L'histoire de l'algèbre et des équations algébriques jusqu'au dix-neuvième siècle

par Eliane Cousquer, (avril 2001)
Laboratoire LAMIA

Table des matières

---

1 Les problèmes du premier degré

Les problèmes que nous traduisons aujourd'hui par des équations

$$y = a \times x \quad \text{ou} \quad y = a \times x + b$$

ont depuis l'antiquité été traités par des méthodes arithmétiques que l'on qualifie aujourd'hui de méthodes de fausses positions. Les historiens des mathématiques, même s'ils ne sont pas d'accord sur l'existence d'une méthode explicite chez les babyloniens et les égyptiens, reconnaissent une longue tradition au Moyen Orient de méthodes qui furent théorisées sous le nom de simple fausse position dans le premier cas et de double fausse position dans le deuxième et expliquées par les arabes par analogie avec l'équilibre des plateaux d'une balance [1].

Les problèmes des égyptiens

Pour l'essentiel les calculs faits dans les problèmes du *papyrus de Rhind*, (principal document mathématique qui nous reste,) se ramènent à des équations du premier degré. Par exemple le problème 26 demande :

> *Une quantité et son quart font* 15. *Quelle est la quantité ?*
> *La solution est la suivante :*
> *calculer avec* 4 *; prends le quart,* 1 *; ensemble* 5 *;*
> *calculer avec* 5 *pour obtenir* 15 *:* $\quad 3$
> enfin est faite la multiplication $4 \times 3 = 12$

Le principe de cette méthode a été appelé plus tard la méthode de fausse position.
Soit la résolution de l'équation : $a \times x = b$.
On part d'une valeur x_0 telle que le calcul de $a \times x_0$ soit facile. Ici $x_0 = 4$
et on ramène le calcul de x à $\frac{b}{a \times x_0} \times x_0$, (en termes modernes).
Voici une série de problèmes du papyrus de Rhind qui utilisent la même technique et se présentent sous la forme :
Une quantité et son n^e *vaut* p. *Quelle est cette quantité ?*
La technique de résolution est toujours en trois étapes, que nous pouvons dans nos notations, décrire ainsi.

– Opérer avec n, faire le n^e, obtenir le total $n + 1$.
– Calculer avec $n + 1$ pour obtenir p. On obtient $q = \frac{p}{n+1}$
– Multiplier q par n.

Problème 24 : *une quantité et son* 7^e *vaut* 19. *Quelle est cette quantité ?*
Problème 25 : *une quantité et son demi vaut* 16. *Quelle est cette quantité ?*
Problème 27 : *une quantité et son* 5^e *vaut* 21. *Quelle est cette quantité ?*

[1] voir *Histoire d'algorithmes*

Même si on trouve quelques extractions de racines pour des nombres bien choisis, les Égyptiens n'ont guère dépassé le stade des équations du premier degré, vu les obstacles très grands causés par un système de nombres inadéquats, en particulier les fractions limitées chez les égyptiens aux parts, c'est-à-dire aux fractions $\frac{1}{n}$.

Les méthodes arithmétiques ne seront pas détaillées ici et l'intérêt se portera sur les problèmes de degré supérieur.

2 La résolution de problèmes chez les babyloniens

Les mathématiques babyloniennes

La plupart des textes que nous avons sont des tables de calcul et des tables de problèmes, souvent rangés dans un ordre systématique, suivant une complexité croissante. Nous avons l'habitude de présenter des règles générales avant de spécifier l'application de ces règles ou algorithmes à des valeurs particulières. Dans les textes babyloniens, la procédure générale n'est jamais indiquée. Faisait-elle l'objet d'une transmission orale ? Les textes présentent une procédure sur un exemple ou sur une liste d'exemples particuliers par une liste de calculs faisant référence aux tables précitées, suite de consignes données à l'apprenti scribe : *«prends ce nombre, prends son carré…, le résultat est…»* La procédure générale devait-elle être induite à la suite de ces exemples ? Nul ne sait.

Ce type de mathématique est dite *numérique*, car traitée uniquement sur des exemples numériques. Les calculs numériques et leurs applications à différents domaines, calculs d'intérêts, calculs économiques, astronomie, jouent un rôle central. Même les textes géométriques sont plutôt un cas particulier d'application de calculs numériques. Les textes mathématiques babyloniens comportent une liste de mots et de nombres, mais aucun symbolisme de signes opératoires par exemple. La structure des textes présente des traits communs avec ceux des textes égyptiens, chinois et arabes ultérieurement. On peut les caractériser comme *rhétoriques* car les problèmes sont spécifiés avec des mots du langage courant, *numériques*, car les calculs sont toujours faits sur des exemples précis et *algorithmiques* car ils décrivent des procédures pour arriver à un résultat.

Cependant, vu le caractère particulier des termes sumériens employés en mathématiques, conservés avec leur sens dans la langue akkadienne, certains auteurs pensent que cette terminologie marque le début d'un symbolisme algébrique. En effet, il y a un certain détachement du dessin et du son dans les textes mathématiques, alors que la terminologie des textes égyptiens est beaucoup plus concrète. Le développement de l'algèbre est l'œuvre d'abord des Arabes dans la même région, trois millénaires plus tard. Un historien des mathématiques *Hoyrup* [2] insiste beaucoup sur cette continuité culturelle en mathématiques au Moyen Orient.

L'algèbre babylonienne

À part les tablettes de calcul, les textes babyloniens [3] sont constitués de listes de problèmes avec leurs solutions [4]. Lorsqu'on analyse ces problèmes, une grande partie se ramène à des équations simples. Les Babyloniens savaient résoudre beaucoup de problèmes du premier et du second degré [5]. Voici des exemples qui nous permettront de voir concrètement la signification de mathématiques rhétoriques, numériques et algorithmiques dont nous avons parlé précédemment. En voici la traduction :

Un premier problème

Longueur, largeur.
J'ai multiplié longueur et largeur, j'ai obtenu l'aire. J'ai ajouté à l'aire l'excès de la longueur sur la largeur : $3{,}3;$
En outre, j'ai additionné longueur et largeur : 27
Demandés longueur, largeur et aire [6].
On suit cette méthode :
ajouter $27;$ et $3{,}3;$ on trouve $3, 30;$
ajouter $2;$ et $27;$ on trouve $29;$
prendre la moitié de $29;$ on trouve $14; 30$
prendre le carré de $14; 30$ on trouve $3, 30; 15$
retrancher à $3, 30; 15$ le nombre $3, 30;$ on trouve $0; 15$
la racine carrée de $0; 15$ est $0; 30$
ajouter $14; 30$ et $0; 30$ longueur $15;$
retrancher à $14; 30$ $\quad 0; 30$ largeur $14;$
soustraire $2;$ qui a été ajouté à $27;$ de $14;$ $\quad 12;$ est la largeur présente
multiplier $15;$ (longueur) par $12;$ (largeur) l'aire est $3, 0;$
retrancher à $15;$ $\quad 12;$ on obtient $3;$
ajouter $3, 0;$ et 3 on obtient $3, 3;$

[2] *Hoyrup, Les quatre cotés et l'aire, sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes*.

[3] Tablette 13901 du British Museum, datant de -1750, traduite et commentée par *Thureau Dangin*.

[4] *Van der Waerden, Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics, Caveing Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte ancienne* et *Ritter Babylone 1800* et *Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie*.

[5] *Talon, Introduction aux mathématiques babyloniennes* dans *d'*Imhotep *à* Copernic.

[6] AO8862, prisme du Louvre.

