LES NOMBRES EN MÉSOPOTAMIE

Dans la région actuelle de l'Irak, peuplée de différentes ethnies au quatrième millénaire avant notre ère, arrive un peuple dont l'origine ne nous est pas connue, les Sumériens, qui unifient la région et inventent, (entre -3500 et -3000) une écriture appelée aujourd'hui par écriture cunéiforme. Cette écriture est idéographique, avec d'abord des pictogrammes, puis des idéogrammes [1].

La région est envahie vers le milieu du troisième millénaire par un autre peuple, sémitique celui-là, qui supplante totalement les Sumériens. Ce nouveau peuple, les Akkadiens, adopte l'écriture sumérienne pour transcrire sa propre langue. L'adoption des idéogrammes se fait soit pour noter le sens d'un terme, soit pour noter une syllabe sumérienne, soit une syllabe akkadienne. Le sumérien est conservé à titre de langue savante. Ce système d'écriture fut adopté par la suite par de nombreux peuples du Moyen-Orient pour transcrire leurs propres langues.

L'histoire de cette région [2] est divisée en périodes suivant les dynasties et les empires qui se partagent le territoire. Au troisième siècle avant notre ère, la région est conquise par *Alexandre* et l'on désigne cette période sous le nom d'*Époque Séleucide*. Le dernier texte de cette civilisation date du premier siècle de notre ère qui marque la fin de la civilisation mésopotamienne.

Les textes de cette civilisation ont été conservés sous forme d'inscriptions en forme de coins, (ou de clous) sur des tablettes d'argile, d'où le nom de cunéiforme donné à cette écriture. Son déchiffrement est plus récent que celui des hiéroglyphes égyptiens. Le début du déchiffrement est l'œuvre de *Rawlingson* vers 1850 [3]. Les découvertes de véritables bibliothèques de tablettes sont relativement récentes, mais les textes conservés sont plus nombreux que ceux de l'Égypte antique.

[1] B.N.F. *L'aventure des écritures*, http ://www.bnf.fr/web-bnf/pedagos/dossiecr

[2] *Bottéro* : *La Mésopotamie, l'écriture, la raison et les Dieux*, *Kramer L'histoire commence à Sumer*, *Roux* : *La Mésopotamie.*

[3] *Bonfante, La naissance des écritures, du cunéiforme à l'alphabet* et *Bottéro Il était une fois la Mésopotamie.*

Les textes mathématiques

Les mathématiques et l'écriture entretiennent une relation très étroite. Elles sont nées en même temps, et restent très liées [4]. Ce point est important à noter car nous sommes habitués à considérer le langage écrit comme la transcription du langage parlé. Il n'en a pas toujours été ainsi au commencement, et il n'en est pas ainsi pour toutes les langues ; ainsi l'écriture chinoise n'est pas une transcription du langage parlé [5]. Il paraît clair que pour qu'une mathématique se développe, il y a nécessité d'un support écrit. Mais l'inverse fut vrai, au sens que les premières tablettes d'écriture furent des tablettes de comptabilité. Les premiers textes montrent que le besoin de garder trace des transactions fut essentiel pour l'invention de l'écriture. Les découvertes des dernières décennies en archéologie ont permis de suivre les débuts du développement de deux systèmes d'écriture, le sumérien et l'élamite (en Iran actuel, un peu plus tard). Les transcriptions de nombres figurent parmi les premiers caractères d'écriture, sur des tablettes de comptes.

Les tablettes mathématiques [6] retrouvées datent de trois périodes différentes :

– la période protosumérienne des débuts de l'écriture [7],
– autour de -2000,
– la période Séleucide de -300 à 100.

Les mathématiques babyloniennes ont été découvertes beaucoup plus tardivement que les mathématiques égyptiennes. Elles sont connues par l'œuvre de *Thureau Dangin* [8] et *Neugebauer Sacks* [9]. Les textes découverts sont essentiellement des travaux d'écoliers scribes. Ils sont de deux sortes : des tables de calculs et des listes de problèmes avec des solutions. Les études actuelles montrent qu'elles étaient beaucoup plus avancées que les mathématiques égyptiennes et qu'il y a eu diffusion des mathématiques babyloniennes et influence vers l'Égypte, la Grèce et vers l'Inde.

