LES MATHÉMATIQUES GRECQUES

Table des matières

Il n'est pas possible de tracer ici les grandes lignes de l'histoire de la Grèce antique [1]. Les premières traces de la civilisation remontent à environ -2800. Vers -775 l'alphabet phénicien est utilisé pour transcrire la langue. On distingue deux périodes dans l'histoire grecque : la période classique de -600 à -300 et la période hellénistique ou alexandrine de -300 à 600.

Pour la connaissance des mathématiques de la période classique, on ne dispose pas de manuscrits originaux. Les sources que nous possédons sont des livres grecs écrits de 500 à 1500 ans après les œuvres originales, des transcriptions arabes d'œuvres grecques, des transcriptions latines d'œuvres arabes. Il y a des modifications lors des transcriptions, et il faut un grand travail de comparaison entre les différents manuscrits pour essayer d'établir le texte original. Pour les *Éléments d'Euclide*, il a été retrouvé un manuscrit de *Héron* et un manuscrit de *Théon* d'Alexandrie. On possède ainsi des œuvres d'*Euclide*, d'*Apollonius*, d'*Archimède*, de *Ptolémée*, de *Nicomaque*, de *Diophante*. *Eudèmes* avait écrit vers le quatrième siècle avant J.C. une histoire de la géométrie, une de l'arithmétique, une de l'astronomie qui ont été perdues, mais dont des fragments ont été conservés comme citations par d'autres auteurs. *Théophraste* (-372, -287) avait écrit une histoire de la physique. Des commentaires de *Pappus* (300), et de *Proclus* (410–485) sont conservés.

1 Les débuts des mathématiques grecques

Les Grecs ont toujours affirmé avoir trouvé en Égypte et en Mésopotamie les matériaux de base pour leur astronomie et leur géométrie. *Thalès* et *Pythagore*, *Démocrite* et *Eudoxe* ont, selon la tradition historique, voyagé dans ces pays. Aujourd'hui, seul un petit nombre de philosophes refusent de reconnaître l'apport essentiel de ces deux civilisations à la Grèce.

Les premiers mathématiciens grecs [2] sont issus d'Asie Mineure ; ce n'est pas un hasard, les liens économiques avec l'Égypte et l'empire assyrien étaient nombreux, et ces régions furent longtemps sous la domination des rois de Perse. Selon *Hérodote*, une bataille stoppant l'avancée des Perses vers l'Ouest fut arrêtée par une éclipse de soleil qui avait été prévue par *Thalès* de Milet (en -585), le premier des mathématiciens grecs. Or les astronomes babyloniens avaient accumulé des observations astronomiques sur de longues périodes et étaient capables de

[1] On se rapportera au tableau final du livre de M. *Serres*, *Éléments d'Histoire des sciences*, pour situer les dates des principaux mathématiciens et philosophes dont nous parlerons ainsi que des découvertes scientifiques.

[2] Pour l'histoire des débuts des mathématiques grecques, consulter les livres de *Heath*, tome 1, *A history of greek mathematics*, de *Caveing*, *La figure et le nombre* et *Pichot*, *La naissance de la Grèce présocratique*.

prévoir des éclipses. On peut penser que c'est auprès d'eux que *Thalès* a acquis le savoir qui lui a permis de prédire l'éclipse. *Hérodote* cite des exemples d'apports culturels de la Mésopotamie à la Grèce : le gnomon, un cadran solaire en forme d'hémisphère, la journée de 12 heures. Le début du développement des mathématiques grecques [3] s'est fait au carrefour de ces civilisations.

Nous allons maintenant situer rapidement les apports des principales écoles de mathématiques et de philosophie, en nous concentrant sur la question des nombres et du rapport du numérique et du géométrique. Les autres aspects seront passés sous silence.

1.1 L'école de THALÈS

La première école est celle de *Thalès* de Milet en Asie (-640, -546). *Thalès* était considéré comme un sage, qui avait fait des voyages pour affaires en Égypte. Il est supposé avoir calculé à l'aide d'un bâton la hauteur d'une pyramide, calculé la distance d'un bateau en mer.

Thalès est crédité de trois résultats importants : un diamètre partage un cercle en deux parties égales ; un angle inscrit dans un demi-cercle est droit ; dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux. Par contre les commentateurs ne parlent pas du théorème des lignes proportionnelles, qui n'est attribué à *Thalès* que par une tradition pédagogique française depuis un siècle.

L'apport de *Thalès* est d'avoir introduit des démonstrations en mathématiques, au lieu de résultats épars, tantôt justes, tantôt faux en usage jusque là. L'école de *Thalès* décline à la suite de la conquête perse de la région et le centre intellectuel se déplace de l'Asie vers le Sud de l'Italie.

1.2 L'école pythagoricienne

La deuxième école est celle de *Pythagore*, originaire de Samos, qui, après des voyages en Égypte et en Mésopotamie, s'installe dans le sud de l'Italie. *Pythagore* est le créateur d'une secte mystique et le fondateur d'une école mathématique. La tradition pythagoricienne dura plusieurs siècles. Les membres les plus connus sont *Pythagore* (-580), *Philolaus* (-400), *Archytas* (-428, -347), beaucoup plus tard *Nicomaque* et *Proclus* sont proches des conceptions pythagoriciennes. *Pythagore* défendait la théorie de la métempsycose et avait établi une société d'adeptes dont les connaissances étaient tenues secrètes. Il fut considéré comme un personnage légendaire dont le savoir était issu d'une révélation. Plus tard tous les travaux collectifs de cette école furent attribués à son fondateur [4].

[3] *Caveing, Les grecs avant* Euclide dans *Noël, Le matin des mathématiciens*.

[4] voir l'article *Pythagore* de l'*Encyclopædia Universalis*.

Sources

On ne sait pas comment *Pythagore* écrivait les nombres, aucun écrit direct de cette période n'ayant été conservé. Les pythagoriciens ont développé les débuts de l'arithmétique, une théorie des nombres figurés [5] où des entiers sont disposés, probablement à l'aide de cailloux, en forme de triangles, de polygones…et une théorie des nombres abondants et déficients.

Nous connaissons l'œuvre arithmétique des pythagoriciens, par le livre 7 des *Éléments d'Euclide* qui reprend la théorie des nombres pairs et impairs, du pgcd et du ppcm. La théorie des nombres figurés est reprise dans le livre d'arithmétique de *Nicomaque* (100) qui est certainement beaucoup plus proche des conceptions pythagoriciennes, quatre cents ans après *Euclide*. Ce livre de *Nicomaque* a joué un très grand rôle dans l'histoire de l'arithmétique.

En géométrie, les pythagoriciens ont obtenu différents résultats sur la somme des angles d'un triangle, sur des figures régulières et commencé à développer ce qu'on appelle «la méthode d'application des aires» [6]. Ont-ils démontré ces résultats ? Les auteurs ont des opinions diverses sur ce point. Il paraît probable qu'au début de l'école des résultats étaient généralisés sur la base de cas particuliers et que progressivement des démonstrations ont été introduites en supposant toujours que deux lignes quelconques sont commensurables.

Les nombres chez les pythagoriciens

Les pythagoriciens ont beaucoup travaillé sur les nombres et la musique. Probablement à cause de la découverte en musique du rôle des rapports d'entiers simples, les pythagoriciens ont fait du nombre la base de leur philosophie. Pour eux, le nombre entier était le principe de base de l'univers. Il faudra toujours comprendre *nombre* comme *nombre entier*.

Les pythagoriciens ont développé la théorie des nombres pairs et impairs, les nombres figurés, les triplets dits pythagoriciens. En liaison avec la musique, ils ont développé différentes moyennes. Ils ont également étudié les nombres parfaits, les nombres abondants et les nombres déficients. On pense qu'ils étudiaient les propriétés des nombres en les représentant à l'aide de cailloux.

Le pair et l'impair. Les nombres pairs étaient représentés par deux séries d'un même nombre de cailloux tandis que les nombres impairs comportent un caillou de plus «empêchant la division en deux à l'infini». À l'aide de ces représentations, il est facile de démontrer les théorèmes suivants du livre 7 des *Éléments d'Euclide*.

[5] *Mathématiques au fil des âges*, page 50 et suivantes.
[6] voir plus loin, l'algèbre géométrique.

Proposition 21 : toute somme de nombres pairs est paire.
Proposition 22 : la somme d'un nombre pair de nombres impairs est paire.
Proposition 23 : la somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire.
Proposition 24 et 26 : en soustraction, la différence de deux nombres de même parité est paire.
Propositions 25 et 27 : la différence de deux nombres de parités opposées est impaire.
Proposition 28 : si un nombre pair multipliant un nombre pair fait un nombre, le produit sera pair (avec pour corollaire que le carré d'un nombre pair est un nombre pair).
Proposition 29 : si un nombre impair multipliant un nombre impair fait un nombre, le produit sera impair (avec pour corollaire que le carré d'un nombre impair est un nombre impair).
Proposition 30 : si un nombre impair mesure un nombre pair, il mesure sa moitié.
Proposition 31 : si un nombre impair est premier avec un nombre, il sera premier avec son double.