Pour comprendre la suite des calculs, nous allons les retranscrire dans nos notations algébriques :

$$\begin{aligned} xy + x - y &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned}$$

La solution fait intervenir une inconnue auxiliaire $y' = y + 2$ et se ramène au système :

$$\begin{aligned} xy' &= 183 + 27 \\ x + y' &= 29 \end{aligned}$$

Ce problème, trouver deux nombres dont on connaît la somme $S = x + y$ et le produit $P = xy$ était un problème classique. Les Babyloniens utilisaient pour cela l'identité facile à obtenir à l'aide de découpages, que nous écrivons aujourd'hui :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

La méthode revient à dire, (en désignant par x le plus grand des deux nombres et par $E = \frac{x-y}{2}$ leur demi-différence,) cherchons :

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{S}{2} + E \\ y' &= \tfrac{S}{2} - E \\ (\tfrac{S}{2} + E)(\tfrac{S}{2} - E) &= (\tfrac{S}{2})^2 - E^2 \\ (\tfrac{S}{2})^2 - E^2 &= P \\ E &= \sqrt{(\tfrac{S}{2})^2 - P} \end{aligned}$$

Bien entendu les calculs sont effectués en numération sexagésimale.

Un deuxième problème

> La surface du carré ajoutée au côté égale $;45$
> tu poseras 1 l'unité
> tu fractionneras 1 en 2, on trouve $;30$
> tu croiseras par $;30$, on trouve $;15$
> tu ajouteras $;15$ et $;45$, on trouve 1
> c'est le carré de 1
> tu soustrairas de 1 les $;30$ que tu as croisés, on trouve $;30$
> c'est le côté du carré.

Voyons ce que donne ce problème [7] en l'algébrisant : Nous allons partir de la mise en équation :

$x^2 + bx = c$ avec $b = 1$ et $c =; 45$
tu prends b, tu le fractionnes en 2, tu obtiens $\frac{b}{2} =; 30$
tu l'élève au carré : $(\frac{b}{2})^2 =; 15$
tu ajoutes c et $(\frac{b}{2})^2$,
tu cherches la racine carrée du nombre obtenu $c + (\frac{b}{2})^2$
tu soustrais du nombre obtenu $\sqrt{c + (\frac{b}{2})^2} =; 30$ le nombre $\frac{b}{2} =; 30$
tu obtiens $; 30$, c'est le coté du carré.

Un troisième problème

On trouve une série de problèmes qui se ramènent à trouver deux nombres x et y, ($x > y$), connaissant leur différence et leur produit. Par rapport au calcul précédent, le nombre $E = \frac{x-y}{2}$ est connu et on cherche $\frac{S}{2}$ par le même type de calculs. Voici l'un de ces problèmes [8].

> La surface du carré moins le côté égale $14, 30;$
> tu poseras 1 l'unité
> tu fractionneras 1 en 2 tu trouveras $; 30$
> tu croiseras par $; 30$ tu trouveras $; 15$
> tu ajouteras à $14, 30;$ tu trouveras $14, 30; 15$
> c'est le carré de $29; 30$
> tu ajouteras les $; 30$ que tu as croisés à $29; 30$ tu trouveras $30;$
> c'est le côté du carré.

Un quatrième problème

> 7 fois le coté de mon carré et 11 fois la surface égale $6; 15$
> tu inscriras 7 et 11
> tu croiseras 11 et $6; 15$ tu trouveras $1, 8; 45$
> tu fractionneras 7 en 2 tu trouveras $3; 30$
> tu croiseras $3; 30$ tu trouveras $12; 15$
> tu ajouteras $12; 15$ et $1, 8; 45$ tu trouveras $1, 21;$
> c'est le carré de $9;$
> tu soustrairas les $3; 30$ que tu as croisés de $9;$ tu trouveras $5; 30$
> l'inverse de 11 ne peut être dénoué

[7] Premier problème étudié par *Thureau Dangin*.
[8] Deuxième problème étudié par *Thureau Dangin*.

que dois-je croiser à 11 qui donnes $5;30$? $\quad ;30$
c'est le coté du carré [9].

On constate que le scribe commence à multiplier par 11 ce qui pour nous donne $11x^2 + 7x = \frac{25}{4}$, et travaille donc avec $(11x)^2 + 7 \times (11x) = 11 \times \frac{25}{4}$. Il peut appliquer l'algorithme précédent, mais à la fin du calcul, il devra diviser par 11 le résultat obtenu. Comme 11 n'a pas d'inverse, le scribe cherche directement le nombre x qui multiplié par 11 donne le résultat qu'il a obtenu $5;30$.

Avec cette méthode les Babyloniens pouvaient donc résoudre des problèmes du second degré. Un certain nombre d'identités remarquables étaient connues ; elles peuvent être établies par simples décompositions de figures. Une liste de problèmes traités par les Babyloniens peut être trouvée dans le livre de *Van Der Waerden* ; elle est reproduite dans le livre de *Colette*.

3 L'algèbre géométrique des Grecs

Nous allons ici essayer de donner une idée de la façon dont les Grecs traitaient les problèmes qui se ramènent pour nous à des solutions d'équations du premier et du second degré. Le traitement est entièrement géométrique et utilise les rapports de grandeurs.

Appliquer une aire a^2 sur une longueur b donnée, veut dire construire une longueur x telle que le rectangle de côtés b et x ait pour aire l'aire a^2 donnée. On appelle ce problème, *problème parabolique*. Le *problème elliptique* consiste à construire un segment x tel que le rectangle de côtés x et $b - x$ ait pour aire a^2. Le *problème hyperbolique* consiste à construire un segment x tel que le rectangle de côtés x et $b + x$ ait pour aire a^2. C'est là l'origine des mots parabole, ellipse et hyperbole.

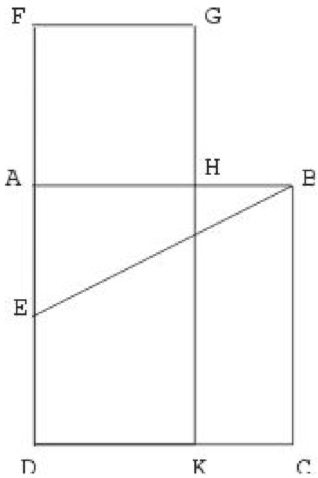
Ainsi la proposition 11 du livre 2 d'*Euclide*

> *Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.*

sera appelée plus tard partager un segment en extrême et moyenne raison, c'est-à-dire trouver un partage en deux du segment, tel que le rapport du tout a au plus grand x soit égal au rapport du plus grand x au plus petit $a - x$. Autrement dit avec nos notations $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, soit pour $a = 1$, $x^2 + x - 1 = 0$ qui a pour solution le nombre d'or.

[9] Septième problème étudié par *Thureau Dangin*.

Soit $ABCD$ an carré de côté a. On cherche le point H sur AB tel que le carré $AHGF$ soit égal au rectangle $HBCK$. Sur AD, on prend le milieu E et on porte EF sur DA, du côté de A, égal à EB. Un calcul simple justifie la propriété cherchée. (*Euclide* la justifie à l'aide de propriétés montrées au début du livre 2 et du théorème de Pythagore).



Toutes les équations étaient donc traitées en terme de constructions géométriques, à effectuer et justifier [10].

4 La naissance de l'algèbre chez les arabes

Les mathématiques arabes

Un contresens est souvent fait à propos des mathématiques arabes. On y voit parfois un simple transfert des mathématiques grecques vers l'Europe. C'est oublier qu'au moment de la conquête arabe, il n'y avait plus de mathématique vivante dans l'empire byzantin. Des manuscrits se trouvaient dans des monastères et seule une tradition de commentaires de ces manuscrits subsistait. On désigne par mathématiques arabes [11] l'ensemble des travaux produits dans cette aire géographique et publiés en arabe, parfois par des savants d'autres origines.