[4] *Goldstein, Au commencement le nombre* dans La Recherche, numéro spécial Nombres.

[5] Voir *E. et A. Cousquer L'Informatisation du chinois,* et *Informatique et vocabulaire scientifique chinois*.

[6] *Ritter, Mathématiques mésopotamiennes.*

[7] Tablettes protosumériennes, Pour la Science, avril 1984 et
Site de recherche sur les tablettes archaïques
$http://early-cuneiform.humnet.ucla.edu/archaic/index.html$

[8] *Thureau Dangin, Textes mathématiques babyloniens*, 1938.

[9] *Neugebauer Sacks, Mathematical cuneiform texts,* 1945.

Mystique des nombres et astrologie babylonienne

Les Babyloniens ont développé toute une mystique des nombres [10], dont le sens nous échappe en grande partie. Ces conceptions faisaient l'objet d'une transmission orale. Chaque nombre de 1 à 60 était associé à un dieu, une déesse ou un démon. Ainsi 7 dont les Babyloniens savaient qu'il était impossible de lui trouver un inverse était associé à un démon. Les prêtres scribes possédaient un nom chiffré.

À côté de textes mathématiques ou médicaux, figurent des textes astrologiques qui présentent la même structure formelle que ces textes scientifiques : listes de conditions du genre : *«si on observe que… alors cela veut dire…»*. Ces conceptions astrologiques et numérologiques ont survécu jusqu'à nous. Il est difficile de séparer les sciences et l'astrologie chez les Babyloniens, (cela a duré jusqu'au dix-septième siècle de notre ère) ; pour eux la «science» des présages était la discipline fondamentale.

Caractéristiques des mathématiques babyloniennes

La plupart des textes que nous avons sont des tables de calcul : tables de multiplication [11], d'inverses [12], de carrés [13], de cubes, de racines carrées [14]. Les autres textes sont des tables de problèmes, souvent rangés dans un ordre systématique, suivant une complexité croissante. Nous avons l'habitude de présenter des règles générales avant de spécifier l'application de ces règles ou algorithmes à des valeurs particulières. Dans les textes babyloniens, la procédure générale n'est jamais indiquée. Faisait-elle l'objet d'une transmission orale ? Les textes présentent une procédure sur un exemple ou sur une liste d'exemples particuliers par une liste de calculs faisant référence aux tables précitées, suite de consignes données à l'apprenti scribe : *«prends ce nombre, prends son carré…, le résultat est…»* La procédure générale devait-elle être induite à la suite de ces exemples ? Nul ne sait [15].

Ce type de mathématique est dite *numérique*, car traitée uniquement sur des exemples numériques. Les calculs numériques et leurs applications à différents domaines, calculs d'intérêts, calculs économiques, astronomie, jouent un rôle central. Même les textes géométriques sont plutôt un cas particulier d'application de calculs numériques. Les textes mathématiques babyloniens comportent une liste

[10] *Rutten, La Science des Chaldéens*.
[11] *Colette, Histoire des mathématiques*.
[12] Table des inverses, cf. *Guitel* ou *Cajori Mathematical notations*.
[13] Table de carrés, Pour la Science, avril 1984.
[14] *Pichot, La naissance de la science*.
[15] *Caveing, Babylone* dans *Noël, Le matin des mathématiciens*.

de mots et de nombres, mais aucun symbolisme de signes opératoires par exemple. La structure des textes présente des traits communs avec ceux des textes égyptiens, chinois et arabes ultérieurement. On peut les caractériser comme *rhétoriques* car les problèmes sont spécifiés avec des mots du langage courant, *numériques*, car les calculs sont toujours faits sur des exemples précis et *algorithmiques* car ils décrivent des procédures pour arriver à un résultat.