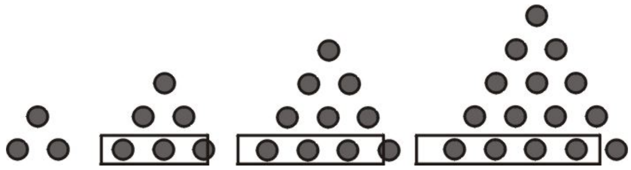
Les moyennes. Les pythagoriciens ont défini différentes moyennes : arithmétique, géométrique et harmonique, pour leur théorie musicale. Avec nos notations, on peut écrire ces différentes moyennes :
c moyenne arithmétique entre a et b : $a - c = c - b$ et $2c = a + b$,
c moyenne géométrique entre a et b : $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ et $c^2 = ab$,
c moyenne harmonique entre a et b : $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ et $c = \frac{2ab}{a+b}$.

Les nombres figurés

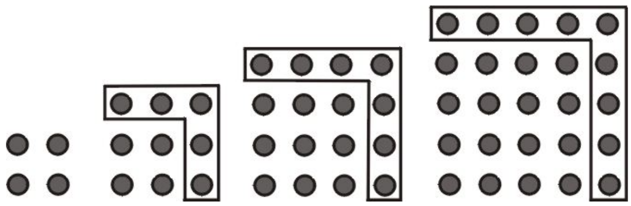
Le gnomon : on définit un gnomon[7] comme un nombre qui ajouté à un terme d'une classe consécutive de nombres figurés produit l'élément suivant de cette classe.

Nombres triangulaires : quand le premier terme d'une classe est l'unité et que les gnomons sont les entiers successifs, on obtient les nombres triangulaires. Les nombres triangulaires sont donc les nombres $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

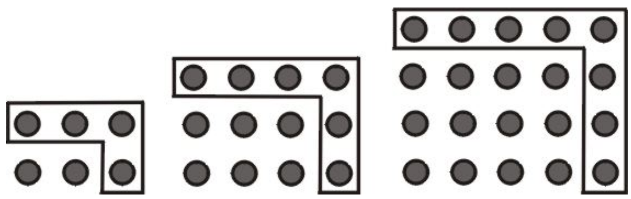
[7] *Serres, Gnomon : les débuts de la géométrie en Grèce.*



Nombres carrés : pour les nombres carrés, en ajoutant une figure en forme d'équerre au n-ième nombre carré, on obtient le $(n+1)$-ième nombre carré. Cette équerre représente le nombre $2n+1$; quand le premier terme d'une classe est l'unité et que les gnomons successifs sont les entiers impairs, cette classe est formée des nombres carrés. Les nombres carrés sont donc 1, 4, 9, 16, $25, \ldots$



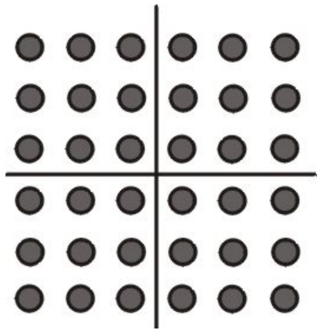
Nombres oblongs (ou hétéromèques) : un nombre oblong est défini dans *Euclide* comme un nombre du type $n(n+1)$ le nombre oblong suivant $(n+1)(n+2)$ s'obtient en ajoutant au nombre oblong $n(n+1)$ le gnomon $2(n+1)$; quand le premier terme d'une classe est 2 et que les gnomons successifs sont les entiers pairs, cette classe est formée des nombres oblongs. Les nombres oblongs sont donc les nombres 2, 6, 12, $20, \ldots$

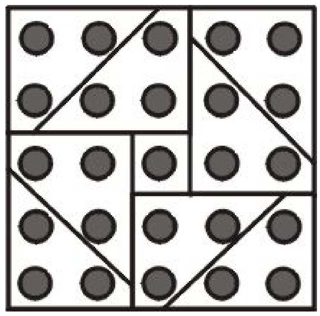


On remarque le statut ambigu de l'unité [8] qui est seulement *en puissance* un nombre triangulaire ou un nombre carré.

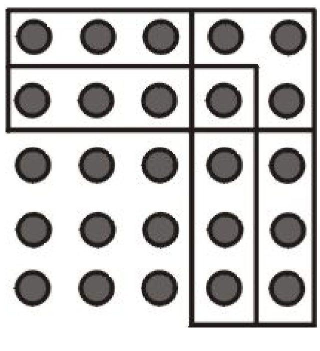
Formules et théorèmes : On peut, à l'aide des représentations figurées des nombres établir les théorèmes suivants :
- un nombre pair au carré est divisible par 4 ;
- un nombre impair au carré diminué d'une unité est divisible par 4 (on partage un nombre $(2n+1)^2$ en quatre rectangles $n(n+1)$ et un carré central) ;

[8] *Hallez* et *Nordon, «Un» est-il un nombre ?*

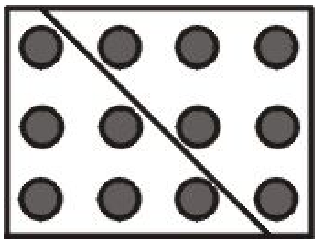




- un nombre carré impair diminué d'une unité est divisible par 8 (on partage chacun des rectangles obtenus précédemment en deux nombres triangulaires).
- un nombre carré est divisible par 3 ou le devient quand on lui retranche une unité (examiner le cas où n est divisible par 3, puis rajouter deux gnomons successivement) ;



- En partageant par une «diagonale» un nombre oblong, on obtient notre formule :
$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$
- En partageant un nombre carré suivant une «diagonale», on obtient une formule qui ne figure pas chez les pythagoriciens : la somme de deux nombres



triangulaires consécutifs est un nombre carré.

Les triplets pythagoriciens.

Il s'agit de caractériser les entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Si on revient à la représentation des nombres carrés figurés, cette situation se produit quand le gnomon est lui même un nombre carré. Proclus attribue à *Pythagore* les formules :

– soit un nombre impair N donné ; alors les nombres suivants forment un triplet pythagoricien : N, $\frac{N^2-1}{2}$, $\frac{N^2+1}{2}$;
– soit N un nombre pair donné ; alors les nombres suivants forment un triplet pythagoricien : N, $\left(\frac{N}{2}\right)^2 - 1$, $\left(\frac{N}{2}\right)^2 + 1$.

On peut établir ces formules à l'aide des représentations figurées. Le gnomon qui permet de passer d'un carré de coté n au suivant de coté $n+1$ vaut $2n+1$. En imposant qu'il soit un carré N^2, on obtient la première formule.

Le gnomon qui fait passer de n^2 à $(n+2)^2$ vaut $2n+1+2n+3$, donc $4n+4$. En imposant qu'il soit un carré N^2, on obtient la deuxième formule.

On constate donc que les connaissances grecques sur les triplets pythagoriciens étaient moins avancées que celles des babyloniens, qui savaient trouver d'autres triplets que ceux-là.

Apports et limites des pythagoriciens

Les pythagoriciens voyaient dans le nombre entier le principe de base de l'univers. La découverte dans l'école pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, (l'irrationalité de $\sqrt{2}$), a provoqué une crise philosophique. La légende dit que son auteur probable (sans doute vers -500), *Hippasus* de Métapont se serait noyé ou aurait été jeté par dessus bord d'un navire en punition de la rupture du secret. Avant la découverte de cette irrationalité de $\sqrt{2}$, les pythagoriciens identifiaient la géométrie et le numérique, puisque le le nombre entier était le principe de tout.

Après, les Grecs dans le domaine numérique se sont limités aux entiers et aux rapports d'entiers, tandis qu'en géométrie, ils considéraient les rapports de grandeurs commensurables ou incommensurables. Le problème fut de donner un fondement rigoureux à cette théorie des rapports de grandeurs. On voit cependant le changement fondamental de problématique introduit par les Grecs. Babyloniens et Égyptiens se posaient le problème de calculer des grandeurs et lorsqu'ils n'avaient pas de valeur exacte, ils les remplaçaient par des valeurs approchées. Les Grecs se posent la question de savoir si une grandeur peut ou non être représentée par un rapport d'entiers.

2 Crises et problèmes

2.1 Les paradoxes sur l'infini

Nous avons vu que pour les Grecs *nombre* $=$ *nombre entier*. Il s'agit toujours du dénombrement d'une collection discrète. Les rapports commensurables (les fractions), sont des relations entre des collections discrètes. Or les pythagoriciens ont découvert que des rapports de longueurs ne sont pas toujours exprimables par un rapport de deux nombres. La découverte des grandeurs irrationnelles par les pythagoriciens met en lumière une difficulté qui va préoccuper les Grecs ; il s'agit du rapport entre le discret et le continu.

L'école des Éléates

Au temps de *Zénon*[9] deux conceptions sur l'espace et le temps s'affrontent. Il s'agit de savoir si la droite est divisible à l'infini, ou s'il existe des longueurs insécables. Même chose pour les intervalles de temps. Pour les uns, espace et temps sont indéfiniment divisibles. Pour les autres, espace et temps sont constitués d'intervalles indivisibles. *Zénon* avança des paradoxes dont quatre nous sont connus par un texte d'*Aristote* ; deux sont dirigés contre la première hypothèse, deux contre la deuxième. Il s'agit du paradoxe de la dichotomie, de celui d'*Achille* et la tortue, du paradoxe de la flèche et de celui du stade et des rangées mobiles[10].

La dichotomie. Le mouvement de A à B est impossible, car pour arriver au but B, il faut d'abord arriver au milieu C. Pour arriver à C, il faut d'abord parvenir au milieu D de AC, etc. La réfutation d'*Aristote* dit qu'il y a deux façons d'être infini, en étendue et en divisibilité. Il est possible de parcourir la longueur AB en un temps fini car le temps est lui aussi divisible de la même façon.