À la fin du huitième siècle, de nombreux savants se regroupent à Bagdad [12] où un observatoire et plusieurs bibliothèques sont créées. Des écoles scientifiques et philosophiques se développent. Le centre le plus connu [13] *la Maison de la sagesse*, héberge des traducteurs et des savants. Les œuvres des mathématiciens grecs sont traduites, et parallèlement, on développe une terminologie scientifique en arabe. C'est quelquefois par ces traductions arabes [14] que certaines œuvres grecques sont parvenues jusqu'à nous. Il faut souligner que ces traductions sont l'œuvre de savants inventifs qui publient une traduction souvent après un travail d'approfondis-

[10] voir le remarquable livre de N. *Mahammed, Sur la résolution des équations algébriques.*
[11] *Rashed , D'Alexandrie à Bagdad* dans *Noël*, *Le matin des mathématiciens...*
[12] *L'âge d'or de Bagdad* Les cahiers de Science&Vie février 1998.
[13] *Tous les savoirs du monde*, http ://www.bnf.fr/web-bnf/pedagos/dossitsm/islam.htm
[14] *Traducteurs et savants de renom* , Les cahiers de Science&Vie février 1998.

sement de l'œuvre grecque. D'une façon générale, il s'agit plutôt d'une traduction critique accompagnée de nombreux commentaires.

En même temps, les Arabes s'intéressent aux autres traditions scientifiques de l'Inde et du Moyen-Orient. Les œuvres arabes comportent beaucoup de problèmes concrets, de constructions de bâtiments, de commerce, de finance, de parts d'héritage et surtout d'astronomie. Les Arabes disposent de meilleurs instruments et donc recherchent une plus grande précision dans les calculs numériques. Les œuvres arabes comportent des problèmes de calcul numérique, de méthodes d'approximation, d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie. La grande différence avec les traditions mésopotamiennes et indiennes est la volonté de trouver des règles générales et de les démontrer, au lieu de se contenter de cas particuliers. À partir de cette assimilation des traditions antérieures, un développement scientifique autonome va aboutir au développement de branches de mathématiques nouvelles [15], et en particulier de l'algèbre.

L'œuvre fondatrice d'AL-KHWĀRIZMĪ

Le premier mathématicien arabe important est AL-KHWĀRIZMĪ qui vécut de 780 à 850. Notre mot algorithme est une déformation de son nom. Il publia des ouvrages d'astronomie, de géographie, d'arithmétique, d'algèbre et sur le calendrier. Ses ouvrages d'arithmétique et d'algèbre ont exercé une influence considérable sur le développement ultérieur des mathématiques. L'ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ sur l'arithmétique est le premier exposé systématique sur le système décimal de position et sur les opérations à l'aide de cette notation des nombres.

L'ouvrage d'AL-KHWĀRIZMĪ sur l'algèbre [16] s'intitule *Bref ouvrage sur le calcul de ǧabr* et de *muqābala*. En fait le mot *ǧabr* désigne l'opération qui consiste à ajouter aux deux membres de l'équation des termes égaux à ceux qui sont affectés du signe moins, de façon à n'avoir plus que des termes positifs. Le mot algèbre en est une déformation. Le terme *muqābala* désigne la réduction des termes semblables. Dans son livre AL-KHWĀRIZMĪ traite des équations du premier et du second degré. Il ramène au moyen des transformations précédentes toutes les équations du second degré aux six formes suivantes, à coefficients positifs :

- les carrés sont égaux aux racines, $ax^2 = bx$,
- les carrés sont égaux à un nombre, $ax^2 = c$,
- les racines sont égales à un nombre, $bx = c$,
- les carrés et les racines sont égaux à un nombre, $ax^2 + bx = c$,
- les carrés et les nombres sont égaux aux racines, $ax^2 + c = bx$,
- les racines et les nombres sont égaux aux carrés, $bx + c = ax^2$.

[15] voir *Youschkevitch* et *Rashed* et également *Dahan-Dalmedico*.
[16] *Rashed, La naissance de l'algèbre* dans *Noël, Le matin des mathématiciens...*

En fait, explique AL-KHWĀRIZMĪ, on rencontre trois sortes de nombres : les nombres simples, les racines (ou choses) et les carrés. Le carré est le produit de la chose par elle-même. Tous les textes sont écrits avec des mots et sans aucun symbolisme. Les formes canoniques des équations du premier et du second degré sont répertoriées. AL-KHWĀRIZMĪ donne ensuite les règles de résolution pour chacune de ces formes d'équations et les justifie par des démonstrations géométriques à la grecque. La règle de trois et la règle de fausse position sont explicitées et utilisées. Il faut souligner la nouveauté et l'originalité de l'œuvre d'AL-KHWĀRIZMĪ. Dans son travail, le point de départ est l'équation comme objet d'étude en elle même, et non un problème concret qui conduit à poser une équation. Il faut voir dans son livre le début d'une nouvelle discipline, l'algèbre. Deux autres mathématiciens prolongent ce travail.

Les développements arabes de l'algèbre

Abū Kāmil (850–930) énonce dans un ouvrage d'algèbre les règles précises de calcul des solutions des différentes formes d'équations du second degré à l'aide de radicaux. Il développe également les règles du calcul algébrique et insiste sur leur caractère absolument général. Dans de nombreux cas, il déduit ces identités algébriques des règles sur les proportions, sans faire de différence entre proportions de grandeurs commensurables et proportions de grandeurs incommensurables. Pour lui, explicitement, les termes des proportions sont des nombres qui peuvent être aussi bien rationnels qu'irrationnels. Des quantités irrationnelles peuvent aussi intervenir comme coefficients dans les équations. Ce qui n'était pas le cas chez AL-KHWĀRIZMĪ. On constate chez lui une maîtrise tout à fait remarquable des calculs sur des quantités qui s'expriment avec des radicaux. Il traite aussi d'équations qui se ramènent à des équations du deuxième degré.

al-Karagī (mort entre 1019 et 1029) définit la science de ce nouveau calcul à savoir la détermination des grandeurs inconnues à l'aide de grandeurs connues, par les meilleures méthodes. Il développe un calcul sur les différentes puissances des inconnues en introduisant comme *Diophante*, le cube, le carré carré, etc. et en indiquant que l'on peut continuer à l'infini la chaîne des puissances. À cette série des puissances, il ajoute la série des parts, que nous écrivons maintenant sous la forme de x^{-n}. Il développe les règles de calcul algébrique de façon encore plus systématique. Il procède à l'addition de quelques séries arithmétiques. Dans ses livres, les nombres sont écrits avec des mots et nulle part les chiffres d'origine indienne ne sont utilisés. Cela signifie-t-il une opposition entre différentes écoles ? Là-dessus les historiens ont des avis divergents.

