Les nombres impossibles

par Eliane Cousquer
Laboratoire LAMIA

Table des matières

1 L'invention des nombres complexes

Les équations du troisième degré

En Europe, en algèbre, les premières avancées sont marquées par la résolution des équations du troisième et du quatrième degré par les algébristes italiens *Scipione del Ferro* (1500), *Tartaglia* (1535), *Ferrari* et *Cardan* (1542) qu'une querelle de priorité oppose à *Tartaglia*. En 1545 *Cardan* publie les formules de résolution dans l'*Ars Magna*. Ces formules ne s'appliquent pas quand l'équation a trois racines réelles et conduisent à des expressions impossibles. *Bombelli* [1] fut le premier à montrer comment à partir de ces quantités impossibles trouver une racine réelle. Voilà l'origine des nombres qui furent appelés impossibles puis imaginaires et enfin aujourd'hui nombres complexes.

La *méthode de Cardan*

Soit à résoudre une équation :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

[1] *Bombelli*, *Algebra* , 1572

En changeant d'inconnue, on commence par la mettre sous la forme :

$$x^3 + px + q = 0$$

On cherche des solutions en introduisant deux nouvelles inconnues u et v : $x = u + v$, on remplace x par cette valeur et on obtient en développant les calculs :

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

On impose : $3uv + p = 0$, c'est-à-dire $uv = -\frac{p}{3}$. Alors $u^3 + v^3 = -q$ et $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$; il en résulte que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$$

Cette équation a des racines réelles si le discriminant est positif.

– Cas où le discriminant est positif ou nul :

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} \geq 0$$

On a deux racines X_1 et X_2. On en prend les racines cubiques U_1 et U_2. Alors $X = U_1 + U_2$ est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

– Cas où le discriminant est négatif :

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$$

En introduisant formellement un symbole désignant une racine d'un nombre négatif Δ, on écrit deux racines «impossibles» X_1 et X_2

$$X_1 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad X_2 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Une racine formelle de l'équation donnée est $x = \sqrt[3]{X_1} + \sqrt[3]{X_2}$.

Le cas impossible

Bombelli fut le premier à retrouver à partir de ces racines impossibles une racine réelle sur l'exemple suivant :

$$x^3 = 15x + 4$$

dont il savait que 4 était une racine. Il applique les formules précédentes, obtient $\Delta = -4 \times 121$, $X_1 = 2 + \sqrt{-121}$, $X_2 = 2 - \sqrt{-121}$. Sans doute à cause d'une longue pratique de calcul sur les radicaux, il remarqua que

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$$

$$(2-\sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1} = 2 - \sqrt{-121}$$

Ce qui lui permit de retrouver la racine évidente 4. *Bombelli* propose deux nouveaux signes qu'il désigne par *piu di meno* et *meno di meno* pour écrire ces racines. Chez lui $+1$ est désigné par *piu* 1 et -1 par *meno* 1, *piu di meno* 1 désigne donc ce qu'aujourd'hui nous appelons i et *meno di meno* 1 ce que nous appelons $-i$. Dans son texte les formules sont écrites avec ce symbolisme. On trouvera dans *Mathématiques au fil des âges* une comptine de *Bombelli* sur la règle des signes.

À la suite de *Bombelli*, les calculs «impossibles» furent acceptés et pratiqués comme intermédiaires de calcul pour retrouver les racines réelles.

Aujourd'hui nous savons que le cas impossible pour les formules de Cardan correspond au cas où l'équation a trois racines réelles. On peut remarquer qu'une équation du troisième degré a toujours au moins une racine réelle, car la fonction associée varie de ∞ à $-\infty$ ou de $-\infty$ à ∞. Dans le cadre d'un cours d'analyse de terminale, il est intéressant de faire l'étude de des différents graphes possibles et du nombre de zéros et de retrouver par ces considérations le rôle de la quantité Δ des formules de Cardan.

Dans le cas où l'équation du second degré admet deux racines imaginaires conjuguées X_1 et X_2, si on prend leurs racines cubiques u_1, ju_1, j^2u_1, u_2, ju_2, j^2u_2, où j désigne la racine cubique de l'unité :

$$j^2 + j + 1 = 0, \qquad j^3 = 1, \qquad j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

en les associant de telle sorte que le produit soit réel, on obtient trois racines réelles :

$$x_1 = u_1 + u_2, \qquad x_2 = ju_1 + j^2u_2 \qquad x_3 = j^2u_1 + ju_2$$

2 Le théorème fondamental de l'algèbre

Des mathématiciens développeront ces méthodes de résolution. Les équations du quatrième degré furent résolues à la même époque. Puis les mathématiciens s'attaquèrent à la résolution du l'équation du cinquième degré par radicaux, dont l'impossibilité fut démontrée par *Galois* et *Abel* au début du dix-neuvième siècle. Pendant cette période, l'algèbre est fondamentalement l'étude des équations. Ces équations se révèlent particulièrement utiles dans le domaine de la géométrie, avec les apports de *Viète* et de *Descartes*.