***Achille* et la tortue.** *Achille* ne rattrapera jamais la tortue car lorsqu'il arrive à l'endroit où elle était précédemment, la tortue a avancé. *Achille* doit passer par

[9] *Heath, A history of Greek mathematical science*.
[10] *Mathématiques au fil des âges*, pages 127 à 130.

tous les points où est passée la tortue ; il ne peut la rattraper si passer d'un point à un autre prend une unité de temps.

La flèche. Si le temps est fait d'instants, à chaque instant la flèche est en un point, donc au repos. Le mouvement est donc impossible.

Les rangées mobiles. On suppose trois rangées de points A, B et C. La rangée A est fixe, les rangées B et C bougent d'une unité en sens contraire pendant un instant indivisible. Alors le déplacement relatif de B par rapport à C est de deux unités. On peut donc repérer un temps inférieur pendant lequel le déplacement relatif est d'une unité, ce qui s'oppose à l'hypothèse d'un instant indivisible.

Une nouvelle crise philosophique se développa. Elle fut ouverte par les paradoxes de *Zénon*. Elle pose le problème de la validité de résultats obtenus à l'aide de processus infinis que les Grecs utilisaient déjà. La réponse de la mathématique grecque fut d'éviter tout recours explicite à des processus infinis. Les écoles philosophiques grecques se divisent sur la nature du continu : *Le continu est-il indéfiniment divisible ?* et débattent sur la nature de l'infini : *L'infini est-il acceptable en mathématiques ? Quel usage peut-on en faire ?* Les réponses à ces questions adoptées par la mathématique grecque classique et en particulier par le philosophe *Aristote* détermineront les mathématiques jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle.

2.2 Les grands problèmes grecs

Un mathématicien nommé *Hippocrate* de Chios [11] a montré que certaines lunules avaient une aire égale à l'aire d'un triangle. Ce fut le point de départ du *problème de la quadrature du cercle* [12]. Est-il possible de construire à l'aide de la règle et du compas, un carré dont l'aire est égale à celle d'un cercle donné ?

Deux autres problèmes de constructions furent posés à cette époque. *Problème de la duplication du cube :* est-il possible, toujours à l'aide des mêmes instruments de construire un cube double d'un cube donné ? [13] *Problème de la trisection de l'angle :* peut-on partager un angle quelconque en trois parties égales avec la règle et le compas ?

Très vite, les Grecs ont montré qu'on pouvait ramener le problème de la duplication du cube à l'insertion de deux moyennes proportionnelles x et y entre 1

[11] ne pas confondre avec un médecin du même nom.

[12] voir *Heath*, *Caveing* et *Knorr*, *The ancient tradition of geometric problems*.

[13] Ce problème était aussi appelé *problème de Delos* : La légende dit que victimes d'une épidémie, les habitants de Delos consultèrent l'oracle qui leur demanda de doubler l'autel (en forme de cube), du dieu Apollon. Les habitants construisirent un autel de côté double du précédent, et l'épidémie continua...

et 2 :

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

ce qui se vérifie aisément avec nos méthodes de calculs. Plus tard, une solution de ce problème fut trouvée, à l'aide d'intersection de coniques dans l'espace. Pour le problème de la trisection de l'angle, les Grecs inventèrent une courbe appelée trisectrice. Les grecs ont inventé des instruments pour résoudre ces problèmes, mais ces méthodes pratiques furent violemment rejetées par les philosophes et les mathématiciens. Il s'agissait d'obtenir une solution théorique de ces problèmes qui ont alimenté des travaux mathématiques pendant deux millénaires, jusqu'à la démonstration de leur impossibilité. Ces problèmes sont exprimés sous forme géométrique ; ils auront une solution plus de deux mille ans plus tard comme des problèmes sur les nombres et leur nature, dans le cadre de la théorie des corps, donc en algèbre, ainsi que l'explique Felix *Klein* dans son remarquable livre *Leçons sur certaines questions de Géométrie Élémentaire*.

2.3 La crise des irrationnelles

Pourquoi écrire irrationnelles et non irrationnels ? Irrationnel veut dire nombre irrationnel, ce qui n'a pas de sens pour les mathématiques grecques où nombre désigne toujours nombre entier pendant la période classique puis nombre entier ou fractionnaire à partir de la période hellénistique. Ici irrationnelle désigne grandeur irrationnelle, notion qui prend un sens pour la mathématique grecque.

Les irrationnelles

On ne dispose d'aucune trace précise de la découverte de l'incommensurabilité de lignes. On a seulement des témoignages de commentateurs *Pappus*, *Proclus* [14] et *Iamblicus* qui écrivent plus de sept siècles après les faits. *Pappus* la situe dans la secte pythagoricienne à propos de la diagonale du carré, et l'attribue à *Hyppasius*, *Proclus* l'attribue à *Pythagore*. *Iamblicus* situe cette découverte des irrationnelles non pas pour la diagonale du carré, mais pour le partage d'un segment en extrême et moyenne raison, c'est à dire à propos du nombre d'or. Les textes de *Platon* et d'*Aristote* plus proches des pythagoriciens la situent dans la secte pythagoricienne et parlent de la diagonale du carré.

Aristote dit que si la diagonale était commensurable avec le côté, alors un même nombre serait pair et impair. On suppose que la diagonale et le coté sont commensurables, et que l'unité de longueur est contenue m fois dans la diagonale et n fois dans le coté, les entiers m et n n'étant pas tous les deux pairs car sinon

[14] *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide*.

on utiliserait une unité double. D'après le théorème de *Pythagore*, on a $m^2 = 2n^2$, ce qui montre que m^2 est pair et donc que m est pair. En posant $m = 2m'$ et en reportant dans l'égalité, on obtient en simplifiant par 2 l'égalité $2m'^2 = n^2$ qui montre que n est pair et ceci est en contradiction avec l'hypothèse que m et n ne sont pas tous les deux pairs. Cette démonstration n'utilise que des connaissances arithmétiques des pythagoriciens.

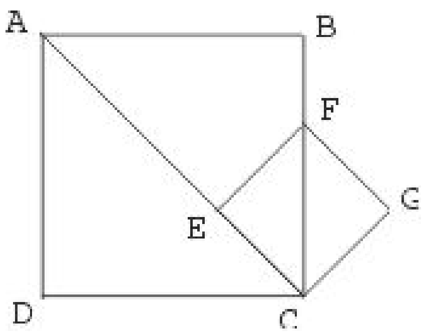
La méthode d'antiphérèse

On connaît une autre démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale avec le côté du carré que celle par le pair et l'impair évoquée par *Aristote*. Elle repose sur la méthode d'antiphérèse [15] (ou méthode de soustraction réciproque). On appelle ainsi l'algorithme de recherche d'une commune mesure entre deux lignes décrit dans le livre 10 des *Éléments d'Euclide*.

Soient deux lignes a et b. On peut en retranchant un certain nombre de fois la plus petite b de la plus grande a, et en recommençant avec b et r, écrire une suite d'égalités :

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, \quad r_0 < b_0, \\ b &= r_0 q_1 + r_1, \quad r_1 < r_0, \\ r_0 &= r_1 q_2 + r_2, \quad r_2 < r_1, \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Soit un carré $ABCD$. On reporte sur la diagonale AC une longueur AE égale au côté AB et on mène la perpendiculaire à la diagonale en E qui coupe le côté BC en F. Il est facile de montrer que les triangles rectangles ABF et AEF qui ont leurs diagonales confondues et un côté AB égal au côté AE, sont égaux. Donc $BF = EF$. Le triangle EFC est un triangle rectangle qui a un angle de 45 degrés donc il est isocèle et $EF = EC$.



Appliquons maintenant l'algorithme de recherche d'une commune mesure. Une mesure commune à AC et AB est une commune mesure à AB et EC donc à AB et BF. Si on construit le carré $EFGC$, on est ramené à la recherche d'une commune mesure entre la diagonale FC et le côté EC. On recommence et on obtient un nouveau carré semblable au précédent. Cela montre que le processus ne se termine pas. Il n'y a donc pas de commune mesure.

[15] *Itard, Les livres arithmétiques d'*Euclide.

Une méthode d'approximation de $\sqrt{2}$.

Ce procédé a fourni aux Grecs le moyens de trouver un algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$, appelé algorithme du coté et de la diagonale.

On pose $FC = d$, $EC = s$, alors si on évalue le côté du carré $ABCD$ et sa diagonale en fonction de d et de s, on obtient $AB = d + s$ et $AC = d + 2s$. Définissons une double suite :

$$d_{n+1} = d_n + 2s_n, \qquad s_{n+1} = d_n + s_n.$$

On obtient facilement que

$$d_{n+1}^2 - 2s_{n+1}^2 = 2s_n^2 - d_n^2.$$

Il suffit alors de se donner pour point de départ [16] des deux suites $s_0 = 1$ et $d_0 = 1$ pour obtenir $+1$ ou -1 pour la quantité $d_n^2 - 2s_n^2$. La suite des rapports $\frac{d_n}{s_n}$ converge vers $\sqrt{2}$. Les premières valeurs sont $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ utilisé par *Aristaque*, $\frac{17}{12}$ utilisé par *Héron*. Il est intéressant de calculer les premières fractions et de constater que cet algorithme converge moins vite que celui de Babylone. Il est probable que c'est plutôt de cette façon qu'était utilisée la procédure d'antiphérèse.