Réflexions sur l'algèbre par Omar AL-KHAYYĀM

L'algèbre est un art scientifique. Son objet est : le nombre absolu et les grandeurs mesurables, étant inconnus, mais rapportés à quelque chose de connu de manière à pouvoir être déterminés ; cette chose connue est une quantité ou un rapport individuellement déterminé, ainsi qu'on le reconnaît en les examinant attentivement ; ce qu'on cherche dans cet art, ce sont les relations qui joignent les données des problèmes à (l'inconnue), qui de la manière susdite forme l'objet de l'algèbre. La perfection de cet art consiste dans la connaissance des méthodes mathématiques au moyen desquelles on est en état d'effectuer le susdit genre de détermination des inconnues, soit numériques, soit géométriques…

Les résolutions algébriques ne s'effectuent qu'à l'aide de l'équation, c'est-à-dire en égalant ces degrés les uns aux autres, comme cela est bien connu. Si l'algébriste emploie le carré-carré dans des problèmes de mesure, cela doit s'entendre métaphoriquement et non pas proprement, puisqu'il est absurde que le carré-carré soit au nombre de grandeurs mesurables. Ce qui rentre dans la catégorie des grandeurs mesurables, c'est d'abord une dimension, à savoir la racine, ou par rapport à son carré, le côté ; puis deux dimensions : c'est la surface ; et le carré (algébrique) fait partie des grandeurs mesurables, étant la surface carrée. Enfin trois dimensions : c'est le solide ; et le cube se trouve parmi les grandeurs mesurables, étant le solide terminé par six carrés…

Ce qu'on trouve dans les ouvrages des algébristes, relativement à ces quatre quantités géométriques, entre lesquelles se forment les équations, à savoir : nombres absolus, côtés, carrés et cubes, ce sont trois équations renfermant le nombre, des côtés et des carrés. Nous allons, au contraire, proposer des méthodes au moyen desquelles on pourra déterminer l'inconnue dans l'équation renfermant les quatre degrés dont nous venons de dire que ce sont eux exclusivement qui peuvent faire partie des grandeurs mesurables ; à savoir : le nombre, la chose, le carré et le cube.

*Les espèces d'équations dont la démonstration dépend des propriétés du cercle, c'est-à-dire de deux ouvrages d'*EUCLIDE *sur les* Éléments *et sur les* Données*, se démontrent bien facilement. Pour celles qu'on ne peut démontrer qu'à l'aide des propriétés des sections coniques, il faut s'en rapporter à ce qui est contenu dans les deux (premiers) livres* *des Coniques*[17]*. Lorsque l'objet du problème est un nombre absolu, ni moi, ni aucun des savants qui se sont occupés d'algèbre, n'avons réussi à trouver la démonstration de ces équations (et peut-être un autre qui nous succédera comblera-t-il cette lacune), que lorsqu'elles renferment seulement les trois premiers degrés, à savoir : le nombre, la chose et le carré. Pour ces espèces, dont la démonstration s'effectue au moyen de l'ouvrage d'*EUCLIDE*, j'en indiquerai la démonstration numérique. Et sachez que la démonstration géométrique de ces procédés ne remplace pas leur démonstration numérique, lorsque l'objet du problème est un nombre, et non pas une grandeur mesurable.*

Omar AL-KHAYYĀM (1074)

5 L'algèbre en Europe à la Renaissance

Une première renaissance des œuvres grecques à partir du douzième siècle, se fait à la suite des croisades et des voyages de savants dans les centres intellectuels arabes d'Espagne et de Sicile en particulier [18]. Les œuvres d'*Euclide*, de *Ptolémée*, de *Théodose*, d'*Aristote*, de *Héron* et quelques textes d'*Archimède* sont traduites, souvent au mot à mot. Les œuvres du mathématicien arabe *Al Khwarismi* font connaître en Europe les chiffres indiens et les travaux d'algèbre arabes. À partir de cette époque, une querelle oppose les abacistes, adeptes du calcul sur abaque et de l'usage des chiffres romains, aux algoristes [19], partisans du calcul écrit et de l'usage des chiffres indiens ou chiffres arabes.

Premiers progrès scientifiques

Fibonacci

Léonard de Pise dit *Fibonacci* (1170–1250) est le mathématicien le plus créateur de cette époque. Il a étudié auprès des Arabes au cours de ses nombreux voyages. En 1202 il publie le *Liber Abaci* qui fait connaître les calculs arabes et indiens sur les entiers, les fractions, les racines carrées et cubiques. En 1225, le *Liber Quadratorum* développe l'algèbre des équations déterminées du premier et du deuxième degré et quelques équations du troisième degré. En 1220, il publie *Practica Geometriae* qui présente la géométrie grecque et la trigonométrie.

[17] Par *Coniques*, il entend le célèbre ouvrage d'APOLLONIUS.

[18] voir Les cahiers de Science & Vie, 1000 ans de sciences, Le Moyen Âge, comment les sciences s'installent en Europe, numéro 43, février 1998.

[19] déformation du nom d'*Al Khwarismi*.

À l'époque *Fibonacci* pense que l'équation générale du troisième degré ne peut être résolue algébriquement. Il montre que les solutions d'une certaine équation du troisième degré :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

ne sont pas constructibles à la règle et au compas. Il s'agit là de la première indication dans l'histoire de l'existence d'autres irrationnelles que celles classées par *Euclide* dans le livre 10 des *Éléments*.

Oresme

Oresme[20] (1323–1382) introduit dans le livre *Algorismus Proportionum* des exposants fractionnaires qui ne seront pas utilisés avant le seizième siècle. *Oresme* est le premier mathématicien à développer les calculs sur les rapports dits géométriques, ce qui est une étape importante sur le long chemin qui amènera à considérer ces rapports comme des nombres. Dans le livre *De proportionibus proportionum*, *Oresme* développe les opérations sur les rapports : ajouter, soustraire, diminuer des rapports ; composer des rapports[21] ; faire un rapport de rapports, voir s'il est ou non rationnel ; entre deux rapports, insérer une moyenne.

Les maîtres d'abaque

À la Renaissance (1400–1600), le développement d'une classe d'artisans et de commerçants libres dans les villes favorise le développement du commerce et des voyages et crée une ouverture intellectuelle et un renouveau d'intérêt pour les questions techniques et financières[22]. L'usage du latin est un obstacle à la diffusion du savoir auprès des usagers potentiels des connaissances techniques et scientifiques. On assiste donc au début du seizième siècle à la traduction des œuvres grecques en langues vernaculaires. Ainsi par exemple, les *Éléments d'Euclide* sont traduits par *Tartaglia* en 1543 en italien. *Descartes* écrit ses œuvres en français. La cherté des livres est également un obstacle et de nombreuses bibliothèques sont créées à partir du seizième et du dix-septième siècle. Cependant les universités restent pour l'essentiel en dehors de ce mouvement et sclérosées.

Les algébristes italiens

L'invention de l'algèbre fut une contribution essentielle des arabes. Son développement en Europe avec les algébristes italiens[23], l'élaboration lente d'un sym-

[20] Cahiers de Science & Vie, 1000 ans de sciences...
[21] les multiplier.
[22] *Benoit, Calcul, algèbre et marchandises* dans *Serres Éléments d'histoire des sciences*.
[23] *Colette, Histoire des mathématiques*

bolisme algébrique jouent un rôle dans le développement de la notion de nombre réel, en amenant un calcul uniforme, que l'inconnue porte sur des nombres (rationnels), ou sur des grandeurs.

En algèbre, après *Pacioli* dont le livre *Summa* de 1494 ne contient guère plus que celui de *Léonard de Pise* de 1202, *Cardan*[24] publie son *Ars Magna*[25] en 1545. Les mathématiciens vont créer de nouveaux objets mathématiques qu'ils dénommeront eux-mêmes nombres impossibles.

6 Les équations du troisième degré

En Europe, en algèbre, les premières avancées sont marquées par la résolution des équations du troisième et du quatrième degré par les algébristes italiens *Scipione del Ferro* (1500), *Tartaglia* (1535), *Ferrari* et *Cardan* (1542) qu'une querelle de priorité oppose à *Tartaglia*. En 1545 *Cardan* publie les formules de résolution dans l'*Ars Magna*. Ces formules ne s'appliquent pas quand l'équation a trois racines réelles et conduisent à des expressions impossibles. *Bombelli*[26] fut le premier à montrer comment à partir de ces quantités impossibles trouver une racine réelle. Voilà l'origine des nombres qui furent appelés impossibles puis imaginaires et enfin aujourd'hui nombres complexes.