Cependant, vu le caractère particulier des termes sumériens employés en mathématiques, conservés avec leur sens dans la langue akkadienne, certains auteurs pensent que cette terminologie marque le début d'un symbolisme algébrique. En effet, il y a un certain détachement du dessin et du son dans les textes mathématiques, alors que la terminologie des textes égyptiens est beaucoup plus concrète. Le développement de l'algèbre est l'œuvre d'abord des Arabes dans la même région, trois millénaires plus tard. Un historien des mathématiques *Hoyrup* [16] insiste beaucoup sur cette continuité culturelle en mathématiques au Moyen Orient.

Les calculs des Babyloniens

Thureau Dangin écrivait à propos du système sexagésimal babylonien :

> *L'incomparable instrument de calcul dont disposaient les mathématiciens babyloniens était de nature à leur aplanir la voie qui mène à la méthode algébrique. L'expression du nombre atteint dans le système savant un degré de simplicité, d'homogénéité et d'abstraction qui n'a jamais été dépassé. Comment les Babyloniens sont-ils venus à une conception aussi abstraite du nombre ?*

On sait aujourd'hui partiellement répondre à cette question : un historien des sciences, *James Ritter* [17] montre, à partir de systèmes métrologiques distincts combinant de différentes façons des multiples de 6 et des multiples de 10, la naissance de ce système unifié à base 60.

La base 60 utilisée permettait d'écrire des nombres assez grands avec peu de symboles, ainsi que des nombres assez petits. Le nombre 60 a également l'avantage d'avoir des diviseurs assez nombreux (12) donc les inverses de ces nombres $2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$, s'exprimaient très simplement. D'une façon générale tous les rationnels dont le dénominateur peut s'écrire sous forme réduite par $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ possèdent un développement sexagésimal fini.

La base 60 et le système des différentes mesures de longueur, de volume, etc. étaient bien adaptés. Nous ne traiterons pas cet aspect du lien entre les nombres

[16] *Hoyrup, Les quatre cotés et l'aire, sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes.*

[17] *Ritter, Mésopotamie : une énigme résolue ?*

abstraits, les unités de mesures et les monnaies. Dans un problème, le scribe traduisait les données en un nombre abstrait, faisait les calculs et donnait ensuite les résultats sous forme de nombre concret. Ce système facilitait les multiplications et les divisions qui s'effectuaient de la même façon sur les entiers et les fractions. Bien sûr pour des additions et des soustractions, il était nécessaire de repérer l'ordre de grandeur des nombres à ajouter. Aucune marque formelle analogue à notre point décimal ne marque cet ordre de grandeur, qui se comprend d'après le contexte.

Il est utile de faire quelques calculs en base 60. Par exemple, convertir $43\,275\,849$ et $184,4278$. Pour cela, l'usage de la calculatrice aide [18]. Pour le premier, diviser autant de fois que possible par 60, pour obtenir une partie entière 3 inférieure à 60. Soustraire celle-ci, puis multiplier par 60. On obtient 20 comme partie entière, on la soustrait, et on recommence [19].

On obtient : $43\,275\,849 = 3, 20, 21, 4, 9;$

Calculez de même le deuxième nombre : $184,4278 = 3, 4; 25, 40, 4, 48$

Analyse de tablettes de calcul des Babyloniens

Les Babyloniens n'avaient pas besoin de tables d'addition. Vous vous en convaincrez aisément en essayant de faire quelques additions avec des nombres écrits à l'aide de leur notation ; elles sont encore plus simples que nos additions. Par contre ils avaient des tables de multiplication pour tous les couples de nombres entre 1 et 59. À l'aide de ces tables, ils pouvaient multiplier deux nombres quelconques, entiers ou fractionnaires en sexagésimal. Essayez vous-même de faire de telles multiplications.

Table d'inverses

Pour la division d'un nombre a par un nombre b, les Babyloniens cherchaient dans une table d'inverses l'inverse de b, puis ils effectuaient un produit.

On a trouvé des tables d'inverses [20]. On constate que, dans ces tables, seuls figurent les nombres qui possèdent un inverse ayant un développement sexagésimal fini, c'est à dire ceux qui sont du type $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$. Par exemple, on ne trouve

[18] Justifiez vous-même le procédé suivant indiqué par une suite de consignes à la manière babylonienne.

[19] Par convention, suivant la pratique des savants qui ont analysé ces tablettes babyloniennes, on sépare par des virgules les différents blocs entre 0 et 59 et on marque par un point-virgule la séparation entre partie entière et partie fractionnaire.