Relations entre coefficients et racines

Les mathématiciens étudient aussi les relations entre les racines et les coefficients de l'équation. *Cardan* remarque que dans une équation, les racines imaginaires interviennent par paires. *Newton* donnera plus tard la preuve de cette propriété. Très tôt, des mathématiciens comme *Cardan* et *Viète* énoncent des résultats généraux sur le nombre de racines d'une équation, sur le lien entre les coefficients des équations et les fonctions symétriques des racines. *Viète* et *Descartes* indiquent comment changer l'équation dont une racine est x pour obtenir une équation dont une racine est $x + m$. *Descartes* n'admet pas les racines négatives et les appelle *racines fausses*. Il montre que si une équation $f(x) = 0$ a pour racine a, alors $f(x)$ est divisible par $x - a$ et que si a est racine fausse, c'est-à-dire si $-a$ est racine, alors $f(x)$ est divisible par $x + a$ et qu'on peut trouver une équation dont elle soit une *vraie racine*.

Tous ces résultats, démontrés ou non, donnent une justification pratique pour utiliser les différentes sortes de racines, même seulement formellement, et habituent à manipuler les quantités négatives ou les quantités imaginaires.

Nombre de solutions d'une équation

Celles-ci fonctionnent comme intermédiaires de calcul assez mystérieux. En vertu d'un principe appelé principe de permanence, énoncé par *Girard* en 1629, on leur applique toutes les opérations classiques et les identités connues, mais ils ne doivent pas apparaître dans les résultats.

Girard en 1629 dans *Invention nouvelle en algèbre* affirme :

> Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre ... On pourrait dire : à quoi servent ces solutions qui sont impossibles ? Je réponds à trois choses, pour la certitude de la règle générale et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité...

Il faut remarquer que pour *Girard*, il s'agit d'un principe qui n'a pas besoin de démonstration. Quand il n'y a pas assez de racines, on en invente le nombre qu'il faut.

Racines imaginaires

Ces nouvelles entités sont pour la première fois désignées sous le nom de *nombres imaginaires* par *Descartes*. L'introduction par *Descartes* du symbole $\sqrt{}$ permet ensuite une utilisation aisée des nombres imaginaires à l'aide du symbole $\sqrt{-1}$. Ceux-ci sont utilisés avec une confiance croissante au dix-septième siècle. *Descartes* qui désigne par racine fausse 5 la racine -5 écrit en 1637 dans la *Géométrie* :

> Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on

> peut toujours en imaginer autant que j'ai dit pour chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine.

Euler en 1770 dans l'*Algèbre*, écrit

> Parce que tous les nombres possibles qu'on peut s'imaginer sont ou plus grands ou plus petits ou égaux à zéro, il est évident que les racines des nombres négatifs ne peuvent être comptés aux nombres possibles. Alors nous sommes obligés de dire qu'elles sont des nombres impossibles. Ainsi nous sommes venus au terme de tels nombres, qui sont impossibles par leur propre nature et qu'on a l'habitude d'appeler nombres imaginaires parce qu'ils n'existent que dans l'imagination.

Pratique de calculs

Peu à peu les mathématiciens se familiarisent avec l'usage des nombres imaginaires au même titre que celui des autres nombres [2]. *Moivre* en 1738 montre que $\sqrt[n]{\cos a + \sqrt{-1}\sin a}$ admet n valeurs de la forme $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ où l'arc θ est obtenu en divisant l'arc a en n parties égales. Cette démonstration repose sur des propriétés algébriques des équations et est indépendante de toute représentation géométrique des nombres complexes, qui sera inventée plus tard.

Cette confiance croissante amène à formuler un principe de généralité de l'algèbre disant que tout calcul sur les entiers et les nombres est valable pour toutes les quantités rencontrées en algèbre. Dans leurs calculs, les mathématiciens ne rencontrent que des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Tous les calculs sur les nombres imaginaires $a + b\sqrt{-1}$, somme, produit, quotient, extraction de racine conduisent toujours à un résultat de la même forme. Cela change le statut de l'énoncé de *Girard* qui devient un théorème à démontrer et peut s'exprimer sous différents énoncés.

Divers énoncés du théorème à démontrer

Ces solutions qu'on imagine pour compléter les vraies racines ont-elles toujours la même forme ? Est-ce que toutes les racines imaginaires s'écrivent $a + b\sqrt{-1}$? Ce problème a des formes équivalentes :

– Une équation de degré n possède n racines qui sont réelles ou de la forme $a + b\sqrt{-1}$.
– Toute équation algébrique ou équation polynôme peut être factorisée :

[2] Nous employons à dessein le mot *nombre* qui, nous le verrons, n'a pas la même extension suivant les auteurs. En tout cas, tous sont d'accord pour rentrer les entiers et les fractions dans le champ des nombres.