La *méthode de Cardan*

Soit à résoudre une équation :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

En changeant d'inconnue, on commence par la mettre sous la forme :

$$x^3 + px + q = 0$$

On cherche des solutions en introduisant deux nouvelles inconnues u et v : $x = u + v$, on remplace x par cette valeur et on obtient en développant les calculs :

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

On impose : $3uv + p = 0$, c'est-à-dire $uv = -\frac{p}{3}$. Alors $u^3 + v^3 = -q$ et $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$; il en résulte que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

Cette équation a des racines réelles si le discriminant est positif.

[24] *Cardan, Ma vie.*
[25] *Cardan, Ars magna or the rules of algebra.*
[26] *Bombelli, Algebra* , 1572

– Cas où le discriminant est positif ou nul :

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} \geq 0$$

On a deux racines X_1 et X_2. On en prend les racines cubiques U_1 et U_2. Alors $X = U_1 + U_2$ est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

– Cas où le discriminant est négatif :

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$$

En introduisant formellement un symbole désignant une racine d'un nombre négatif Δ, on écrit deux racines «impossibles» X_1 et X_2

$$X_1 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad X_2 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Une racine formelle de l'équation donnée est $x = \sqrt[3]{X_1} + \sqrt[3]{X_2}$.

Le cas impossible

Bombelli fut le premier à retrouver à partir de ces racines impossibles une racine réelle sur l'exemple suivant :

$$x^3 = 15x + 4$$

dont il savait que 4 était une racine. Il applique les formules précédentes, obtient $\Delta = -4 \times 121$, $X_1 = 2 + \sqrt{-121}$, $X_2 = 2 - \sqrt{-121}$. Sans doute à cause d'une longue pratique de calcul sur les radicaux, il remarqua que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}$$

Ce qui lui permit de retrouver la racine évidente 4. *Bombelli* propose deux nouveaux signes qu'il désigne par *piu di meno* et *meno di meno* pour écrire ces racines. Chez lui $+1$ est désigné par *piu* 1 et -1 par *meno* 1, *piu di meno* 1 désigne donc ce qu'aujourd'hui nous appelons i et *meno di meno* 1 ce que nous appelons $-i$. Dans son texte les formules sont écrites avec ce symbolisme. On trouvera dans *Mathématiques au fil des âges* une comptine de *Bombelli* sur la règle des signes.

À la suite de *Bombelli*, les calculs «impossibles» furent acceptés et pratiqués comme intermédiaires de calcul pour retrouver les racines réelles.

Aujourd'hui nous savons que le cas impossible pour les formules de Cardan correspond au cas où l'équation a trois racines réelles. On peut remarquer qu'une équation du troisième degré a toujours au moins une racine réelle, car la fonction associée varie de ∞ à $-\infty$ ou de $-\infty$ à ∞. Dans le cadre d'un cours d'analyse de terminale, il est intéressant de faire l'étude de des différents graphes possibles et du nombre de zéros et de retrouver par ces considérations le rôle de la quantité Δ des formules de Cardan.

Dans le cas où l'équation du second degré admet deux racines imaginaires conjuguées X_1 et X_2, si on prend leurs racines cubiques u_1, ju_1, j^2u_1, u_2, ju_2, j^2u_2, où j désigne la racine cubique de l'unité :

$$j^2 + j + 1 = 0, \qquad j^3 = 1, \qquad j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

en les associant de telle sorte que le produit soit réel, on obtient trois racines réelles :

$$x_1 = u_1 + u_2, \qquad x_2 = ju_1 + j^2u_2 \qquad x_3 = j^2u_1 + ju_2$$

7 Le théorème fondamental de l'algèbre

Des mathématiciens développeront ces méthodes de résolution. Les équations du quatrième degré furent résolues à la même époque. Puis les mathématiciens s'attaquèrent à la résolution du l'équation du cinquième degré par radicaux, dont l'impossibilité fut démontrée par *Galois* et *Abel* au début du dix-neuvième siècle. Pendant cette période, l'algèbre est fondamentalement l'étude des équations. Ces équations se révèlent particulièrement utiles dans le domaine de la géométrie, avec les apports de *Viète* et de *Descartes*.

Relations entre coefficients et racines

Les mathématiciens étudient aussi les relations entre les racines et les coefficients de l'équation. *Cardan* remarque que dans une équation, les racines imaginaires interviennent par paires. *Newton* donnera plus tard la preuve de cette propriété. Très tôt, des mathématiciens comme *Cardan* et *Viète* énoncent des résultats généraux sur le nombre de racines d'une équation, sur le lien entre les coefficients des équations et les fonctions symétriques des racines. *Viète* et *Descartes* indiquent comment changer l'équation dont une racine est x pour obtenir une équation dont une racine est $x + m$. *Descartes* n'admet pas les racines négatives et les appelle *racines fausses*. Il montre que si une équation $f(x) = 0$ a pour racine a, alors $f(x)$ est divisible par $x - a$ et que si a est racine fausse, c'est-à-dire si $-a$ est racine, alors $f(x)$ est divisible par $x + a$ et qu'on peut trouver une équation dont elle soit une *vraie racine*.

Tous ces résultats, démontrés ou non, donnent une justification pratique pour utiliser les différentes sortes de racines, même seulement formellement, et habituent à manipuler les quantités négatives ou les quantités imaginaires.

Nombre de solutions d'une équation

Celles-ci fonctionnent comme intermédiaires de calcul assez mystérieux. En vertu d'un principe appelé principe de permanence, énoncé par *Girard* en 1629, on leur applique toutes les opérations classiques et les identités connues, mais ils ne doivent pas apparaître dans les résultats.

Girard en 1629 dans *Invention nouvelle en algèbre* affirme :

> Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre ... On pourrait dire : à quoi servent ces solutions qui sont impossibles ? Je réponds à trois choses, pour la certitude de la règle générale et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité...

Il faut remarquer que pour *Girard*, il s'agit d'un principe qui n'a pas besoin de démonstration. Quand il n'y a pas assez de racines, on en invente le nombre qu'il faut.

Racines imaginaires

Ces nouvelles entités sont pour la première fois désignées sous le nom de *nombres imaginaires* par *Descartes*. L'introduction par *Descartes* du symbole $\surd$ permet ensuite une utilisation aisée des nombres imaginaires à l'aide du symbole $\sqrt{-1}$. Ceux-ci sont utilisés avec une confiance croissante au dix-septième siècle. *Descartes* qui désigne par racine fausse 5 la racine -5 écrit en 1637 dans la *Géométrie* :

> Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit pour chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine.

Euler en 1770 dans l'*Algèbre*, écrit

> Parce que tous les nombres possibles qu'on peut s'imaginer sont ou plus grands ou plus petits ou égaux à zéro, il est évident que les ra-

cines des nombres négatifs ne peuvent être comptés aux nombres possibles. Alors nous sommes obligés de dire qu'elles sont des nombres impossibles. Ainsi nous sommes venus au terme de tels nombres, qui sont impossibles par leur propre nature et qu'on a l'habitude d'appeler nombres imaginaires parce qu'ils n'existent que dans l'imagination.

Pratique de calculs

Peu à peu les mathématiciens se familiarisent avec l'usage des nombres imaginaires au même titre que celui des autres nombres [27]. *Moivre* en 1738 montre que $\sqrt[n]{\cos a + \sqrt{-1}\sin a}$ admet n valeurs de la forme $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ où l'arc θ est obtenu en divisant l'arc a en n parties égales. Cette démonstration repose sur des propriétés algébriques des équations et est indépendante de toute représentation géométrique des nombres complexes, qui sera inventée plus tard.