[20] Table des inverses, *Guitel* ou *Cajori*, *Mathematical notations*. Sur l'établissement de tables d'inverses, voir *Histoires d'algorithmes...*

pas l'inverse de 7. Aucune explication ne figure. Sur certaines tablettes, pour cet inverse de 7, il est mentionné «*n'existe pas*». On sait que ce nombre 7 figure les démons...

Le calcul de $\frac{1}{7}$ est intéressant car sa période apparaît très rapidement, aussi bien en sexagésimal qu'en décimal : voici comment faire un calcul exact :

$$\frac{1}{7} = \frac{60}{7 \times 60} = \frac{8}{60} + \frac{\frac{4}{7}}{60} = \frac{8}{60} + \frac{\frac{240}{7}}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{\frac{2}{7}}{60^2} =$$

$$\frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{\frac{120}{7}}{60^3} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{\frac{1}{7}}{60^3}$$

Il est alors évident que l'opération se répète indéfiniment.

$$\frac{1}{7} = 0; 8, 34, 17, 8, 34, 17, \ldots$$

avec répétition indéfinie de $(8, 34, 17)$ en sexagésimal.

$$\frac{1}{7} = 0,142\,857\,142\,857\ \cdots$$

avec répétition indéfinie de $142\,857$ en décimal.

Le théorème de PYTHAGORE

Certaines tablettes prouvent que le résultat que nous connaissons sous ce nom était connu des Babyloniens un millier d'années avant *Pythagore*.

Dans une tablette datée d'environ -1700 figure le problème suivant : une poutre de longueur $0; 30$ est placée contre un mur, de même hauteur (d). Son extrémité supérieure glisse et descend de $0; 6$ ($d - h$). À quelle distance du mur (b) se trouve maintenant son extrémité inférieure ? Le calcul de b est fait en calculant $\sqrt{d^2 - h^2}$. Le même problème, sous des formes variées se retrouve jusqu'à nos jours, et était un problème classique dans les textes arabes.

Les triplets pythagoriciens

Une autre tablette[21] tout à fait remarquable présente des listes de nombres entiers appelés triplets pythagoriciens, c'est à dire de triplets d'entiers solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Cette tablette est le plus ancien document connu de

[21] Plimpton 322
$http://aleph0.clarku.edu/\ djoyce/mathhist/plimpnote.html$

théorie des nombres [22]. Elle fut écrite entre -1900 et -1600. Les nombres qui figurent sur cette tablette excluent une découverte par hasard. Voici par exemple les nombres qui figurent sur les quatre premières lignes :

119	120	169
3367	3456	4825
4601	4800	6649
12709	13500	18541

Il n'a pas été possible de retrouver la formule générale qui a servi à établir cette tablette ; différentes hypothèses ont été avancées sans qu'il soit possible de trancher avec certitude. On sait que les Grecs très tardivement et les Arabes connaissaient une telle formule :

$$x = 2pq, \quad y = p^2 - q^2, \quad z = p^2 + q^2$$

avec p et q entiers, pour des nombres x, y, z premiers entre eux.

Les Babyloniens disposaient plus de mille ans avant d'un algorithme assez général pour trouver de nombreux triplets pythagoriciens. Par contre, *Pythagore* n'a disposé que de deux formules donnant des cas particuliers de triplets.

Neugebauer suppose, en raison de la présence d'une colonne qui écrit des rapports du type $\frac{z}{x}$ variant de façon régulière, que les Babyloniens connaissaient la formule générale précédente et l'utilisaient de la façon suivante :

$$\frac{z}{x} = \frac{p^2 + q^2}{2pq} = \frac{1}{2}(p \times \bar{q} + q \times \bar{p})$$

en désignant par $\bar{p}$ l'inverse de p. Ils auraient alors choisi des valeurs de p et q dont ils pouvaient connaître l'inverse en sexagésimal. Cependant cette interprétation est contestée par d'autres spécialistes et les Babyloniens n'ont laissé aucune trace de la formule ou de la méthode qu'ils ont employée pour établir cette table.