Cet algorithme revient, avec les notations qui sont les nôtres, à faire un développement en fraction continue :

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}$$

Si nous écrivons de cette façon le développement de $\sqrt{2}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) \\
\sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \\
\sqrt{2} &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}} \\
\sqrt{2} &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}
\end{aligned}$$

[16] ce point de départ n'a aucune signification géométrique puisqu'il n'existe pas de carré dont la diagonale *et* le côté soient égaux à 1.

On peut aussi noter $\sqrt{2} = \langle 1, 2, 2, 2, 2, \ldots \rangle$.

On peut constater que cet algorithme fournit les mêmes approximations que l'algorithme du coté et de la diagonale. Si $\frac{p_n}{q_n}$ est une approximation, la valeur suivante se calcule comme :

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$$

Une définition des rapports de grandeurs avant EUDOXE

Suite à la crise des irrationnelles, les Grecs se sont posé le problème de définir rigoureusement le rapport de grandeurs comme le rapport de deux longueurs, ou de deux aires, ou de deux solides. Certains auteurs [17] pensent que l'algorithme dit d'*Euclide* ou d'antiphérèse était utilisé avant *Eudoxe* pour définir les rapports de grandeurs. Il est probable que le rapport des deux grandeurs a et b a d'abord été défini par la suite des quotients partiels q_0, q_1, $q_2, \ldots$ pour trouver une solution à la crise des irrationnelles. On peut alors comparer deux rapports (suivant la parité du premier indice du nombre q_i qui est différent dans deux rapports a/b ou c/d). Pour des grandeurs a et b commensurables, au bout d'un nombre fini d'opérations, le quotient q_i est nul. Des grandeurs a et b incommensurables sont des grandeurs pour lesquels le processus est infini.

2.4 L'école de PLATON

Platon est un philosophe et non un mathématicien. Il a fait des voyages, entre autres en Italie du sud où il rencontra le pythagoricien *Archytas*. Son œuvre et sa pensée sont exposées dans des dialogues, où il met en scène Socrate et des personnages historiques. Les thèmes mathématiques sont souvent pris comme exemple de mode de pensée rigoureux. L'école de *Platon* est une école philosophique qui fut très liée à certains mathématiciens comme *Théodore* et *Théétète*.

Pour *Platon*, les nombres et les figures n'ont rien de sensible. Ce sont des réalités qui existent indépendamment de notre connaissance, dans un «monde» d'Idées, dont le «monde» physique n'est qu'un reflet imparfait, (mythe de la caverne). Ce thème philosophique est encore d'actualité, lorsqu'on pose la question, *les mathématiques sont-elles découvertes ou inventées ?*

— Si on répond découvertes, on se situe dans une philosophie platonicienne qui considère que les objets mathématiques préexistent à leur découverte par les mathématiciens qui font figure d'explorateurs d'un monde inconnu, (ce qu'on appelle suivant les cas le *réalisme platonicien* ou l'*idéalisme platonicien*) ;

[17] *Knorr, The evolution of Euclidean Elements.*

— Si on répond inventées, on se situe dans une autre philosophie qui fait des mathématiques le pur produit de notre activité intellectuelle.

On pourra sur ce thème lire le livre de J.P. *Changeux* et A. *Connes Matière à penser* qui est la reprise de ce débat entre un grand mathématicien et un biologiste spécialiste du cerveau.

Le rôle de Platon en mathématiques

Bien que non mathématicien, *Platon* a joué un grand rôle pour les mathématiques grecques en systématisant les règles de démonstration et en insistant sur les preuves et les démonstrations comme caractéristiques de l'activité mathématique.

Il faut se souvenir ici des règles en vigueur dans la société grecque. Les activités commerciales et artisanales sont le fait d'esclaves et considérées comme indignes des hommes libres. La démocratie athénienne est réservée à ces citoyens libres qui disposent de temps et de richesses pour des spéculations intellectuelles désintéressées. Il n'y aura pas de développement d'activités expérimentales ou appliquées dans le domaine scientifique considéré comme un domaine purement spéculatif. En ce qui concerne les nombres, on assiste à une coupure entre les calculs concrets, la *logistique* qui est du domaine des marchands et les spéculations sur les nombres entiers et leurs propriétés qui forment *l'arithmétique* et marquent le début de la théorie des nombres.

Les dialogues de Platon

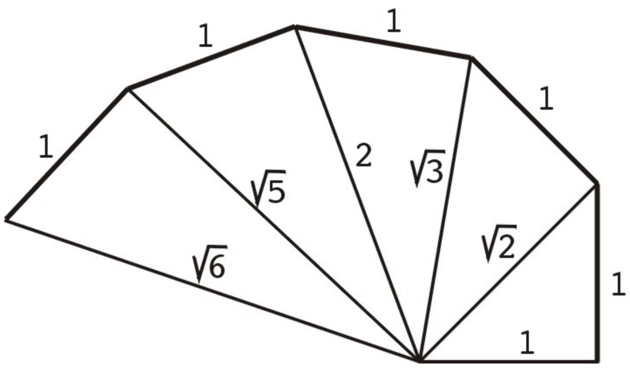
Le dialogue de *Platon «Le* Ménon» entre *Socrate* et *Ménon* montre que le doublement du carré était familier et bien connu à son époque. *Socrate*, pour prouver à *Ménon* ses conceptions sur la connaissance, (on n'apprend rien, on redécouvre des connaissances antérieures,) fait réaliser le doublement d'un carré par un jeune esclave.

Le dialogue de *Platon*, *«Le* Théétète» a donné lieu à beaucoup de spéculations. Dans ce texte, *Platon* présente un mathématicien, *Théétète*, qui vient de mourir, au moment où, dans sa jeunesse, il était élève du mathématicien *Théodore* et alors que *Socrate* avait rendu visite à son maître.

> *Théétète* : «*Théodore* que voici nous avait tracé quelques figures à propos des racines et nous avait montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point pour la longueur commensurables avec celles de un pied, et les prenant ainsi, l'une après l'autre, il était allé jusqu'à celle de dix sept pieds et il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là. Il nous vint alors à l'esprit en considérant que les racines sont en nombre infini de les rassembler sous un terme unique qui nous servirait à nommer toutes les racines».

> SOCRATE : «et ce terme, l'avez vous trouvé ?»
> THÉÉTÈTE : «je le crois : juges en toi-même...
>
> Nous avons divisé tous les nombres en deux classes : les uns, les nombres qui peuvent être formés par la multiplication de facteurs égaux, nous les avons représentés sous la figure du carré et nous les avons appelés carrés et équilatères...
>
> Pour les nombres placés entre les premiers, comme le trois, le cinq et tous les nombres qui ne peuvent être formés en multipliant des facteurs égaux, mais seulement en multipliant un plus grand par un plus petit ou un plus petit par un plus grand et qui s'expriment toujours par une figure aux côtés inégaux, nous les avons représentés sous la figure du rectangle et nous les avons nommés rectangulaires...
>
> Toutes les lignes dont le carré forme un nombre plan équilatère, nous les avons définies longueurs, et toutes celles dont le carré forme un nombre aux facteurs inégaux, nous les avons définies racines, parce qu'elles ne sont point commensurables avec les autres pour la longueur, mais seulement pour les aires qu'elles ont le pouvoir de former. Et nous avons opéré de même pour les solides.»

Ce texte a suscité beaucoup de recherches en histoire des mathématiques pour trouver l'explication du dix sept. En gros, il y a deux modes d'explications ; l'une est la construction de ce qui est appelé l'escargot de *Pythagore* constitué de triangles rectangles de coté 1 et $\sqrt{2}$, 1 et $\sqrt{3}$,..., 1 et $\sqrt{17}$, car la figure boucle à cette étape. La deuxième mode d'explication est de voir jusqu'où la démonstra-



tion par le pair et l'impair est praticable [18]. C'est ce qui va être présenté ci-dessous. *Knorr* [19] emploie quant à lui des arguments de divisibilité par 2, 3, 4 qui sont attestés chez des auteurs grecs plus tardifs comme *Théon*.

[18] *Hardy* et *Wright*, *An introduction to the theory of numbers*.
[19] *Knorr*, *The evolution of Euclidean Elements*.

Par ailleurs, d'une certaine façon, on peut considérer que ce texte marque le passage d'un point de vue purement géométrique, à un point de vue numérique, au moins partiellement. Pour *Platon* c'est une façon de présenter *Théétète* comme celui qui a fait progresser la théorie des nombres.

La démonstration par le pair et l'impair

Tout d'abord, il est facile de voir que la démonstration utilisée pour $\sqrt{2}$ vaut pour des entiers pairs $6, 8, 10, 14$ qui ne sont pas des carrés, le cas de 12 se ramène facilement au cas de $\sqrt{3}$ et le cas de 16 est évident puisque 16 est un carré.

Il reste à s'occuper de $3, 5, 7, 11, 13, 15, 17$. Nous allons grouper ces entiers en plusieurs familles.

Remarquons d'abord que si on a $A^2 = NB^2$, avec A et B non tous deux pairs, N étant impair, cela oblige que A et B soient impairs.

$A = 2a + 1$ et $B = 2b + 1$. Alors $A^2 = NB^2$ se traduit par :

$$4a(a + 1) + 1 = N[4b(b + 1) + 1]$$

$N = 4n + 3$ Ceci recouvre les cas des entiers $7, 11, 15$. L'égalité précédente se réécrit :

$$4a(a + 1) + 1 = (4n + 3)[4b(b + 1) + 1]$$

$$4n[4b(b + 1) + 1] + 12b(b + 1) + 3 = 4a(a + 1) + 1$$

$$8nb(b + 1) + 2n + 6b(b + 1) + 1 = 2a(a + 1)$$

Un nombre pair est égal à un nombre impair : impossible.