Cette confiance croissante amène à formuler un principe de généralité de l'algèbre disant que tout calcul sur les entiers et les nombres est valable pour toutes les quantités rencontrées en algèbre. Dans leurs calculs, les mathématiciens ne rencontrent que des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Tous les calculs sur les nombres imaginaires $a + b\sqrt{-1}$, somme, produit, quotient, extraction de racine conduisent toujours à un résultat de la même forme. Cela change le statut de l'énoncé de *Girard* qui devient un théorème à démontrer et peut s'exprimer sous différents énoncés.

Divers énoncés du théorème à démontrer

Ces solutions qu'on imagine pour compléter les vraies racines ont-elles toujours la même forme ? Est-ce que toutes les racines imaginaires s'écrivent $a + b\sqrt{-1}$? Ce problème a des formes équivalentes :

- Une équation de degré n possède n racines qui sont réelles ou de la forme $a + b\sqrt{-1}$.
- Toute équation algébrique ou équation polynôme peut être factorisée :
  - soit dans des facteurs linéaires réels x-a ou quadratiques
  - soit dans des facteurs linéaires complexes.

Le résultat pressenti par *Girard, une équation de degré n a n racines, si on compte les racines impossibles et les racines multiples* est maintenant connu sous le nom de *théorème fondamental de l'algèbre* ou *théorème de D'Alembert-Gauss*. Il a fait l'objet de nombreux travaux, plusieurs mathématiciens [28] ont essayé de le

[27] Nous employons à dessein le mot *nombre* qui, nous le verrons, n'a pas la même extension suivant les auteurs. En tout cas, tous sont d'accord pour rentrer les entiers et les fractions dans le champ des nombres.

[28] *Euler, Lagrange, D'Alembert,* entre autres.

démontrer, mais leurs démonstrations présentaient des failles et *Gauss*[29] le premier en fournit plusieurs démonstrations, au début du dix-neuvième siècle.

Mais durant tout le dix-huitième siècle, la nature mathématique des nombres complexes reste obscure. Ce qui jette une autre lumière sur le rôle de la rigueur en mathématique. Cette période montre que la créativité prime et que les mathématiciens ont pu utiliser pendant plusieurs siècles des notions qu'ils ne savaient pas justifier, mais qui leur apportaient une mine de résultats qu'ils savaient légitimer autrement, principalement par leurs applications.

8 Le développement du symbolisme.

Diophante avait été un précurseur dans l'usage d'un symbolisme dans la résolution de problèmes, avec des lettres pour désigner le carré, le cube et avait le premier fait usage de puissances au delà du cube. Cette avancée est restée isolée et l'algèbre des équations développée par les Arabes est une algèbre rhétorique, où tout est écrit en toutes lettres. Le développement d'un symbolisme algébrique aux quinzième et seizième siècles est lent. Nous allons en donner quelques exemples et voir que notre symbolisme est issu de ces tentatives dispersées[30].

Les signes d'opérations pour l'addition et la soustraction sont d'abord notés p et m, puis les signes actuels $+$ et $-$ apparaissent chez un allemand, *Widman* en 1486. Le signe multiplié est utilisé pour la première fois chez l'anglais William *Oughtred* en 1631. Le signe d'égalité est noté $=$ en 1557 par *Recorde* à Bologne, puis par *Napier* en 1618. Il faut noter que ce signe était aussi employé chez d'autres auteurs pour des usages différents. *Viète* note l'égalité $\sim$ et *Descartes* $\propto$. Les signes d'inégalité $>$ et $<$ sont utilisés par *Harriot* en Angleterre. *Viète* introduit l'usage des parenthèses en 1593. *Descartes* perfectionna le symbole $\surd$ (c'est-à-dire r) pour les racines carrées et le symbole $\sqrt[3]{\ }$ pour les racines cubiques déjà en usage chez différents auteurs comme *Rudolff*, *Clavius*, *Oughtred*, etc. Notre symbole $\sqrt{a+b}$ est issu de la combinaison de deux signes : le r pour racine avec le surlignage $\overline{a+b}$ qui précédait notre notation avec des parenthèses.

L'usage des lettres

Cette période voit le début de l'utilisation de lettres en algèbre. On a vu apparaître chez les Arabes la distinction entre les nombres, les choses et les carrés pour l'écriture des équations. Cette distinction sera reprise sous forme de mots latins dans les débuts de l'algèbre en Europe. L'inconnue est désignée par la chose,

[29]voir l'article de *Friedelmeyer* et l'article très complet de *Gilain* sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre.

[30]*Cajori* est la référence sur ces questions de notations.

«res» ou «cosa», la racine est désignée par «radix», les carrés par «qdratu». Dans l'*Ars Magna* de 1547, *Cardan* écrit l'équation :

$$x^2 = 4x + 32 \text{ sous la forme } \quad \text{qdratu aeqtur 4 rebus p : 32}$$

Ensuite des lettres sont introduites, R pour «res», Z «zensus» pour le carré, C pour «cube», et les nombres désignés par «numero». Puis on voit apparaître des exposants.

Nous allons donner quelques exemples du symbolisme adopté par différents auteurs. En 1484, *Chuquet* écrit 12^2 pour $12x^2$. Dans son *Algebra* de 1572, *Bombelli* écrit l'expression :

$$1 + 3x + 6x^2 + x^3 \text{ sous la forme } 1p3^{\overset{1}{\cup}}p6^{\overset{2}{\cup}}p1^{\overset{3}{\cup}}$$

En 1585, *Stevin* écrit la même expression sous la forme :

$$1^{\textcircled{0}}p3^{\textcircled{1}}p6^{\textcircled{2}}p1^{\textcircled{3}}$$

Il commence à faire usage de certains exposants fractionnaires. Bachet *de Meziriac* écrit l'expression :

$$x^3 + 13x^2 + 5x + 2 \text{ sous la forme } \quad 1C + 13Q + 5N + 2$$

Viète utilise les lettres aussi bien pour les inconnues, (les voyelles), que pour les coefficients, (les consonnes). L'identité $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ est écrite sous la forme (où *in* désigne la multiplication) :

$$a\,\textit{cubus}\ + b\,\textit{in}\,a\,\textit{quadr}\,3 + a\,\textit{in}\,b\,\textit{quadr}\,3 + b\,\textit{cubo aequalia}\ \overline{a + b}\,cubo$$

Descartes fait usage du symbolisme suivant : $1 + 3x + 6xx + x^3$. Il est le premier à faire usage systématique des premières lettres de l'alphabet pour désigner des coefficients et des dernières lettres pour les inconnues.

Notre symbolisme algébrique

Notre symbolisme est donc une mosaïque de signes provenant de systèmes qui ont été rejetés. Il ne faut pas sous-estimer l'importance de ce symbolisme. Tout en permettant une grande économie en introduisant des calculs sur des symboles, il permet de traiter les différents irrationnels comme des nombres, d'avoir une confiance de plus en plus grande dans la logique des calculs. Cela a permis l'introduction et l'utilisation aisée des nombres complexes. Plus tard, beaucoup de calculs sur les polynômes, tels la formule du binôme seront généralisés formellement à des expressions infinies. Cela a été un facteur très important dans le développement ultérieur de l'analyse.