Calcul de $\sqrt{2}$

Une tablette [23] donne une valeur approchée très précise de $\sqrt{2}$. Sur un carré sont dessinées les deux diagonales. Sur un côté figure le nombre 30. Au dessus de

[22] *Van der Waerden, Science awakening* , *Delire, Des mathématiques babyloniennes à l'arithmétique pythagoricienne : la tablette cunéiforme Plimpton 322*, et *Neugebauer Les sciences exactes dans l'antiquité.*

[23] YBC 7289, voir *Pichot* page 105 et le site
http://www.maths.uwa.edu.au/Staff/schultz/3M3/L1Babylonianroot2.html

la diagonale le nombre $1;24,51,10$; au dessous de la diagonale figure le nombre $42;25,35$. Si nous calculons les valeurs décimale de ces nombres nous obtenons :

$$1;24,51,10 \approx 1,414\,212\,9, \qquad \text{or} \qquad \sqrt{2} \approx 1,414\,213\,5$$

$$30 \times (1;24,51,10) = 42;25,35$$

Cette valeur de $\sqrt{2}$, d'une précision tout à fait étonnante pour l'Antiquité, n'était pas toujours utilisée dans les tablettes babyloniennes. Souvent la valeur approchée $1;25$ était utilisée.

De ces exemples, nous pouvons conclure que le résultat connu sous le nom de théorème de *Pythagore* était connu plus d'un millier d'années avant *Pythagore* et que les Babyloniens possédaient une méthode efficace de calcul des racines que nous allons présenter maintenant.

Méthode de calcul de racines

Soit à calculer $\sqrt{A}$. Si l'on utilise une valeur approchée a plus grande que $\sqrt{A}$, la valeur $\frac{A}{a}$ sera plus petite que $\sqrt{A}$ et si l'on utilise une valeur approchée a plus petite que $\sqrt{A}$, la valeur $\frac{A}{a}$ sera plus grande que $\sqrt{A}$. En prenant la valeur

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$$

on peut espérer obtenir une meilleure approximation que a. En itérant le procédé, on obtient des valeurs de plus en plus précises. Ce procédé est essentiellement le même que celui qui sera employé plus tard par les Grecs et les Arabes, et connu sous le nom d'algorithme de Babylone ou de *Héron* (mathématicien grec).

Nous utilisons encore cet algorithme, dont on peut montrer qu'il converge vers la racine cherchée rapidement, en moyenne quadratique, c'est-à-dire que le nombre de chiffres décimaux exacts double à chaque pas d'itération. Sans fournir une démonstration, les Babyloniens connaissaient cette convergence et l'utilisaient pour le calcul de racines. Si on fait le calcul de $\sqrt{2}$ par cette méthode à partir de $a = 1$, on obtient la valeur inscrite sur la tablette à la quatrième approximation.

L'algèbre babylonienne

À part les tablettes de calcul, les textes babyloniens [24] sont constitués de listes de problèmes avec leurs solutions [25]. Lorsqu'on analyse ces problèmes, une grande partie se ramène à des équations simples. Les Babyloniens savaient résoudre beaucoup de problèmes du premier et du second degré [26]. Voici des exemples qui nous permettront de voir concrètement la signification de mathématiques rhétoriques, numériques et algorithmiques dont nous avons parlé précédemment. En voici la traduction :

Un premier problème

> Longueur, largeur.
> J'ai multiplié longueur et largeur, j'ai obtenu l'aire. J'ai ajouté à l'aire l'excès de la longueur sur la largeur : $3{,}3;$
> En outre, j'ai additionné longueur et largeur : 27
> Demandés longueur, largeur et aire [27].
> On suit cette méthode :
> ajouter $27;$ et $3{,}3;$ on trouve $3, 30;$
> ajouter $2;$ et $27;$ on trouve $29;$
> prendre la moitié de $29;$ on trouve $14; 30$
> prendre le carré de $14; 30$ on trouve $3, 30; 15$
> retrancher à $3, 30; 15$ le nombre $3, 30;$ on trouve $0; 15$
> la racine carrée de $0; 15$ est $0; 30$
> ajouter $14; 30$ et $0; 30$ longueur $15;$
> retrancher à $14; 30 \quad 0; 30$ largeur $14;$
> soustraire $2;$ qui a été ajouté à $27;$ de $14; \quad 12;$ est la largeur présente
> multiplier $15;$ (longueur) par $12;$ (largeur) l'aire est $3, 0;$
> retrancher à $15; \quad 12;$ on obtient $3;$
> ajouter $3, 0;$ et 3 on obtient $3, 3;$