$N = 8n + 5$ Ceci recouvre les cas des entiers 5 et 13. Si on réécrit la même égalité, on obtient :

$$4a(a + 1) + 1 = (8n + 5)[4b(b + 1) + 1]$$

$$8n + 32nb(b + 1) + 20b(b + 1) + 5 = 4a(a + 1) + 1$$

$$2n + 8nb(b + 1) + 5b(b + 1) + 1 = a(a + 1)$$

Un nombre pair égal à un nombre impair, ce qui est impossible.

$8n + 1$ Ceci recouvre le cas 17.

$$17[4b(b + 1) + 1] = 4a(a + 1) + 1$$

$$17b(b + 1) + 4 = a(a + 1)$$

Égalité de deux nombres pairs qui ne permet pas de conclure.

Justification actuelle

Bien sûr, les démonstration actuelles utilisent la décomposition en facteurs premiers. Un nombre est le carré d'un entier si et seulement si tous les exposants des facteurs premiers qui figurent dans sa décomposition sont pairs. Tout nombre entier dont un des exposants des facteurs premiers qui figurent dans sa décomposition est impair est un nombre irrationnel.

La démonstration de ce fait utilise le théorème de Gauss. On suppose que l'on a $A^2 = Nb^2$. On va, en utilisant la décomposition en facteurs premiers de N isoler les exposants pairs des facteurs premiers et mettre N sous la forme $N = n^2 \times p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_i$, où les nombres premiers p_j sont deux à deux distincts. On montre que A est divisible par n et que $A = n \times A_1$. On traite ensuite l'égalité ${A_1}^2 = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_i \times B^2$. On montre que A_1 est divisible par p_1 ; $A_1 = p_1 \times A_2$, on remplace dans l'égalité précédente et on montre que B aussi est divisible par p_1. Ce qui est contradictoire avec le caractère irréductible de la fraction $\frac{A}{B}$.

2.5 L'école d'ARISTOTE

On connaît le rôle très important au Moyen Âge de la logique d'*Aristote* $(-384, -322)$ [20]. *Aristote* discute les définitions et les principes de base des mathématiques. Il distingue axiomes et postulats. Il élabore la distinction entre les notions d'infini actuel et infini potentiel, étendant à la notion d'infini la distinction qu'il établit entre les deux modalités de l'existence : l'existence en acte et l'existence en puissance. Qu'entend-on par existence en puissance ? Donnons l'exemple d'un bloc de pierre dont un sculpteur veut faire une statue. Avant sa réalisation la statue n'existe qu'en puissance, après, elle existe en acte. En mathématiques, on désigne par infini potentiel un infini qui est le résultat d'un processus. Par exemple si un grec dit qu'il y a une infinité d'entiers, cela veut dire que pour tout entier, on peut en trouver un plus grand. De même, si on dit qu'un segment de la droite est indéfiniment divisible, cela veut dire que si à chaque étape on prend la première moitié du segment précédent, ce processus ne s'arrête pas. Donnons a-contrario des exemples d'infini actuel. Quand on parle aujourd'hui de l'ensemble des entiers, on a un objet mathématique constitué d'une infinité d'entiers que l'on considère comme existants. C'est un infini actuel. De même lorsqu'on s'autorise à penser un segment comme l'ensemble de ses points, on utilise un infini actuel.

Le continu est-il indéfiniment divisible ? L'infini est-il acceptable en mathématiques ? Quel usage peut-on en faire ?

Les réponses adoptées par le philosophe *Aristote* détermineront les mathématiques jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle :

— le continu est indéfiniment divisible,

[20]voir *Kline* et *Heath*.

— seul l'infini potentiel est acceptable,
— l'infini actuel est rejeté.

Le rejet de l'infini actuel entraîne la nécessité de trouver une autre définition du rapport des grandeurs incommensurables que celle donnée par la suite infinie des quotients dans l'algorithme d'antiphérèse qui, selon certains historiens des mathématiques comme *Knorr*[21], a été utilisée après la découverte de l'incommensurabilité de longueurs. On trouve cette définition, attribuée à *Eudoxe,* dans le livre 5 des *Éléments d'Euclide,* consacré aux rapports de grandeurs.

3 Les rapports de grandeurs

3.1 EUDOXE et l'école de Cysique

Eudoxe, né en -408 en Asie mineure, après différents voyages en Égypte rejoint *Platon.* Après différentes tentatives faites par d'autres mathématiciens, *Eudoxe* apporte une solution à la crise des irrationnelles. Il introduit formellement la notion de grandeur géométrique, (en pratique, les longueurs, les aires et les volumes, les angles et les arcs de cercle), grandeurs continues opposées à la notion de nombre. Il introduit la notion de rapport de deux grandeurs de même espèce, sans assigner de valeurs numériques à ces grandeurs. Il définit l'égalité de deux rapports appelée proportion et une notion d'ordre sur des rapports de grandeurs, indépendamment de toute considération numérique. La théorie d'*Eudoxe* est développée dans le livre 5 des *Éléments* d'*Euclide,* qui reprend l'œuvre d'*Eudoxe*.

Cette théorie très abstraite est tout à fait remarquable. On peut montrer qu'elle est logiquement équivalente à la théorie des coupures de *Dedekind*[22]. Elle eut l'avantage de permettre de grands progrès en géométrie en donnant une solution rigoureuse à la crise ouverte par la découverte de l'irrationalité de la diagonale du carré. Elle illustre par son exemple la nécessité d'asseoir sur la base d'axiomes dont la vérité est reconnaissable, l'ensemble de l'édifice mathématique à l'aide d'une méthode déductive. Elle eut des inconvénients. Le premier fut d'instaurer une coupure entre le numérique et le géométrique. Pour deux mille ans, la géométrie parut la seule science rigoureuse. Elle eut aussi l'effet d'inverser les centres d'intérêt en mathématiques du nombre vers la géométrie et conduisit à un abandon des domaines algébrique et numérique. Les entiers et les rapports d'entiers sont développés indépendamment des rapports de grandeurs dans les livres 7, 8, 9 des *Éléments d'Euclide*.

Une coupure profonde fut instaurée d'avec les activités pratiques jusqu'à la période alexandrine qui reprendra en partie l'héritage babylonien. On peut, en

[21] *Knorr, The evolution of Euclidean Elements...*
[22] publiée dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle.

résumé, dire que sur les deux usages que nous avons actuellement du nombre, dénombrement et mesure, il y a eu coupure chez les Grecs, le dénombrement relève du numérique, la mesure appartient au géométrique. Le lien ne sera rétabli que deux mille ans plus tard. Tout le développement de ce que nous désignons comme l'algèbre sera fait sous la forme de calcul sur des grandeurs appelé *l'algèbre géométrique* des Grecs, et dont nous donnerons des exemples. Simplement pour illustrer, disons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre pour les Grecs, mais la diagonale du carré de côté 1, que π n'est pas un nombre, mais le rapport de la longueur du cercle à son diamètre.

3.2 Les *Éléments d'Euclide*

On sait très peu de choses sur *Euclide*[23]. On est presque sûr qu'il vécut à Alexandrie vers -300. Il est surtout connu pour être l'auteur des *Éléments*[24], livre synthèse des *connaissances mathématiques de base* antérieures, en particulier des élèves de l'école de *Platon*. D'autres auteurs avant lui ont rédigé des *Éléments* synthétisant les connaissances mathématiques de leur temps : *Eudoxe*, *Théétète*, etc. Ces livres sont perdus. Il est tout à fait sûr qu'ils se retrouvent dans ceux d'*Euclide* et la recherche historique a permis d'attribuer dans les *Éléments* différents livres à ces auteurs. Les *Éléments* ne sont pas une encyclopédie et *Euclide* a écrit sur les coniques qui ne figurent pas dans les *Éléments* un autre livre.

Les *Éléments* furent longtemps considérés comme un modèle de rigueur qui établit tout l'édifice mathématique à partir de quelques prémisses appelées axiomes et postulats, et progresse de théorème en théorème à l'aide de déductions logiques. Avez-vous entendu parler du cinquième postulat dit postulat des parallèles, qui sera une source de travaux pour deux mille ans, jusqu'à l'invention des géométries non euclidiennes ?

Les grandeurs chez EUCLIDE

Les quatre premiers livres traitent des grandeurs géométriques, avant de définir les rapports. Qu'est-ce qu'une grandeur chez *Euclide* ? Les grandeurs ne sont nulle part définies dans les *Éléments d'Euclide*. Par le contexte, nous voyons les notions d'égalité, de comparaison et de rapport de grandeurs fonctionner pour des segments (désignés par le mot droite), des figures planes, (triangles, rectangles, cercles, polygones, morceaux de plan),

[23] *Caveing,* Euclide dans *Noël, Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques.*

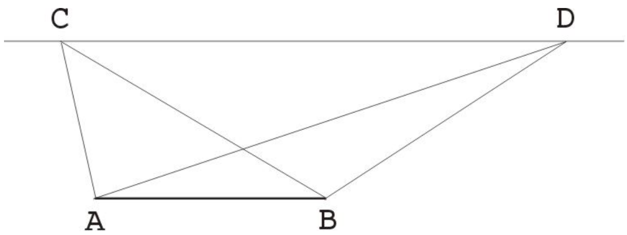
[24] *Euclide, Les Éléments,* traduction *Peyrard* ; *Euclide Les Éléments,* traduction *Vitrac* ; *Euclid The Elements,* traduction *Heath*

– liées à la juxtaposition : Additionner deux grandeurs de même nature : les juxtaposer. Multiplier une grandeur par un entier n : juxtaposer n grandeurs égales à la grandeur donnée.
– liées à un produit de grandeurs : produit de deux longueurs : construire le rectangle sur ces deux longueurs ; application d'une surface sur une longueur : trouver un rectangle égal à cette surface, dont le côté est la longueur donnée, (sorte de division) ; produit de trois longueurs, (ou d'une surface et d'une longueur) : construire le parallélépipède droit sur ces trois longueurs, (ou sur cette surface et la longueur donnée). Un produit de plus de trois longueurs ou de deux surfaces, etc... n'a donc pas de sens.