Nous avons une telle habitude du formalisme que nous ne pouvons plus penser sans lui. Les quelques exemples donnés ci-dessus sont là pour faire réfléchir à la difficulté qu'a présenté sa création. Sur l'exemple des irrationnels, nous pouvons voir que le lien entre l'existence d'un objet et sa notation est très complexe. L'existence d'une notation accompagne, favorise et renforce la reconnaissance des grandeurs irrationnelles comme des nombres. Sur l'exemple des nombres complexes, nous voyons des objets mathématiques fonctionnant comme symboles avant d'acquérir un statut. Nommer un objet consacre son existence, mais une notation pratique qui favorise l'utilisation de cet objet renforce la prise de conscience de cet objet. Sur l'exemple des nombres transcendants, les seuls nommés dans l'enseignement sont les nombres π et e. Comment un étudiant n'en tirerait-il pas l'impression que les nombres transcendants se limitent à quelques nombres auxquels on a donné des noms particuliers ?

Les lettres dans l'enseignement en algèbre

Le symbolisme est une composante essentielle de la langue mathématique. Il faudrait davantage réfléchir dans l'enseignement à son fonctionnement qui, l'histoire est là pour nous le rappeler, n'a rien de naturel et a nécessité un travail et un temps considérables pour son élaboration. Peut-être comprendrons-nous mieux qu'il n'est pas *naturel* et verrons-nous d'un autre œil la difficulté que présente le début de l'algèbre et de l'usage de ce symbolisme pour les élèves de collège. La lettre en mathématiques a différents usages ou statuts qu'il importe de distinguer. Elle peut fonctionner comme inconnue dans une équation, comme variable dans une fonction, ou comme indéterminée dans des identités algébriques [31].

L'introduction des lettres pour désigner des inconnues a été un processus long et difficile. On est passé par une phase de lettres comme abréviations de mots, c'est à dire de lettres qui ont du sens, ce qu'on appelle *l'algèbre syncopée*. Pour l'enseignement, on pourrait mieux utiliser ces lettres qui ont du sens avant d'introduire des x. Nous le faisons à propos des formules de calculs d'aires par exemple où la base est toujours désignée par la lettre b et la hauteur par la lettre h. Accompagner le passage de l'usage de lettres qui ont du sens à l'usage parfaitement arbitraire des lettres x, y, z comme inconnues éviterait sans doute le rejet de l'algèbre par certains élèves qui ne comprennent pas le calcul avec des x. De même écrire une équation sous forme d'une quantité égale à zéro a été un obstacle important. Les premières équations étaient toujours écrites sous forme d'une quantité égale à une quantité. Si le signe moins pouvait apparaître à l'intérieur d'une expression, jamais celle-ci ne commençait par un signe moins. Tout enseignant de

[31] Une réflexion intéressante sur ce thème est développée dans l'article de Philippe *Lombard*, Repère IREM numéro 2.

collège reconnaît là des points difficiles sources d'erreurs chez les élèves.

Le passage pour la résolution de problèmes s'est fait dans l'histoire par l'usage de méthodes arithmétiques de fausses positions [32] pour le premier degré. Dans ce type de méthode chaque ligne de calcul est justifiée par la logique du problème. En utilisant l'algèbre, une fois la mise en équation faite, on oublie totalement le sens des inconnues pendant la phase de résolution de l'équation pour n'y revenir qu'au moment de l'interprétation des résultats trouvés de façon purement calculatoire. Tout ceci doit être débattu avec les élèves. Faire résoudre des équations pour elles-même n'a pas de sens et le programme officiel est tout à fait raisonnable là-dessus. On y parle de résolution de problèmes. Malheureusement, les enseignants ont reçu une formation trop formelle de l'algèbre et ne savent pas exploiter pour certains ce processus qui, dans l'enseignement, doit construire l'usage de l'algèbre et non parachuter plus ou moins vite l'usage du x pour faire des exercices d'entraînement à la résolution d'équations. Ceci est très visible chez les enseignants stagiaires de l'IUFM et nous a conduit à leur proposer de s'intéresser à l'histoire des équations algébriques. C'est un point où l'histoire peut presque directement être réinvestie dans l'enseignement.

9 Algèbre et numérisation des grandeurs

L'art analytique

Viète, dans *l'art analytique* 1591 décrit l'art analytique (en fait l'algèbre), comme procédé de découverte en mathématiques. *Viète* fait un usage assez systématique du symbolisme. Il distingue *la logistique numérique*, en fait les calculs sur les nombres, et *la logistique spécieuse*, calcul sur *les espèces* (les inconnues, nombres ou grandeurs). *Viète* utilise les lettres aussi bien pour les coefficients positifs, que pour les inconnues. Ce qui est un pas très important pour une étude générale des équations. Il utilise les consonnes pour noter les coefficients et les voyelles pour noter les inconnues. *Viète* conserve la hiérarchie des grandeurs, longueurs, plans, solides, mais il ajoute des grandeurs de dimensions quelconques, 4, 5, 6... Il associe des inconnues de dimensions quelconques, inconnue, carré, cube, carré-carré, carré-cube, cubo-cube, etc... *Viète* conserve la loi des homogènes et n'écrit que des égalités entre grandeurs de même dimension. Par exemple [33], $X^3 + BX = CX^2 + D$ où B est un plan, C est une longueur, D est un solide. *Viète* établit une équivalence entre égalité de rapports de grandeurs

[32] voir *Histoire d'Algorithmes*.

[33] en utilisant nos notations pour plus de clarté

et équations, pour des grandeurs de dimensions quelconques.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \Longleftrightarrow \quad AD = BC$$

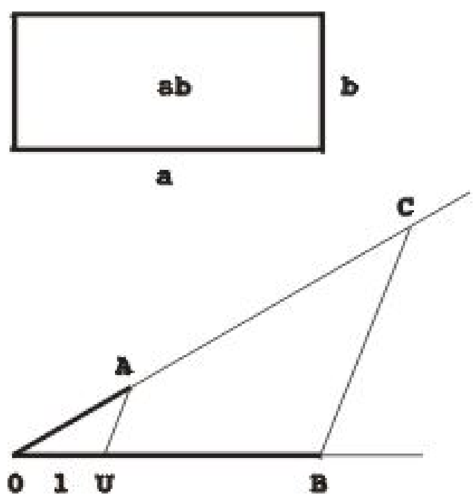
Ce qui est fondamental dans le passage du langage euclidien en terme de proportions au langage moderne en terme d'équations.

L'enthousiasme de *Viète* sur sa nouvelle méthode, *l'art analytique* [34], comme méthode de découverte en mathématique qui «ne laissera plus aucun problème non résolu» est frappant. *Viète* pense que tout problème se ramène à la recherche d'une inconnue dans une équation algébrique. Le développement de l'analyse montrera l'existence d'autres types d'inconnues, les fonctions, et d'autres types d'équations (différentielles, intégrales ...)

Une algèbre des longueurs

Dans sa *Géométrie* de 1637. *Descartes* abandonne la loi de l'homogénéité et représente toutes les grandeurs (les rapports géométriques, les produits, les aires, les volumes, les racines) par des longueurs, après choix d'une unité. *Descartes* montre qu'un produit de deux longueurs peut être représenté par un segment à l'aide de deux demi droites de même origine après choix d'une unité de longueur.

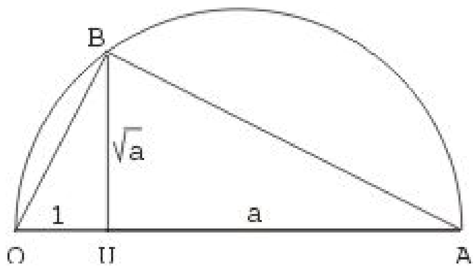
Sur l'une on porte l'unité OU et la longueur OB, sur l'autre OA. Par B on mène la parallèle à UA qui coupe OA en C. Alors par le théorème des lignes proportionnelles, on sait que OU est à OB comme OA est à OC, et donc que la longueur OC représente le produit des longueurs OA et OB.