Pour comprendre la suite des calculs, nous allons les retranscrire dans nos notations algébriques :

$$xy + x - y \quad = \quad 183$$

[24] Tablette 13901 du British Museum, datant de -1750, traduite et commentée par *Thureau Dangin*.

[25] *Van der Waerden, Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics, Caveing Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte ancienne* et *Ritter Babylone 1800* et *Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie*.

[26] *Talon, Introduction aux mathématiques babyloniennes* dans *d'*Imhotep *à* Copernic.

[27] AO8862, prisme du Louvre.

$$x + y = 27$$

La solution fait intervenir une inconnue auxiliaire $y' = y + 2$ et se ramène au système :

$$\begin{aligned} xy' &= 183 + 27 \\ x + y' &= 29 \end{aligned}$$

Ce problème, trouver deux nombres dont on connaît la somme $S = x + y$ et le produit $P = xy$ était un problème classique. Les Babyloniens utilisaient pour cela l'identité facile à obtenir à l'aide de découpages, que nous écrivons aujourd'hui :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

La méthode revient à dire, (en désignant par x le plus grand des deux nombres et par $E = \frac{x-y}{2}$ leur demi-différence,) cherchons :

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{S}{2} + E \\ y' &= \tfrac{S}{2} - E \\ (\tfrac{S}{2} + E)(\tfrac{S}{2} - E) &= (\tfrac{S}{2})^2 - E^2 \\ (\tfrac{S}{2})^2 - E^2 &= P \\ E &= \sqrt{(\tfrac{S}{2})^2 - P} \end{aligned}$$

Bien entendu les calculs sont effectués en numération sexagésimale.

Un deuxième problème

> La surface du carré ajoutée au côté égale $;45$
> tu poseras 1 l'unité
> tu fractionneras 1 en 2, on trouve $;30$
> tu croiseras par $;30$, on trouve $;15$
> tu ajouteras $;15$ et $;45$, on trouve 1
> c'est le carré de 1
> tu soustrairas de 1 les $;30$ que tu as croisés, on trouve $;30$
> c'est le côté du carré.

Voyons ce que donne ce problème [28] en l'algébrisant : Nous allons partir de la mise en équation :

$x^2 + bx = c$ avec $b = 1$ et $c =; 45$

[28] Premier problème étudié par *Thureau Dangin*.

tu prends b, tu le fractionnes en 2, tu obtiens $\frac{b}{2} =; 30$
tu l'élève au carré : $(\frac{b}{2})^2 =; 15$
tu ajoutes c et $(\frac{b}{2})^2$,
tu cherches la racine carrée du nombre obtenu $c + (\frac{b}{2})^2$
tu soustrais du nombre obtenu $\sqrt{c + (\frac{b}{2})^2} =; 30$ le nombre $\frac{b}{2} =; 30$
tu obtiens $; 30$, c'est le coté du carré.

Un troisième problème

On trouve une série de problèmes qui se ramènent à trouver deux nombres x et y, ($x > y$), connaissant leur différence et leur produit. Par rapport au calcul précédent, le nombre $E = \frac{x-y}{2}$ est connu et on cherche $\frac{S}{2}$ par le même type de calculs. Voici l'un de ces problèmes [29].

La surface du carré moins le côté égale $14, 30;$
tu poseras 1 l'unité
tu fractionneras 1 en 2 tu trouveras $; 30$
tu croiseras par $; 30$ tu trouveras $; 15$
tu ajouteras à $14, 30;$ tu trouveras $14, 30; 15$
c'est le carré de $29; 30$
tu ajouteras les $; 30$ que tu as croisés à $29; 30$ tu trouveras $30;$
c'est le côté du carré.