L'égalité de figures comme les triangles, les carrés... n'est pas vraiment définie. Elle correspond intuitivement à l'idée occupe autant de place dans le plan et mathématiquement correspond à notre notion : ont des aires égales.

Donnons un exemple avec un théorème très utilisé par *Euclide* :

> Les triangles qui sont entre les mêmes parallèles et qui ont la même base sont égaux.

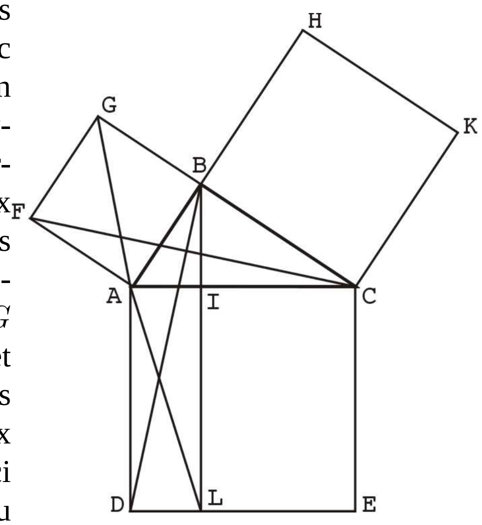


Le théorème dit de *Pythagore* est la proposition 47 du livre 1. Il utilise pour sa démonstration le résultat précédent.

> Dans un triangle rectangle, le carré du coté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Nous comprenons cet énoncé comme un énoncé entre des nombres : on mesure les trois côtés, on calcule le carré de chacun des nombres et le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux côtés de l'angle droit. Rien de tel dans le texte euclidien. Nous conservons le langage d'*Euclide* sur les *égalité* de surfaces.

On construit un carré sur chacun des côtés du triangle rectangle ABC. Soient les carrés $ABGF$, $BCKH$, $ACED$. Avec des critères définis précédemment, on montre que le carré construit sur l'hypoténuse peut être découpé par la perpendiculaire BIL au côté DE en deux rectangles égaux aux carrés construits sur les côtés. On montre par la proposition précédente que les triangles AFG et AFC sont égaux ; puis que ABD et ALD sont égaux. Enfin à l'aide d'un des cas d'égalité des triangles sue les deux triangles AFC et ABD sont égaux. Ceci montre l'égalité du carré $ABGF$ et du rectangle $AILD$.



Les rapports de grandeurs

Ici nous parlons essentiellement de l'histoire du concept de nombre. Dans le cinquième livre est exposée la théorie des proportions, égalité de rapports de grandeurs, notion géométrique et non numérique. On définit l'égalité de deux rapports, on montre comment les comparer. Nulle part, il n'est question d'additionner des rapports. Même chose pour les rapports d'entiers définis dans un autre livre. La recherche du pgcd de deux nombres est faite par l'algorithme d'*Euclide* dans le livre 7. La recherche d'une mesure commune à deux grandeurs est faite dans le livre 10.

Dans les livres d'arithmétiques (livres 7, 8, 9) les nombres sont représentés par des lignes, le produit de deux nombres par un rectangle. Cependant le traitement de ces livres n'est pas géométrique. On ne sait pas si pour *Euclide* la notion de grandeur inclut ou non la notion d'entier. Probablement pas, sinon un traitement séparé des rapports de nombres et des rapports de grandeurs ne se justifierait pas. Pourtant dans le livre 10, proposition 5, il parle d'une proportion dont deux termes sont des grandeurs et deux termes des nombres.

Dans le livre 10, *Euclide* opère une classification des grandeurs incommensurables. Il étudie en fait des quantités qui selon nos notations se mettent sous la forme $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$... Il reprend là le travail de *Théétète* sur les différentes irrationnelles.

Les définitions du livre 5

Pour mieux suivre le texte du livre 5, nous allons donner les premières définitions telles qu'elles figurent dans le texte euclidien et leur traduction en langage moderne. Nous allons introduire une notation A/B pour écrire un rapport, notation qui n'est jamais utilisée dans le texte d'*Euclide*. Cela nous permettra de comprendre comment les Grecs ont pu se passer du numérique pour leur algèbre géométrique.

> Définition 1 : Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
>
> Définition 2 : Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

Il faut comprendre *mesure* au sens de «est contenue un nombre entier de fois dans...». A est une partie de B si il existe un entier n tel que $B = nA$.

> Définition 3 : Une raison est une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entre elles, suivant la quantité.
>
> Définition 4 : Une proportion est une identité de raisons.

Définition 4 très vague qui introduit la raison de deux grandeurs homogènes, soit deux longueurs, soit deux aires, soit deux volumes. La raison n'est pas vraiment définie.

> Définition 5 : Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

C'est ce qu'on appelle maintenant l'*axiome d'Archimède*. On définit une raison entre deux grandeurs A et B si on peut trouver deux entiers n et m tels $A < nB$ et $B < mA$. Cette définition est une précaution prise par *Euclide* qui connaissait l'exemple de l'angle entre un cercle et sa tangente, *angle corniculaire*, pour lequel on ne peut définir de raison avec aucun angle de droite.

> Définition 6 : Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

Cette très importante définition de l'égalité de deux raisons ou proportion est centrale dans le texte euclidien. On dit que A et B ont même raison que C et D, lorsque pour tous les entiers m et n possibles, on a seulement les trois cas :

– si $nA > mB$ alors $nC > mD$,
– si $nA = mB$ alors $nC = mD$,
– si $nA < mB$ alors $nC < mD$.

Cette définition suppose que les grandeurs A et B sont homogènes et les grandeurs C et D aussi.

Dorénavant nous ne donnons pas le texte euclidien, le lecteur ayant un idée de la difficulté introduite par un texte en toutes lettres sans notation. En donnant une idée du contenu du livre 5, nous avons montré que les raisons ou rapports ne sont pas des nombres. Pour une réflexion sur le livre 5 des *Éléments*, le livre de Jean *Dhombres*[25] et le volume 2 des *Éléments* traduits par *Vitrac* en analysent les différentes propositions de façon détaillée, ce qui dépasse le propos de ce livre.

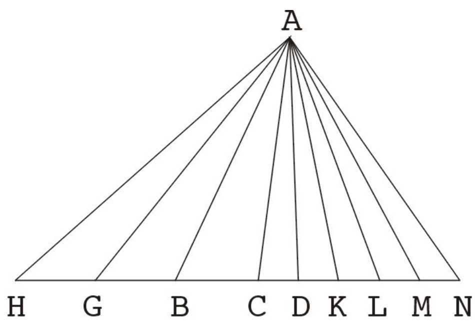
Le livre 6

Il est très important de souligner que cette définition 5 du livre 5 est opérationnelle et sert effectivement dans des démonstrations par exemple celle de la proposition 1 du livre 6 :

> Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases

Soit à montrer que les deux triangles ABC et ACD sont entre eux comme leurs bases BC et CD (voir figure ci-dessous).

On prend des équimultiples à la fois de la base BC et du triangle ABC en plaçant les points G et H. On prend d'autres équimultiples de la base CD et du triangle ACD en plaçant les points K, L, M, N. L'application de la définition 5 résulte du fait que les triangles AHC et ADN sont toujours rangés dans le même ordre que leurs bases HC et DN.



Euclide ne calcule pas avec les rapports. Ce ne sont pas des nombres, mais des entités géométriques que l'on sait comparer. Toutefois il existe une exception dans la proposition 23 du livre 6 :

> Les parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison composée des côtés.

où *Euclide* parle d'une raison composée qu'il n'a pas définie dans le livre 5. Cela montre que dès le texte euclidien, la tendance à opérer avec des rapports qui devait

[25] *Dhombres, Nombre, mesure et continu — épistémologie et histoire.*

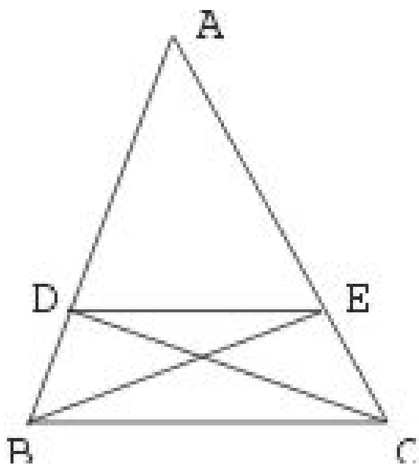
exister dans la logistique courante puisqu'on calculait avec les fractions, commençait. Cela confirme l'opinion de Jacob *Klein*[26] qui suppose que dès le début, les résultats du livre 5 ont enrichi la logistique de la vie pratique et que s'est développée une logistique savante que nous verrons à l'oeuvre chez *Archimède*, une génération plus tard. Cela montre que l'idéal d'un texte entièrement axiomatisé, sans faille logique est un mythe. Une autre faille est signalée plus loin.