Une construction du même type permet de construire le rapport de deux longueurs. Pour construire une racine carrée, *Descartes* s'inspire du théorème qui dit que dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

[34] en fait l'algèbre. Ici le sens du mot analytique est le sens ancien du couple *analyse / synthèse*.

Sur une droite, il porte l'unité OU puis la longueur UA dont il cherche la racine. Il construit le demi cercle de diamètre OA et prend le point B du cercle qui se projette en U. La hauteur BU du triangle rectangle OBA fournit la racine carrée cherchée.



Descartes réussit donc à représenter toutes les grandeurs par des longueurs. Ces longueurs fourniront aussi bien les inconnues que les grandeurs connues dans les équations de la géométrie analytique. C'est un premier pas très important vers la numérisation des rapports de grandeurs. Toutes les grandeurs sont représentées par des segments. Toutefois même si le corps du texte fait appel pour illustrer son propos à des proportions entre entiers simples le plus souvent, il reste que *Descartes* ne franchit pas l'obstacle d'associer un nombre à chacune des grandeurs qu'il considère. La géométrie analytique de *Descartes* est donc une algèbre des longueurs où on a choisi pour repère une longueur OA et une direction de projection sur cette longueur. Les coordonnées avec lesquelles on repère un point M sont la longueur Om distance de O à la projection de M sur OA et la distance mM. Les inconnues et les quantités connues des équations écrites par *Descartes* sont donc des longueurs.

Des irrationnelles aux irrationnels

Revenons à la question du statut des grandeurs géométriques et de leur rapport, question posée depuis les grecs. Les débuts de l'algèbre et en particulier de l'application à la géométrie ne posent pas le problème. Cette application, au fur et à mesure des succès remportés, se fit de plus en plus large alors qu'à cette époque aucun fondement logique à l'algèbre et aux nombres ne pouvait être apporté. On assiste donc à un développement important de l'algèbre et de ses applications numériques ou géométriques totalement en dehors du cadre de référence euclidien. L'histoire relativise donc encore une fois sérieusement le mythe d'une mathématique rigoureuse et développée suivant les lois de la logique. Le développement a d'abord été un processus créateur de nouveaux objets pour résoudre des problèmes. Les mises en ordre sont venues après. L'algèbre en traitant de la même façon les inconnues numériques et les inconnues géométriques a aidé à reconnaître que les grandeurs irrationnelles se comportaient comme des nombres.

10 Bibliographie

Cajori . A history of mathematical notations. 2 tomes, The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1928.

Caveing . Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes. PUL, 1994.

Cifoletti . Mathématiques et rhétorique, les algébristes parisiens avant VIÈTE. Quatrième Université d'été d'histoire des mathématiques IREM de Lille, 1994.

Collette . Histoire des Mathématiques. 2 tomes, Vuibert, 1979.

Cousquer . Histoire du concept de nombre. IREM de Lille, 1992. Diderot, 1998 (Nouvelle édition augmentée).

Dahan Dalmedico et PEIFFER. Histoire des Mathématiques, Routes et dédales. points sciences, 1982.

Dedron, Itard . Mathématiques et mathématiciens. Magnard, 1972.

Dhombres et alii . Mathématiques au fil des âges. Gauthier Villars, Bordas, Paris, 1987.

Djebbar . Les Mathématiques arabes et leur environnement. Actes de l'université d'été sur l'histoire des Mathématiques, Université du Maine 6–13 Juillet 1984.

Djebbar . Le phénomène de la traduction et son rôle dans le développement des activités scientifiques en pays d'Islam. Les écoles savantes en Turquie, éditions Isis Istambul, 1996.

Encyclopædia Universalis . Dictionnaire des mathématiques. Éditions Albin Michel.

Gillings . Mathematics in the time of pharaons. The MIT Press, London, 1972.

Guillemot . Les problèmes 24 à 29 du papyrus de *Rhind*. Actes de l'université d'été Inter IREM d'histoire des mathématiques, 1984.

Hoyrup . Algèbre d'Al gabr et algèbre d'arpentage au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne. D'HIMHOTEP à COPERNIC, Peeters Leuven 1992.
HOYRUP. Les quatre cotés et l'aire, sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes. Actes de la première université d'été européenne d'histoire des mathématiques, Montpellier 1993.

IREM, collectif . Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce. Belin, 1994.

IREM, collectif . Histoires de problèmes, histoire des mathématiques. Ellipses, 1993.

IREM, collectif . La rigueur et le calcul. Cedic, 1982.

Itard . Essais d'histoire des mathématiques. Blanchard, 1984.

Jacob Klein Greek mathematical thought and the origin of algebra. Dover 1968.

Kline . Mathematical throught from ancient to modern times. Oxford University Press, New York, 1972.

Kline . Mathématiques : la fin des certitudes. Christian Bourgois.

Mahammed . Histoire des équations algébriques. IREM de Lille, 1995. Diderot Multimedia 1998.

Neugebauer . The exact sciences in Antiquity. Dover, 1957. Les sciences exactes dans l'antiquité. Actes-Sud avril 1990.

Noël . Le matin des mathématiciens, entretiens sur l'histoire des Mathématiques. Belin, 1990.

Pichot . La naissance de la science 1. Mésopotamie, Égypte. La naissance de la science 2 Grèce présocratique. Folio Essais, 1991.

Rashed . Histoire des sciences arabes, tome 2, mathématiques et physique. Seuil, 1997.

Rashed . Entre arithmétique et algèbre : recherches sur l'histoire des mathématiques arabes. Belles lettres, Paris 1984.

Serres . Éléments d'histoire des Sciences. Bordas, 1989.

Thureau-Dangin . Textes mathématiques babyloniens. Réédition IREM de Dijon.

Van der Waerden . Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics. Science Editions, 1963, John Wiley, New York.

Youschkevitch . Les Mathématiques arabes du huitième au quinzième siècle. Vrin, Paris, 1976.

Sciences & Vie, 1000 ans de sciences Le Moyen Âge. février 1998.

Équations algébriques

Benoit . Calcul, algèbre et marchandise. Dans SERRES, Éléments d'histoire des Sciences. Bordas, 1989.

Bombelli . Algebra. Fragments. Traduction de HAMON, IREM de Rennes, 1996.

Cardan . Ars magna or the rules of algebra, 1545. Dover 1993.

Cardan . Ma vie. Belin 1991.

Costabel . Notes fugitives sur l'équation du troisième degré dans la mathématique occidentale. Revue d'histoire des sciences 1985 38/2.

Friedelmeyer . Recherche inconnue désespérement. Dans Histoires de problèmes, histoire des mathématiques. Ellipses, 1993

Houzel . Les principaux thèmes dans l'histoire des équations algébriques. Actes de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques 1984.

IREM de Toulouse . Équations du premier degré, 1982. Équations du second degré, 1979. Équations du troisième degré, 1980. Équations du quatrième degré, 1984.

IREM de Dijon . Égale zéro, aperçu historique de la notion d'équation. 1979.

IREM de Rennes . Vers les équations. 1988.

Lagrange . Leçons de l'École normale de l'an 2. Bordas.

Le Goff . Le troisième degré en second cycle, le fil d'*Euler*. Repère IREM numéro 17 octobre 1994.

Lombard . A propos des nouveaux programmes. Repères IREM numéro 2.

Parshall . The art of algebra from Al Khwarizmi to Vieta. History of Science XXVI, 1988.

Tignol . Leçons sur la théorie des équations algébriques. Institut de Louvain la Neuve, 1980.

Vauzelard . La nouvelle algèbre de Monsieur Viète. Fayard.