– soit dans des facteurs linéaires réels x-a ou quadratiques
– soit dans des facteurs linéaires complexes.

Le résultat pressenti par *Girard, une équation de degré* n *a* n *racines, si on compte les racines impossibles et les racines multiples* est maintenant connu sous le nom de *théorème fondamental de l'algèbre* ou *théorème de D'Alembert-Gauss*. Il a fait l'objet de nombreux travaux, plusieurs mathématiciens [3] ont essayé de le démontrer, mais leurs démonstrations présentaient des failles et *Gauss* [4] le premier en fournit plusieurs démonstrations, au début du dix-neuvième siècle.

Mais durant tout le dix-huitième siècle, la nature mathématique des nombres complexes reste obscure. Ce qui jette une autre lumière sur le rôle de la rigueur en mathématique. Cette période montre que la créativité prime et que les mathématiciens ont pu utiliser pendant plusieurs siècles des notions qu'ils ne savaient pas justifier, mais qui leur apportaient une mine de résultats qu'ils savaient légitimer autrement, principalement par leurs applications.

3 Les nombres négatifs

On trouve des divergences d'appréciation en ce qui concerne les nombres négatifs et ces controverses se prolongeront jusqu'au dix-neuvième siècle. Ces controverses portent sur le zéro et les nombres négatifs. Nous allons d'abord illustrer les problèmes rencontrés par un texte de *Pascal* extrait d'un article tout à fait remarquable de clarté, *De l'esprit géométrique* (1657).

PASCAL : le zéro et les négatifs

D'abord *Pascal* est un des premiers à affirmer qu'on ne peut pas tout définir en mathématiques et qu'il faut, sous peine des définitions circulaires que l'on trouve dans tous nos dictionnaires, partir de termes non définis.

> …C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses, espace, temps, mouvement, nombre, égalité, ni les semblables qui sont en grand nombre, parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction…

Les nombres font donc partie de ces termes non définis car évidents. Si nous lisons la suite du texte, nous ne pouvons que constater notre accord avec ce que

[3] *Euler*, *Lagrange*, *D'Alembert*, entre autres.

[4] voir l'article de *Friedelmeyer* et l'article très complet de *Gilain* sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre.

dit *Pascal*.

> De même, quelque grand que soit un nombre, on peut en concevoir un plus grand, et encore un qui surpasse le dernier ; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un qui ne puisse être augmenté. Et au contraire, quelque petit que soit un nombre, comme la centième ou la dix millième partie, on peut en concevoir un moindre, et toujours à l'infini, sans arriver au zéro ou néant. . .

Tous les exemples utilisés par *Pascal* sont des entiers ou des fractions décimales. Bien sûr, *Pascal* est conscient que sa notion de nombre est différente de celle d'*Euclide* qui définit un nombre comme *une multiplicité d'unités* et ne compte ni l'unité [5], ni les fractions au rang des nombres. Ce qui entraîne que, chez *Euclide*, si on peut toujours trouver un nombre qui en surpasse un autre, par contre, il y a un plus petit nombre à savoir la plus petite multiplicité, c'est-à-dire 2 :

> Car, afin qu'on entende la chose à fond, il faut savoir que la seule raison pour laquelle l'unité n'est pas au rang des nombres est qu'*Euclide* et les premiers auteurs qui ont traité l'arithmétique ayant plusieurs propriétés à donner qui convenaient à tous les nombres hormis l'unité . . .ont exclu l'unité de la signification du mot nombre. . .

Pascal trouve une solution à ce problème en montrant par un argument théorique euclidien que l'unité et les fractions font partie des nombres.

> Au contraire l'unité se met quand on veut au rang des nombres, et les fractions de même . . .puisque l'unité peut, étant multipliée plusieurs fois, surpasser quelque nombre que ce soit, elle est de même genre que les nombres. . .

Cet argument repose sur la définition 5 du livre 5 des Éléments d'*Euclide* qui définit les grandeurs homogènes entre lesquelles on peut établir un rapport et dit que l'unité et les fractions sont homogènes aux entiers. La différence avec notre conception des nombres est manifeste dans la phrase suivante :

> Le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser. . .

Le même argument définit aussi les nombres négatifs comme hétérogènes aux entiers et donc exclus du champ des nombres. En effet, on peut ajouter -1 autant de fois qu'on veut, on ne pourra jamais dépasser un entier naturel.

Sur cette question du zéro, Christian *Houzel* a écrit un article *L'invention du zéro* [6] où il dit :

---

[5] *Hallez* et *Norton, «un» est-il un nombre ?* dans *La mémoire des nombres.*

[6] Pour la science, octobre 1996.

La présence d'une absence, matérialisée par le zéro, illustre et contient l'essence des mathématiques.