Les méthodes de démonstration des *Éléments*

La méthode des aires consiste à passer, pour démontrer des égalités entre lignes, (respectivement des égalités de rapports de lignes), par des égalités d'aires, (respectivement des égalités de rapports d'aires). La méthode des aires est utilisée dans la proposition 2 du livre 6.

> Si on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle ; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au coté restant du triangle[27].

Soit à démontrer dans un triangle ABC que la parallèle DE au côté BC coupe proportionnellement les côtés AB et AC. Avec la proposition 1 du livre 6, on obtient :
AD est à DB comme ADE est à EDB,
AE est à EC comme ADE est à EDC.
Il suffit ensuite de montrer l'égalité des triangles EDB et EDC, triangles de même base entre les mêmes parallèles, pour avoir la proposition.



La méthode d'exhaustion est une méthode par inventaire de cas. Elle consiste à montrer une égalité ou une égalité de rapports en faisant une double démonstration par l'absurde : le premier (rapport) ne peut être plus grand que le second, ensuite, le premier (rapport) ne peut être plus petit que le second, il y a donc égalité. Cette méthode est utilisée par exemple dans la proposition 2 du livre 12 : *Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons*

On démontre que $C/C' > R^2/R'^2$ est impossible.

[26] *Klein, Greek mathematical thought and the origin of algebra*.
[27] que nous appelons en France le théorème de Thalès dans un triangle.

On démontre que $C/C' < R^2/R'^2$ est impossible.

On en déduit que $C/C' = R^2/R'^2$

Euclide utilise pour ces démonstrations l'existence d'une quatrième proportionnelle, démontrée seulement dans le cas des longueurs. C'est une autre faille logique dans la structure des *Éléments*.

Quadratures et cubatures dans les *Éléments d'Euclide*. Quarrer une surface plane, c'est construire à la règle et au compas un carré égal à la surface donnée. Cuber un solide, c'est construire à la règle et au compas, le côté d'un cube égal au solide donné. La notion de quadrature au sens associer à une surface et à une unité d'aire un nombre n'existe pas chez *Euclide*. On ne trouve aucune formule de calcul d'aire ou de volume, bien que de nombreux problèmes de quadrature et de cubature soient traités.

La théorie des proportions dans les *Éléments*, bilan

1. D'une façon générale, en simplifiant, on peut dire qu'on n'opère pas sur les rapports de grandeurs. On compare des rapports de grandeurs, en établissant des égalités ou des inégalités de rapports.
2. Les problèmes de quadratures et de cubatures sont traités dans ce cadre de la théorie des rapports de grandeurs, de façon purement géométrique.
3. Dans les livres 7 à 9 d'arithmétique, sont établies les propriétés des entiers et des rapports d'entiers. Certaines propriétés des proportions sont donc établies deux fois : une fois pour les grandeurs au livre 5 et une fois pour les nombres (entiers) au livre 7.
4. Le livre 10 introduit la notion de *grandeurs commensurables* qui ont entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre, et de *grandeurs incommensurables* qui n'ont pas entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre.

3.3 L'algèbre géométrique des Grecs

Nous allons ici essayer de donner une idée de la façon dont les Grecs traitaient les problèmes qui se ramènent pour nous à des solutions d'équations du premier et du second degré. Le traitement est entièrement géométrique et utilise les rapports de grandeurs.

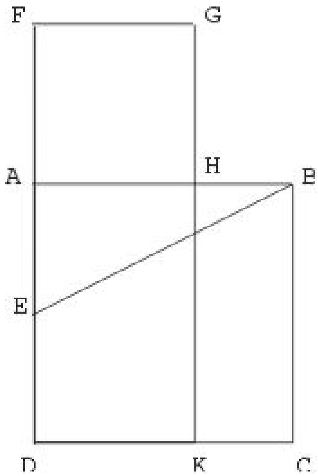
Appliquer une aire a^2 sur une longueur b donnée, veut dire construire une longueur x telle que le rectangle de côtés b et x ait pour aire l'aire a^2 donnée. On appelle ce problème, *problème parabolique*. Le *problème elliptique* consiste à construire un segment x tel que le rectangle de côtés x et $b - x$ ait pour aire a^2. Le *problème hyperbolique* consiste à construire un segment x tel que le rectangle de côtés x et $b + x$ ait pour aire a^2. C'est là l'origine des mots parabole, ellipse et hyperbole.

Ainsi la proposition 11 du livre 2 d'*Euclide*

> Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.

sera appelée plus tard partager un segment en extrême et moyenne raison, c'est-à-dire trouver un partage en deux du segment, tel que le rapport du tout a au plus grand x soit égal au rapport du plus grand x au plus petit $a - x$. Autrement dit avec nos notations $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, soit pour $a = 1$, $x^2 + x - 1 = 0$ qui a pour solution le nombre d'or.

Soit $ABCD$ an carré de côté a. On cherche le point H sur AB tel que le carré $AHGF$ soit égal au rectangle $HBCK$. Sur AD, on prend le milieu E et on porte EF sur DA, du côté de A, égal à EB. Un calcul simple justifie la propriété cherchée. (*Euclide* la justifie à l'aide de propriétés montrées au début du livre 2 et du théorème de Pythagore).



Toutes les équations étaient donc traitées en terme de constructions géométriques, à effectuer et justifier.

4 La période alexandrine

Après *Archimède* $(-287, -212)$ [28], les principaux mathématiciens sont *Hipparque* (vers -140), *Ménélaüs* (vers 100) et *Ptolémée* (90–170), puis *Héron* (vers 150) et enfin *Diophante* (vers 270). Nous ne détaillerons pas les œuvres des mathématiciens de cette époque qui voit un grand développement de la géométrie sphérique et surtout la création et le développement de la trigonométrie. *Ptolémée* établit dans l'Almageste des tables de cordes (sinus) qui feront autorité pour mille ans.

[28] *Dhombres*, Archimède dans Noël, *Le matin des mathématiciens*, *Heath History of Greek mathematics*, et *Authier* Archimède *le canon du savant* dans *Serres* et le numéro spécial de Sciences&Avenir.

Nous allons plutôt préciser les changements intervenus dans la conception des nombres, par rapport à l'époque classique.

4.1 Les nombres

On a vu chez les Grecs une coupure entre la logistique, qui rassemble les méthodes de calcul pratique et l'arithmétique en tant que théorie des nombres. On sait très peu de choses sur les techniques de calcul. Les Grecs depuis le début de la période classique utilisaient l'abaque pour leurs calculs. On ne sait pas comment les mathématiciens du début de cette période notaient les nombres ni la date exacte des changements dans la notation des nombres. On ne possède aucun livre de la période de *Thalès* à *Euclide* sur le calcul. On a vu qu'*Archimède* avait inventé un système de notation des grands nombres dans son calcul des grains de sable de l'univers [29].

On connaît bien le système de notation des nombres avec des lettres, utilisé pendant la période alexandrine. À cette époque, pour les opérations arithmétiques, on voit apparaître une disposition en colonnes avec une colonne des unités, une des dizaines, etc. ce qui représente un grand progrès par rapport aux calculs antérieurs.

Apparition d'un zéro

Chez *Ptolémée* on voit apparaître un symbole de zéro. Pour la partie fractionnaire des nombres, il utilise dans ses calculs astronomiques les fractions sexagésimales babyloniennes. Un nombre s'écrit donc un entier, suivi d'une liste de nombres de 1 à 59. Lorsqu'un de ces nombres manque, il utilise le symbole o, première lettre d'un mot grec qui veut dire vide ou rien, et qui en notation alphabétique des nombres signifie 70 pour noter une place vacante. Aucune ambiguïté n'est alors possible. Il s'agit d'un premier sens du zéro, comme place vide au sein de la partie fractionnaire d'un nombre, écrite en sexagésimal.

Nouvelle conception des fractions

La conception des Grecs sur les fractions subit aussi une grande évolution. On sait que les Grecs de la période classique considéraient les entiers comme les seuls nombres existant. Les fractions ne pouvaient exister en tant que nombres puisque les Grecs considéraient comme impossible la division de l'unité. Les rapports de nombres entiers étudiés dans les chapitres d'arithmétique des *Éléments d'Euclide* fournissent cependant une base théorique solide pour les calculs de fractions utilisés librement dans la vie pratique. Avec la période alexandrine, un changement

[29] *Archimède, L'arénaire.*

s'opère dans cette conception [30]. Dans les textes d'*Archimède*, les fractions sont considérées comme des nombres. Une notation pour les fractions apparaît. Par exemple la fraction $\frac{13}{29}$ est notée : $\iota\gamma'\kappa\theta''\kappa\theta''$. Dans les textes mathématiques de *Héron* et de *Ptolémée* aussi bien les fractions égyptiennes que les fractions sexagésimales babyloniennes sont utilisées systématiquement dans les travaux de trigonométrie et dans les textes d'astronomie. La plupart du temps, les parties entières des nombres sont notées en base décimale non positionnelle avec des lettres, et les parties fractionnaires sont notées à l'aide de fractions sexagésimales écrites avec ces mêmes lettres. La grande différence dans cette époque est donc que les fractions interviennent comme des nombres. Toutefois nous n'avons retrouvé aucune trace de discussion sur le concept de fraction.

