur les différentes puissances des inconnues en introduisant comme *Diophante*, le cube, le carré carré, etc. et en indiquant que l’on peut continuer à l’infini la chaîne des puissances. À cette série des puissances, il ajoute la série des parts, que nous écrivons maintenant sous la forme de x^{-n} . Il développe les règles de calcul algébrique de façon encore plus systématique. Il procède à l’addition de quelques séries arithmétiques. Dans ses livres, les nombres sont écrits avec des mots et nulle part les chiffres d’origine indienne ne sont utilisés. Cela signifie-t-il une opposition entre différentes écoles ? Là-dessus les historiens ont des avis divergents.

2.5 Les fractions décimales

Les astronomes utilisaient des fractions sexagésimales. Dans leur système, chaque nombre de 1 à 59 était représenté par un signe de une ou deux lettres qu’on appelait système gumal. Ils utilisaient un signe particulier pour le zéro. La façon dont sont effectuées les opérations dans ce système a été décrite chez plusieurs auteurs dont *al-Kāshī* dans son livre *Clé de l’arithmétique* (1427). Les règles de calcul sur les exposants sont également détaillées dans ce livre. On voit apparaître dans ce livre les calculs sur les fractions décimales basées sur le même principe que les fractions sexagésimales : il introduit les puissances successives de un dixième. Les règles de conversion d’un système de représentation à l’autre sont explicitées, et des tables de conversion sont établies. Toute fraction décimale peut exactement s’écrire comme fraction sexagésimale, par contre certaines fractions sexagésimales qui ne sont pas des fractions décimales, sont seulement approchées. Pour plus de détail, on peut consulter le livre de *Youschkevitch*.

Les modes de représentation des nombres décimaux varient dans son livre. Soit il sépare la partie entière et la partie fractionnaire par une barre verticale. Soit

il écrit la partie fractionnaire en rouge. Soit il indique pour chaque chiffre décimal le rang qu'il occupe : dixième, centième, etc. Soit il indique seulement le rang du dernier chiffre qui de proche en proche détermine les autres.

L'origine des fractions décimales

L'origine des fractions décimales est beaucoup plus ancienne, bien que *al-Kāshī* revendique la paternité de cette découverte. On sait qu'elles étaient utilisées en Chine. On a retrouvé chez un auteur arabe, *al-Uqlīdīsī*, dans un texte de 952, l'usage de certaines fractions décimales. Des historiens en font le premier inventeur des fractions décimales ; d'autres comme *Rashed* contestent ce point de vue car l'usage des fractions décimales est fragmentaire et ne fait pas l'objet d'une théorie cohérente. Par contre *Rashed*²⁰ montre qu'une théorie complète des fractions décimales figure dans un traité de *al-Samaw'al* de 1172. Ce travail est lié au développement des calculs sur les polynômes considérés comme des tableaux de leurs coefficients et à la mise au point d'une méthode de calcul de racines basée sur ce qu'on appelle maintenant la méthode de *Ruffini-Horner*. L'invention des fractions décimales a donc plusieurs sources. La parenté avec le système des fractions sexagésimales, mais aussi tout le développement de l'algèbre sur les polynômes et la mise au point de méthodes d'approximation pour le calcul des racines²¹.

Il est certain que l'œuvre de *al-Kāshī* a été largement connue et que le calcul à l'aide des fractions décimales était répandu en Turquie au quinzième siècle. On a retrouvé des traces de documents arabes traduits en latin en Europe et qui utilisent des fractions décimales. Pourtant, pendant longtemps, *La Disme* de *Stevin* a été considérée comme l'invention des fractions décimales. Comme on le voit par les quelques indications précédentes, la réalité est plus complexe.

2.6 Les nombres réels et la théorie des proportions

Les *Éléments d'Euclide* ont joué un rôle fondamental dans la tradition mathématique arabe. Du huitième au quinzième siècle près de cinquante auteurs ont traduits, commenté ou remanié le texte d'*Euclide*. Les points qu'ils ont le plus commenté sont les questions fondamentales à savoir la théorie des parallèles, la théorie des proportions du livre 5 et la théorie des rapports de grandeurs exposée dans le livre 10²². Certains des mathématiciens arabes ont montré que la théorie des quantités irrationnelles du second degré devait être considérée comme une théorie arithmétique et que les transformations effectuées dans *Euclide* pouvaient être comprises sans le recours à la géométrie, mais comme des transformations

²⁰ L'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ et l'invention des fractions décimales.

²¹ *Rashed*, *Entre l'algèbre et l'arithmétique* dans Noël, *Le matin des mathématiciens...*

²²cf. *Youschkevitch*.

sur des nombres. Les quantités irrationnelles des Grecs acquièrent donc dans la science arabe le statut de nombres irrationnels.

Certains mathématiciens arabes comme *al-Khayyām* reprirent également la théorie des proportions, la critiquèrent et développèrent une théorie des proportions en étendant la notion de nombre à l'ensemble des réels positifs. Ils critiquèrent la définition donnée dans le livre 5, en considérant qu'elle ne donnait pas la vraie nature des proportions, à savoir la question de la mesure d'un rapport. Ils revinrent à la définition qui repose sur l'algorithme d'*Euclide* et la suite des quotients par la méthode d'antiphérèse. Deux rapports sont dits égaux s'ils définissent la même suite de quotients partiels. La comparaison de deux rapports est aussi définie à l'aide de la suite des quotients partiels. Ceci se trouve par exemple chez *al-Khayyām* dans un commentaire sur *Euclide* daté de 1077. Il a de plus le souci de montrer l'équivalence de sa théorie et de celle d'*Euclide*. Il oppose sa conception de nombre à celle des anciens Grecs.

2.7 Conclusion

On a vu que les mathématiciens chinois et indiens avaient élargi la notion de nombre à des nombres négatifs. Cet aspect ne fut pas repris par les Arabes (à l'exception d'un texte de *Abū l-Wafa* et du livre de *al-Samaw'al : Le livre magnifique en algèbre*). Par contre, ils élargirent la notion de nombre aux réels positifs et firent entrer explicitement les quantités irrationnelles dans le domaine des nombres. Ils développèrent considérablement la théorie des proportions en montrant que la théorie des rapports commensurables et des rapports incommensurables relevaient d'une même théorie et justifiaient les calculs sur les nombres irrationnels.

Par ailleurs, ils étendirent le calcul et la représentation décimale de position que les Indiens avaient inventée pour les entiers, aux nombres fractionnaires et firent une théorie des décimaux. Tous ces développements furent transmis à l'Europe. Furent-ils ensuite réinventés après une période d'oubli, ou bien le temps d'assimilation de telles avancées fut-il plus long qu'on ne le croit, étant donné l'absence d'application directe évidente de ces notations, rôle que joueront les logarithmes en Europe pour faire accepter ces notations ?