Le modèle des biens et des dettes

Pour ceux qui admettent l'usage des nombres négatifs, les grandes difficultés sont de justifier vis à vis de leurs détracteurs :

– l'existence de quantités négatives isolées : si zéro c'est «rien», une quantité négative est «moins que rien». Quel sens lui donner ?
– la règle des signes pour le produit. L'usage du modèle des gains et des pertes introduit naturellement l'addition, mais pose problème pour la multiplication. Quel sens a une phrase comme : *«une dette multipliée par une dette donne un bien ?» Euler* en 1770 écrit dans son *Introduction complète à l'algèbre* que soustraire b revient à ajouter $-b$ puisque *«annuler une dette signifie la même chose qu'offrir un présent»*.

Pendant toute cette période, on note des confusions entre signe du nombre et signe opératoire[7]. La relation d'ordre pose aussi problème. On trouve dans l'*Encyclopédie Diderot D'Alembert* à l'article *négatif* écrit par *D'Alembert*, la comparaison de deux dettes. Si nous réfléchissons un peu nous constatons que lorsque nous disons qu'une dette est plus grande qu'une autre, nous associons à la plus grande dette un nombre négatif plus petit qu'à la plus petite dette. La relation d'ordre sur les dettes n'est pas la relation d'ordre sur les négatifs. Encore une fois ce modèle ne conduit pas à la droite des réels, mais à deux demi-droites orientées en sens contraire, et donc suivant la logique de *Pascal* à des grandeurs hétérogènes.

La critique de ce modèle est importante et son abandon nécessaire dans l'enseignement. Si un enfant conserve ce modèle comme image des nombres positifs et négatifs, il sera conduit aux paradoxes et aux non-sens auxquels se sont heurtés les mathématiciens dans l'histoire.

Acceptation pragmatique ou rejet ?

La solution trouvée par *Descartes* ou d'autres mathématiciens comme *D'Alembert* dans l'encyclopédie, consiste à dire que l'obtention d'une racine négative pour une équation correspond à un problème concret mal posé. Il suffit de le poser autrement, ce qui revient à prendre pour inconnue l'opposée de la précédente, pour obtenir une racine positive. Le problème est ainsi évacué. Un autre argument se

[7] *Gaud* et *Guichard*, *Aperçu historique sur les nombres relatifs* et le fascicule de l'IREM de Poitiers qui donne de nombreux extraits des positions de différents auteurs.

développe avec l'usage des coordonnées. Il consiste à dire qu'un nombre négatif, si le positif est porté vers la droite sur l'axe est, lui, porté vers la gauche.

Pour certains auteurs comme *Arnaud*, ou plus tard *Carnot*, la solution trouvée est en général de dire que l'usage des nombres négatifs doit être rejeté car susceptible d'introduire des contradictions. Le nombre étant vu en relation avec une opération de dénombrement ou de mesure, une grandeur ne peut être plus petite que 0 car cela revient à concevoir une quantité négative comme *moins que rien* et c'est effectivement une impasse.

La tentative d'extension aux nombres négatifs de toutes les propriétés connues pour les nombres ordinaires, en particulier certaines inégalités conduisent à des absurdités. Voici deux exemples d'arguments employés par les détracteurs des nombres négatifs :

– On applique comme critère de comparaison qu'une fraction est plus grande que 1 si son numérateur est plus grand que son dénominateur.

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

  Donc -1 doit être à la fois plus petit et plus grand que 1, ce qui est contradictoire. Un mathématicien comme *Wallis* qui acceptait les négatifs écrivait dans son *Arithmetica infinitorum* en 1655, en employant le même argument, qu'ils devaient être à la fois inférieurs à zéro, tout en étant infinis, puisque le rapport $\frac{a}{0}$ est infini, et que le dénominateur diminuant s'il devient négatif, la fraction augmente.

– On applique comme critère de comparaison de deux nombres qu'ils sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, comme 9 est plus grand que 4, on doit conclure que $-2 < -3$. Mais si j'ajoute 1 à un nombre, je l'augmente. Or à l'évidence $-2 = -3 + 1$ entraîne que -2 est plus grand que -3. Nouvelle contradiction.

Justifications correctes

Les justifications correctes consistent à introduire des nouveaux nombres et à étendre les règles opératoires usuelles sur les nombres de façon à conserver la commutativité, l'associativité et la règle de distributivité [8]. Dans ce processus certaines inégalités ne sont pas conservées.

Dans l'enseignement, il est nécessaire de bien réfléchir aux modèles dits concrets et aux difficultés qu'ils peuvent engendrer chez les élèves. Si on tient à un modèle

[8] argument développé pour la première fois en 1867 par *Hankel* dans *Théorie du système des nombres complexes*.

concret, il est possible d'utiliser le modèle défini par Jacky *Sip*[9] utilisant des longueurs et des rectangles orientés qui a le mérite de fonctionner à la fois pour l'addition et la multiplication et d'être cohérent avec l'orientation du plan. Ce modèle a l'inconvénient de ne pas être en conformité avec les programmes actuels qui étalent sur plusieurs années la graduation d'une droite et l'introduction des différentes opérations sur les négatifs. De toute façon, l'enseignant doit réfléchir aux implications des modèles qu'il utilise, car ceux-ci peuvent être fixés par les élèves en lieu et place de la notion de nombre négatif qu'on veut introduire.