Nouvelles approximations

Pour les calculs de racines carrées de grands progrès sont faits. On trouve chez *Platon* une approximation de $\sqrt{2}$ par $\frac{7}{5}$ (obtenue sans doute avec l'idée que 49, le carré de 7, est à peu près le double de 25, celui de 5). De la même façon $\sqrt{3}$ est approché par $\frac{7}{4}$ parce que $\frac{48}{16}$ est peu différent de $\frac{49}{16}$. *Archimède* obtient un encadrement de $\sqrt{3}$:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

(qui fournit 4 décimales exactes) probablement en utilisant plusieurs fois la formule :

$$a + \frac{b}{2a+1} < \sqrt{a^2+b} < a + \frac{b}{2a}$$

Il définit un encadrement de π entre $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{1}{7}$, soit entre $3{,}1408$ et $3{,}1429$. Il montre que le coefficient de proportionnalité entre le périmètre et le diamètre du cercle est le même qu'entre l'aire et le carré du rayon du cercle, en montrant que l'aire du cercle est égale à l'aire d'un triangle rectangle ayant pour coté le rayon et le périmètre du cercle [31].

Théon fournit une approximation plus précise de $\sqrt{3}$ par $1 + \frac{43}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}$ qui fournit 6 décimales exactes.

Héron résout des problèmes de recherche de racines carrées et cubiques sans aucune référence à la géométrie. Ses livres sont des livres de problèmes à la façon égyptienne et babylonienne. Il est juste de considérer son œuvre comme un développement, sur la base des mathématiques grecques des calculs d'aires et de volumes égyptiens dont il reprend certaines formules. *Héron* établit une formule

[30] Jacob *Klein, Greek mathematical thought and the origin of algebra*.

[31] *Archimède, La mesure du cercle*.

qui permet d'obtenir l'aire S d'un triangle de côtés a, b, c et de périmètre $2p$:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Pour le calcul des racines carrées, *Héron* emploie différentes méthodes dont une revient à l'algorithme babylonien de calcul de racines. Voici l'exposé par *Héron* d'une méthode de calcul de $\sqrt{720}$

> Puisque 720 n'a pas de coté rationnel, nous extrairons le coté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour coté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$; ajoute 27, cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié : cela fait $26\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ En fait $26\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons $720\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729, et en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.
> Les Métriques.

4.2 Renouveau de l'arithmétique et de l'algèbre

Arithmétique et algèbre pendant cette période reprennent les traditions babyloniennes et égyptiennes et deviennent indépendantes de la géométrie, au travers des œuvres arithmétiques d'*Archimède*, *Apollonius*, *Ptolémée*, *Héron*, *Nicomaque* et *Diophante*[32].

NICOMAQUE

Nicomaque de Gérase[33] vécut vers l'an 100 non loin de Jérusalem. Il écrit une introduction à l'arithmétique en deux livres sans aucune référence à la géométrie. Il reprend la tradition pythagoricienne et ne présente pas de démonstration générale mais plutôt des exemples. Il écrit des tables de multiplication. Ce livre a joué dans l'Antiquité et le Moyen Âge un rôle considérable, comme celui des *Éléments d'Euclide*, au travers d'une adaptation faite par *Boèce* au sixième siècle. En effet, ce dernier livre faisait partie du quadrivium, corpus des études classiques au Moyen Âge qui comprenait l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique. Le livre de *Nicomaque* n'est pas vraiment un livre de mathématiques, mais plutôt une compilation de ce qui est nécessaire pour comprendre l'œuvre de *Pythagore* et celle de *Platon*. Il développe également le côté mystique de la théorie pythagoricienne.

[32] volume 2 de l'Histoire des mathématiques grecques de *Heath*.
[33] *Mathématiques au fil des âges* pages 50 à 56.

DIOPHANTE

Diophante[34] a écrit une *Arithmetica* en treize livres. Seuls, jusqu'à une date récente, six ont été retrouvés. Dans ses livres apparaissent pour la première fois l'utilisation de lettres pour noter une inconnue, son carré, son cube. Il définit les puissances sans référence à la géométrie et peut donc écrire des puissances 2, 3, 4, 5, 6-ièmes, sous la forme du carré-carré, du carré-cube, du cubo-cube. On peut donc considérer qu'il est le premier inventeur d'un symbolisme algébrique. Il cherche des solutions d'équations indéterminées qu'il ramène à un certain nombre de types. Il accepte seulement des racines positives rationnelles de ces équations et en cas de racines irrationnelles, indique comment modifier l'équation pour obtenir une équation à racines rationnelles. Pour lui, les fractions sont des nombres. Il utilise des coefficients négatifs et énonce une règle des signes pour le produit.

Quelles sont les limites de son travail ? Il n'utilise jamais de lettres pour les coefficients des équations mais travaille toujours sur des exemples. Ses livres sont des livres de problèmes et d'exemples sans donner de méthodes générales et sans présenter une structure déductive. Cependant, ils ont joué un rôle considérable pour la théorie des nombres, on peut les considérer comme un des grands traités de mathématiques de l'Antiquité, dont la découverte à la Renaissance a joué un rôle considérable dans le renouveau de l'arithmétique.

5 Apports et limites des mathématiques grecques

La civilisation grecque dura jusqu'à la conquête arabe. Cependant son déclin était déjà amorcé pendant les premiers siècles de l'ère chrétienne[35].

En mathématiques, elle a apporté une nouvelle conception d'une science déductive fondée sur des preuves, alors que toutes les civilisations antérieures utilisaient des savoirs acquis par des raisonnements par analogie, par expérimentation et généralisation à partir d'exemples. Les Grecs ont été les premiers à poser une exigence de logique, de non contradiction, à exiger des preuves d'existence avant de poser une définition.

Ils ont considérablement développé la géométrie plane et solide, créé la trigonométrie plane et sphérique, la théorie des nombres, en étendant les arithmétiques babylonienne et égyptienne. Leurs travaux sur la détermination des aires et la méthode d'exhaustion ont constitué une base pour le développement ultérieur de l'analyse.

Quelles sont les limites de leur travail ? Ils ont été dans l'incapacité de saisir le

[34]voir *Heath*.

[35]*Caveing, D'Alexandrie à Byzance* dans *Noël, Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques*.

concept de nombre irrationnel et se sont concentrés sur la géométrie comme seule susceptible d'avoir une base rigoureuse. Ils ont échoué à comprendre la nature des processus infinis et ont opéré une coupure entre le discret qui relève des nombres et le continu qui relève de la géométrie.

5.1 Problèmes légués par les grecs

Quels sont les problèmes laissés par les Grecs à leurs successeurs ? Les problèmes du premier ou du second degré sont résolus par des méthodes géométriques. Il n'y a pas de fondements logiques pour la théorie des nombres et les Alexandrins utilisent les entiers et les fractions librement à la manière des Égyptiens et des Babyloniens. La rigueur est limitée à la géométrie et la géométrie est en partie limitée à des problèmes de constructions à la règle et au compas. Le problème du cinquième postulat des parallèles est entier. Les problèmes posés par l'évacuation de l'infini du champ des mathématiques aussi. À la fin de la période classique grecque, la notion de nombre est étendue aux fractions, d'autres quadratures et cubatures sont démontrées (*Archimède*), des approximations d'irrationnelles par des fractions sont réalisées, (*Héron*). Mais pour les grecs le comptage relève du numérique et la mesure des grandeurs relève de la géométrie, sauf éventuellement dans le cas des grandeurs commensurables. Deux questions sont léguées à leurs successeurs, questions que nous retrouverons dans les civilisations suivantes, dont les mathématiques se sont fondées sur les textes grecs :

Quelle est la nature de ces rapports géométriques, qu'on peut encadrer par des nombres, approcher autant qu'on veut par des nombres ?

Peut-on donner une définition plus simple des rapports et des proportions que celle d'*Euclide* ?

6 documentation

Dhombres Jean, *Nombre, mesure et continu — épistémologie et histoire,* Cedic Fernand Nathan, 1978.
André Pichot *La naissance de la science 2 Grèce présocratique,* Folio Essais.
IREM *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques,* Ellipses, 1993. D. Daumas et M. Guillemot, *Faut-il toujours raison garder ?*
Noel, *Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques,* présentés par Emile Noel, Belin, 1990.
Serres Michel, *Éléments d'histoire des Sciences,* Bordas, 1989. M. Serres, *Gnomon, les débuts de la géométrie en Grèce* et de M. Authier, *Archimède, le canon du savant.*

Sources plus spécialisées

J Aymes, *Ces problèmes mathématiques qui font les mathématiques (la trisection de l'angle,* publication de l'APMEP numéro 70.
Baccou Robert, *Histoire de la science grecque. De Thalès à Socrate,* Aubier Editions, 1951.
Bkouche, *Autour du théorème de Thalès,* Irem de Lille, 1994.
Euclide, *Les Eléments, (deux tomes, traduction F.Peyrard),* A.Blanchard.
Euclide, *Les Eléments, (deux volumes, traduction B. Vitrac),* Puf.
Euclid, *The thirteen books of Elements, (3 vol, translation by T.Heath),* Dover.
Heath, *History of greak geometry,* 2 vol, Dover.
Jacob Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra,* Dover.
Knorr *The ancient tradition of geometric problems.* Dover
Lloyd Geoffrey, *Les débuts de la science grecque, de Thalès à Aristote,* Maspero, 1974.
K. Menninger *Numbers Words and numbers symbols* Dover 1958
π *numéro spécial supplément au Petit Archimède 1980*
George Sarton, *Ancient science through the golden age of Greece,* Dover.
Proclus de lycie *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide,* Desclées de Brouwer 1948.