Un quatrième problème

7 fois le coté de mon carré et 11 fois la surface égale $6; 15$
tu inscriras 7 et 11
tu croiseras 11 et $6; 15$ tu trouveras $1, 8; 45$
tu fractionneras 7 en 2 tu trouveras $3; 30$
tu croiseras $3; 30$ tu trouveras $12; 15$
tu ajouteras $12; 15$ et $1, 8; 45$ tu trouveras $1, 21;$
c'est le carré de $9;$
tu soustrairas les $3; 30$ que tu as croisés de $9;$ tu trouveras $5; 30$
l'inverse de 11 ne peut être dénoué
que dois-je croiser à 11 qui donnes $5; 30$? $; 30$
c'est le coté du carré [30].

On constate que le scribe commence à multiplier par 11 ce qui pour nous donne $11x^2 + 7x = \frac{25}{4}$, et travaille donc avec $(11x)^2 + 7 \times (11x) = 11 \times \frac{25}{4}$. Il peut appliquer l'algorithme précédent, mais à la fin du calcul, il devra diviser par 11

[29] Deuxième problème étudié par *Thureau Dangin*.
[30] Septième problème étudié par *Thureau Dangin*.

le résultat obtenu. Comme 11 n'a pas d'inverse, le scribe cherche directement le nombre x qui multiplié par 11 donne le résultat qu'il a obtenu $5;30$.

Compléments sur les problèmes babyloniens

Ne pas oublier la notation des nombres : $1;45$ *signifie* 1 *comme partie entière et* $3/4 = 45/60$ *comme partie fractionnaire.*

Outre les problèmes où de façon évidente, comme dans les problèmes 1 et 3, on cherche deux nombres connaissant leur somme et leur produit, ou leur différence et leur produit, un certain nombre de problèmes (2 et 4 du poly) font intervenir un carré et son coté. Voici une façon de comprendre ce type de problèmes.

Type de problèmes

Les problèmes se présentent en utilisant l'algèbre sous les formes :
- un carré x^2 et b fois son coté x fait c : $x^2 + bx = c$
- un carré x^2 moins b fois son coté x fait c : $x^2 - bx = c$
- a fois un carré x^2 et b fois son coté x fait c : $ax^2 + bx = c$
- a fois un carré x^2 moins b fois son coté x fait c : $ax^2 - bx = c$

Cas $a = 1$

La suite de consignes pour le premier problème $x^2 + bx = c$ est la suivante :
Prendre b, le diviser par 2 et élever au carré (croiser) : $(b/2)^2$
Ajouter le résultat à c, prendre la racine carrée $\sqrt{c + (b/2)^2}$ du résultat obtenu.
Remarquer qu'on a : $c + (b/2)^2 = x^2 + bx + (b/2)^2$
Retrancher $b/2$ au dernier nombre pour avoir la racine, à savoir $\sqrt{c + (b/2)^2} - b/2$.
En effet $c + (b/2)^2 = (x + b/2)^2$.

Le deuxième problème $x^2 - bx = c$ se traite de la même façon, en se ramenant à l'équation $c + (b/2)^2 = (x - b/2)^2$

Cas a différent de 1

Pour le cas $ax^2 + bx = c$, le suite des calculs se comprend comme les transformations suivantes sur l'équation. Multiplier par a : $a^2x^2 + abx = ac$
Diviser b par 2, élever au carré, ajouter à ac : $a^2x^2 + abx + (b/2)^2 = ac + (b/2)^2$
On se ramène donc à $(ax + b/2)^2 = ac + (b/2)^2$.
On extrait alors la racine du second membre $\sqrt{ac + (b/2)^2}$. Cette valeur est égale à $ax + b/2$, on en tire ax et le problème est ensuite celui d'une division par a qui n'est pas toujours possible.

Avec cette méthode les Babyloniens pouvaient donc résoudre des problèmes du second degré. Un certain nombre d'identités remarquables étaient connues ; elles peuvent être établies par simples décompositions de figures. Une liste de problèmes traités par les Babyloniens peut être trouvée dans le livre de *Van Der Waerden* ; elle est reproduite dans le livre de *Colette*.