4 Les nombres complexes : nouveaux développements et crises

L'exponentielle complexe

Euler en 1740 considère des exponentielles de la forme x^y, avec x réel et y purement imaginaire. Il donne la formule :

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$$

En 1748 il établit la formule :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

Cette formule, quand on fait $x = \pi$ donne :

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

que Tobias *Dantzig* qualifie

> [d']union mystérieuse dans laquelle l'arithmétique est représentée par 0 et 1, l'algèbre par $\sqrt{-1}$, la géométrie par π et l'analyse par e.

Ce symbole mystérieux $\sqrt{-1}$ établit un lien entre les différentes parties des mathématiques.

Ces formules ont été établies en utilisant des développements en séries formelles [10] sans s'occuper de question de convergence et ces calculs sont étendus à des nombres complexes. Cependant le statut des nombres complexes, comme celui des négatifs est source de difficultés. Ces difficultés se traduisent par de nombreuses controverses qui montrent la nécessité de fonder rigoureusement ces «nombres».

[9] *Sip, Les nombres relatifs dans le premier cycle*.
[10] déjà utilisés par *Newton* et *Leibniz*

Nouvelle notation des imaginaires

Euler propose en 1777 la notation $a + bi$ pour éviter les confusions avec le calcul de racines. *Euler* propose notre notation i à la place de $\sqrt{-1}$. En effet, il y avait une contradiction entre l'utilisation des règles de calcul avec les radicaux et des règles de calcul avec les imaginaires :

$$\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = -\sqrt{6}$$

et non $\sqrt{6}$, si on appliquait les règles de calculs des radicaux. Cette notation sera adoptée par *Gauss* et universellement acceptée après. Ce problème d'incompatibilité des règles de calcul sur les radicaux et sur les imaginaires est donc résolu par un changement de notation avec l'introduction du symbole i et l'usage du symbole $\sqrt{}$ est réservé aux seules quantités positives.

Logarithmes des nombres imaginaires

Girard en 1629 énonce le principe de permanence dans *l'invention nouvelle en algèbre*, et cet argument sera constant au 18-siècle : le *«recours aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre»*. La première crise concernant l'extension aux nombres complexes des opérations admises pour les nombres réels survient lors de l'extension des logarithmes aux nombres complexes.

Ces logarithmes se sont présentés naturellement dans la théorie de l'intégration des fractions rationnelles, du moment qu'on étend aux nombres complexes les calculs qu'on fait avec les autres nombres. Ces logarithmes sont introduits à l'aide des séries formelles, (utilisées sans considération de convergence).

$$e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$$

$$\ln(1 + z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Formule que *Leibniz* applique en faisant $z = -2$

$$\ln(-1) = \ln(1 + (-2)) = -2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} ...$$

Cette somme ne pouvant à l'évidence être ni un nombre positif ni un nombre négatif, *Leibniz* conclut que ce doit être un nombre imaginaire.

En utilisant le principe de permanence, on admet l'existence d'une fonction $L(z)$ définie pour z non nul et possédant les propriétés suivantes :

* $e^{L(z)} = z$, c'est la réciproque de l'exponentielle ;

* elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$L(zz') = L(z) + L(z')$$

* elle vérifie l'équation différentielle :

$$dL = \frac{dz}{z}$$

Ceci conduit à un certain nombre de contradictions que nous allons illustrer par $\ln(-1)$. Voici deux calculs de ce nombre impossible :

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1, \text{ donc } L(-1) = \pi\sqrt{-1}$$

$$(-1)^2 = 1, \text{ donc } 2L(-1) = 0 \text{ et } L(-1) = 0$$

Cette extension aux nombres imaginaires des logarithmes fait apparaître un phénomène nouveau qui sera l'objet de violentes controverses entre *Leibniz* et Jean *Bernouilli* entre 1712 et 1713 avant d'être élucidé par *Euler* en 1749. On trouve cette controverse dans le texte d'*Euler* et dans son étude par *Verley*[11]. Disons que les arguments échangés reposent tous sur des calculs qu'aujourd'hui nous interdisons dans l'enseignement, à savoir d'utiliser des séries sans s'être d'abord assurés de leur convergence. La solution d'*Euler* consiste à dire que le logarithme d'un nombre complexe[12] possède une infinité de déterminations, définies à $2ik\pi$ près.

$$L(a + ib) = L(\rho e^{i\theta}) = L(\rho) + i(\theta + 2k\pi)$$

Si un nombre est réel positif, parmi ses logarithmes, il en possède un qui est réel. La solution d'*Euler* ne fut pas acceptée facilement.

Ces difficultés, loin de conduire les mathématiciens à l'abandon de ces nombres, vont accroître le désir des mathématiciens de trouver un statut pour ces nombres impossibles. Comme le seul fondement légitimé des mathématiques est encore celui d'*Euclide* et en particulier le livre 5 sur les rapports de grandeurs, des mathématiciens vont chercher à étendre cette théorie pour pouvoir y incorporer les rapports de nombres de signes quelconques et les rapports de nombres complexes.

5 Justification des nombres impossibles

Il faut attendre le début du dix-neuvième siècle pour qu'une justification mathématique correcte des nombres imaginaires (et en même temps des négatifs)

[11] *La controverse des logarithmes négatifs et imaginaires.*

[12] comme la mesure d'un angle définie à $2k\pi$ près.

voie le jour. La première théorie géométrique est l'œuvre de plusieurs mathématiciens presque inconnus, travaillant indépendamment. Après un premier essai de *Wallis* (1685), qui pressent comment représenter les nombres complexes par des points du plan, sans savoir comment représenter les opérations, deux exposés complets sont l'œuvre du danois *Wessel* (1798) et du suisse *Argand* (1806) et passent presque inaperçus. En 1813, suite à une lettre d'un dénommé *François* au journal de Gergonne, *Argand* fait connaître son travail par cette revue. D'autres mathématiciens [13] publient leurs recherches sur la représentation géométrique des nombres complexes dans les premières décennies du siècle. Lorsqu'on examine le travail d'*Argand*, on y voit l'extension de la théorie euclidienne des rapports de grandeurs aux grandeurs dirigées. Cependant cette justification subordonne les nombres complexes à la géométrie, ce qui est peu satisfaisant au point de vue logique.

Des mathématiciens plus connus développent des justifications de type algébrique et arithmétique, qui seront acceptées après les prises de position de *Gauss* et de *Cauchy*. *Gauss* avait une justification qu'il n'a jamais publiée : les *entiers de Gauss* (1831) qui désignent les points à coordonnées entières dans le plan s'écrivent $a + ib$ avec a et b entiers, prouvent qu'il utilisait cette représentation géométrique des nombres complexes. *Gauss* propose aussi l'abandon des connotations, «impossibles», «imaginaires» qui avaient été associées à ces nombres jusque là et appelle ces nombres, «nombres complexes», nom adopté depuis lors. *Hamilton* en 1837 justifie les nombres complexes comme des couples de nombres réels sur lesquels il définit une addition et une multiplication. *Cauchy*, en 1847 montre que travailler avec des nombres complexes revient à travailler sur des polynômes en la variable i en remplaçant toutes les fois que cela est possible, i^2 par -1.

Cette époque voit débuter un formidable développement de l'analyse complexe. E. *Cartan* a écrit un article remarquable et très complet [14] sur l'histoire des nombres complexes qui sert encore de référence aujourd'hui.

ARGAND et les grandeurs dirigées

Nous allons nous attarder sur la justification d'*Argand* [15] car c'est une tentative d'extension de la théorie des proportions d'*Euclide*. Nous présentons seulement

[13] *Buée* en 1805, *Mémoire sur les quantités imaginaires* ; *Warren* en 1828, *Traité sur la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives* ; l'abbé *Mourey* en 1828, *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendument imaginaires*.

[14] E. *Cartan*, *Nombres complexes*.

[15] Nous utilisons le livre édité aux éditions Blanchard qui comporte, outre les deux textes d'*Argand*, des textes de *Hoüel* et *Itard* en préface et en postface des lettres qui reflètent les débats parus dans les annales de Gergonne.

les idées essentielles pour situer le texte d'*Argand*.

L'idée fondamentale d'*Argand* est d'étendre la théorie des rapports de grandeurs d'*Euclide* à des grandeurs dirigées. Sa première étape est de justifier les grandeurs négatives en les inscrivant sur un axe et également en utilisant le modèle d'une balance. Ensuite, il s'attache à justifier les proportions :

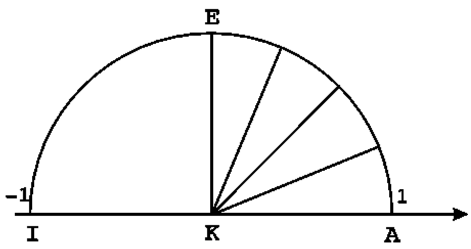
$$\frac{+1}{+1} = \frac{-1}{-1} \quad \text{et} \quad \frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1}$$

Un rapport de deux grandeurs égales de même direction ou de directions opposées se voit donc attribuer un signe plus ou un signe moins, suivant que les lignes sont de même sens ou opposées.