Bibliographie

La civilisation mésopotamienne

L'aventure des écritures. http :/www.bnf.fr/web-bnf/pedagos/dossiecr/in-ecrit.htm
CD-Rom *Tous les savoirs du monde, l'aventure des encyclopédies de Sumer au 21 ième siècle*
vidéo de Pierre *Dumayet* et Robert *Bober* sur *La naissance des écritures*
BONFANTE ET ALII. La naissance des écritures, du cunéiforme à l'alphabet. Editions du Seuil, 1994.
BOTTÉRO. Il était une fois la Mésopotamie. Découvertes Gallimard, 1993.
BOTTÉRO. Babylone, à l'aube de notre culture. Découvertes Gallimard, 1994.
BOTTÉRO. La Mésopotamie, l'écriture, la raison et les Dieux. Gallimard, 1989.
KRAMER. L'histoire commence à Sumer. Champ Flammarion, 1994.
ROUX. La Mésopotamie. Points Seuil Histoire, 1995.
RUTTEN. La Science des Chaldéens. Que Sais-je, (893), Puf, 1970.

Les nombres en Mésopotamie

CAVEING. Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes. PUL, 1994.
DELIRE. Des mathématiques babyloniennes à l'arithmétique pythagoricienne : la tablette cunéiforme Plimpton 322. Dans d'IMHOTEP à COPERNIC de MAWET et TALON. Peeters Leuen, 1992.
GOLDSTEIN. la naissance du nombre. La Recherche spécial, Nombres. Juillet août 1995.
NEUGEBAUER. The exact sciences in Antiquity. Dover, 1957. Les sciences exactes dans l'antiquité. Actes-Sud avril 1990.
PICHOT. La naissance de la science 1. Mésopotamie, Égypte. Folio Essais, 1991.
RESNIKOFF ET WELLS. Mathematics in civilization. Dover.
RITTER. Mésopotamie : une énigme résolue. Courrier de l'Unesco, Naissance des nombres : comptes et légendes. Novembre 1993.
RITTER. Babylone 1800 ; Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie, dans Serres, Éléments d'histoire des Sciences. Bordas, 1989.

RITTER. Mathématiques mésopotamiennes. Quatrième université d'été d'histoire des mathématiques, IREM de Lille 1990.
ROBSON. From Uruk to babylon : 4500 years of Mesopotamian mathematics. Actes du Colloque de Braga 1996 (portugal), Historia e Educação Matemática.
TALON. Introduction aux mathématiques babyloniennes. Dans d'IMHOTEP à COPERNIC de MAWET et TALON. Peeters Leuen, 1992.
THUREAU-DANGIN. Textes mathématiques babyloniens. Réédition IREM de Dijon.
VAN DER WAERDEN. Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics. Science Editions, 1963, John Wiley, New York.

Sites web

L'aventure des écritures à la B.N.F.
$http : /www.bnf.fr/web-bnf/pedagos/dossiecr/in-ecrit.htm$ et
$http : //www.bnf.fr/pages/pedagos/dossitsm/mesopota.htm$
Musée de Louvre $http : //www.louvre.fr$
Site de Saint Andrews sur les mathématiques babyloniennes
$http : //www{-}groups.dcs.st{-}and.ac.uk/\ history/HistTopics/Babylonian_mathematics.html$
Système d'écriture des nombres
$http : //www{-}groups.dcs.st{-}and.ac.uk/\ history/HistTopics/Babylonian_numerals.html$
Babylone et Théorème de Pythagore
$http : //www{-}groups.dcs.st{-}and.ac.uk/\ history/HistTopics/Babylonian_Pythagoras.html$
Tablettes archaïques
$http : //early-cuneiform.humnet.ucla.edu/archaic/index.html$
Mathématiques mésopotamiennes
$http : //it.stlawu.edu/$
Site de Chronomath
$http : //chronomath.irem.univ-mrs.fr/Bienvenue.html$
Plimpton 322
$http : //aleph0.clarku.edu/\ djoyce/mathhist/plimpnote.html$
Racine carrée de 2
$http : //www.maths.uwa.edu.au/Staff/schultz/3M3/L1Babylonianroot2.html$