Puis le problème d'*Argand* est de trouver une moyenne proportionnelle x entre $+1$ et -1, c'est à dire de trouver une grandeur dirigée qui réalise la proportion :

$$\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$$

Soit K l'origine, A et I les points de l'axe des x de coordonnées $+1$ et -1. Il fait la construction de la hauteur KE du triangle rectangle isocèle de base AI. On peut dire suivant le langage des proportions que KA est à KE comme KE est à KI, puisque ceci est vrai en grandeur absolue et que au niveau des directions, l'angle entre KA et KE est égal à l'angle entre KE et KI.



Il montre qu'entre les grandeurs précédentes, il peut insérer autant de moyennes qu'on veut, ce qui revient à placer des directions d'angle $\frac{k\pi}{2^n}$. Il généralise et définit une grandeur dirigée par sa longueur et son angle avec KA. Cela le conduit aux deux représentations des grandeurs dirigées, soit sous la forme $a + ib$, soit sous la forme $\rho e^{i\theta}$, à définir l'addition et la multiplication des grandeurs dirigées et à retrouver toute la trigonométrie ordinaire. En résumé, le rapport de deux grandeurs KM et KN est donné en grandeur par le rapport des longueurs et en direction par l'angle entre KM et KN, c'est-à-dire par la différence des angles (KA, KM) et (KA, KN). On a donc bien là les débuts du calcul vectoriel dans le plan.

L'extension à l'espace

Dans son texte de 1813, outre les développements précédents, il montre le théorème fondamental de l'algèbre[16] et propose une extension à l'espace des grandeurs dirigées. Son idée est la suivante : aux grandeurs dirigées du plan sont associées une grandeur réelle et un angle réel. Les grandeurs non portées par l'axe sont imaginaires. Pour obtenir des grandeurs qui ne sont pas dans le plan de coordonnées, il suffit de prendre une grandeur réelle et un angle imaginaire.

La théorie d'*Argand* associe aux nombres complexes des entités géométriques, nos vecteurs du plan. Le problème de l'extension à l'espace des grandeurs dirigées est posé dès les premiers textes et vont conduire à l'élaboration du calcul vectoriel. Celui-ci sera l'œuvre indépendamment de deux mathématiciens : *Hamilton* qui publie en 1844 *Elements of quaternions* et *Grassmann* qui fait paraître la même année son calcul d'extension, *Die lineale Ausdehnungslehre* qui ne se situe pas dans le domaine numérique. L'œuvre de *Grassmann*[17] ne sera connue qu'après sa redécouverte par *Peano*[18] à la fin du 19-ième siècle.

HAMILTON et les quaternions

Hamilton a eu toute sa vie la préoccupation d'écrire pour l'algèbre l'équivalent des Éléments d'Euclide pour la géométrie. Il a fourni une justification algébrique des nombres complexes par les couples. Tout de suite après, il se préoccupe de l'extension à l'espace, avec l'introduction de triplets, et fait en 1843 l'inventaire des propriétés qu'ils doivent vérifier. À la fin de cette année 1843, il comprend qu'il doit introduire non des triplets mais des quadruplets de nombres, qu'il appelle les quaternions. Un quaternion est un nombre $w + xi + yj + zk$ où w, x, y, z désignent des nombres réels et i, j, k forment un trièdre orthonormé direct : la somme vérifie les lois habituelles et le produit vérifie les lois habituelles de distributivité... sauf la commutativité. On pose les relations :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

Cette découverte est fondamentale et fait sensation : c'est le premier système de nombres non contradictoire qui ne vérifie pas toutes les propriétés habituelles des opérations.

---

[16] démonstration intéressante mais qui présente une faille.

[17] *Dorier,* Grassmann *et la théorie l'extension.*

[18] *Peano, Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H.* Grassmann *preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.*

Hamilton distingue dans le quaternion le scalaire w (de scale, échelle de valeurs) et le vecteur $xi + yj + zk$. Voyons ce que donne le produit de deux quaternions réduits à des vecteurs :

$$v \times v' = (xi + yj + zk)(x'i + y'j + z'k)$$

$$v \times v' = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yz')k$$

Hamilton distingue $S(v, v')$, partie scalaire de $v \times v'$, (l'opposé de notre produit scalaire actuel) et $V(v, v')$, notre produit vectoriel actuel.

Nombres ou vecteurs géométriques ?

Avant que le travail de *Grassmann* ne soit connu, les quaternions étaient le seul moyen de travailler avec les vecteurs de l'espace. Un texte remarquable de *Maxwell* illustre l'intérêt qu'il porte à ce nouveau calcul et les limites qu'il lui voit. *Maxwell* écrivit ses équations en 1860, avec les coordonnées et les réécrira plus tard en 1873 à la fois en utilisant les composantes et en notations tirées du calcul des quaternions dans son *Traité d'Électricité et de magnétisme*. Je reproduis un grand passage de la préface de l'Édition de 1889 texte admirable du point de vue historique sur les méthodes mathématiques de la physique qui exprime bien à la fois l'intérêt des quaternions et leurs limites.

MAXWELL **et les quaternions**

> Relation entre les quantités physiques et les directions de l'espace
> Pour distinguer les différentes espèces de quantités physiques, il est très important de connaître quelle est leur relation avec la direction des axes de coordonnées dont on se sert d'habitude pour définir la position des objets. L'introduction des axes de coordonnées en géométrie, due à *Descartes*, a été un des plus grands progrès faits dans les mathématiques, car elle a ramené les méthodes de la géométrie à des calculs portant sur des quantités numériques. On fait dépendre la position d'un point de la longueur de trois lignes toujours tracées dans des directions déterminées, et, de même, on considère la ligne qui joint deux points comme la résultante de trois autres lignes.

On reconnaît là la description d'un repère orthonormé, des coordonnées d'un point et des composantes d'une «ligne» joignant deux points.

> Mais souvent en physique, pour raisonner, et non plus pour calculer, il est désirable d'éviter l'introduction explicite des coordonnées cartésiennes, et il est avantageux de fixer son attention sur un point de

> l'espace pris en lui-même, et non plus sur ses trois coordonnées, sur la grandeur et la direction d'une force, non sur ses trois composantes. Cette manière d'envisager les quantités géométriques et physiques est plus naturelle que l'autre, et se présente d'abord à l'esprit ; néanmoins les idées qui en découlent ne reçurent pas leur entier développement, jusqu'au jour où *Hamilton* fit un deuxième grand pas dans l'étude de l'espace, par l'invention de son calcul des Quaternions.

L'opposition entre raisonner en physique et non plus calculer est d'une brûlante actualité dans l'enseignement où le refuge des étudiants est de se précipiter sur l'application de formules ! On pense aussi au texte de Galois [19], «sauter à pieds joints sur les calculs...»

> Comme aujourd'hui les méthodes de *Descartes* sont encore les plus familières à ceux qui étudient les sciences et qu'elles sont en réalité les plus avantageuses pour le calcul, nous exprimerons tous nos résultats sous la forme cartésienne ; mais je suis convaincu que l'introduction des *idées de* Hamilton, *prises en dehors des opérations et des méthodes des quaternions* [20], nous seront d'une grande utilité pour l'étude de toutes les parties de notre sujet, et en particulier de l'Électrodynamique, où nous avons à considérer un certain nombre de quantités physiques dont les relations peuvent s'exprimer bien plus simplement par quelques mots du langage de *Hamilton* que par les équations ordinaires.

Les idées de *Hamilton* prises en dehors des opérations et des méthodes des quaternions ! Formule remarquable que *Maxwell* explicite dans le paragraphe suivant. Quelles sont ces idées qui lui paraissent si importantes ?

> Un des traits les plus importants de la méthode de *Hamilton* est la division des quantités en **scalaires** et **vecteurs**.
> Une quantité scalaire est susceptible d'être entièrement définie par une seule donnée numérique. Sa valeur numérique ne dépend en aucune façon de la direction attribuée aux axes de coordonnées.
> Un vecteur ou quantité ayant une direction exige, pour être défini, trois coordonnées numériques, ce dont on peut se rendre compte le plus aisément en les considérant comme se rapportant à la direction des axes de coordonnées.

Dans cette préface, *Maxwell* présente l'ensemble des méthodes mathématiques de la physique. On comprend au travers de ce texte, l'échec de ce que *Hamilton* avait

[19] reproduit dans le livre de N. *Mahammed, Résolution des équations algébriques*

[20] souligné par moi.

considéré comme la grande œuvre de sa vie, écrire ces Éléments d'Algèbre qui joueraient pour la science au dix-neuvième siècle le rôle que les Éléments d'Euclide avaient joué depuis l'antiquité. *Hamilton* a milité activement pour l'usage des quaternions et en a montré les multiples applications en physique. *Tait* a poursuivi cette œuvre. Les quaternions sont des nombres et je serais tentée de définir le travail de *Hamilton* comme une tentative pour algébriser la physique.

Ce n'est pas le lieu de retracer ici l'histoire du calcul vectoriel [21]. Au début du siècle, un très vif débat s'est engagé parmi les mathématiciens et les physiciens sur le choix des quaternions ou sur le choix du calcul vectoriel défini par *Peano* à la suite de sa redécouverte du travail de *Grassmann* [22]. Le travail de *Grassmann* et *Peano* se situe à la naissance du calcul vectoriel [23] actuel, calcul de type géométrique. Toutefois, on voit ici que l'interpénétration des domaines numériques, algébriques, géométriques et physiques fait partie de l'essence même de la science mathématique et physique actuelle.

[21] j'en ai fait un résumé dans mon article *Le calcul vectoriel* dans *La rigueur et le calcul*.

[22] voir *Crowe, Vector analysis*.

[23] Un nouveau livre vient de paraître sous la direction de Dominique *Flament* : *Le nombre, une hydre à mille visages, entre nombres et vecteurs*.