Archimède
et
la mesure du cercle

Table des matières

1 Archimède **1**
1.1 Sa vie . . . 1
1.2 Ses oeuvres . . . 2

2 La mesure du cercle **7**
2.1 La mesure du cercle dans *La sphère et le cylindre* . . . 7
2.1.1 Définitions . . . 7
2.1.2 Postulats . . . 8
2.1.3 Propositions sur le cercle . . . 8
2.2 Le traité sur la *mesure du cercle* . . . 10
2.2.1 PROPOSITION I . . . 10
2.2.2 PROPOSITION II . . . 10
2.2.3 PROPOSITION III . . . 11

3 Commentaires sur le traité d'Archimède **13**

1 Archimède

1.1 Sa vie

Archimède, (- 287, -212), fut le plus grand mathématicien de la Grèce antique. Il fut célèbre également pour ses nombreuses inventions mécaniques (la vis sans fin, la poulie mobile ou encore l'engrenage) ou encore des machines célèbres utilisées durant le siège de sa ville Syracuse par les Romains. Archimède fut le fondateur de l'hydrostatique et développa la statique en mécanique.

Les anciens grecs parlaient de quadrature d'une aire et de cubature d'un volume : pour une surface donnée, la quadrature d'une surface donnée consiste à construire à la règle et au compas le carré dont l'aire soit égale à celle de la surface ; de même, la cubature d'un solide correspond à contruire le côté du cube de volume égal à celui du solide. En mathématiques, on peut considérer Archimède comme un précurseur du calcul intégral. En géométrie, son œuvre prolonge celles d'Eudoxe de Cnide et celle d'Euclide, en particulier le livre XII des Éléments : il s'agit de comparer les mesures de figures planes et solides, en particulier des figures curvilignes. Ses oeuvre sont remarquables par la rigueur de ses démonstrations.

1.2 Ses oeuvres

Archimède eut une production mathématique exceptionnelle qui nous est parvenue dans des traités que nous classons ici par ordre probable de parution. On a gardé trace d'autres oeuvres, au travers de citations qu'en ont faites d'autres auteurs. Certains de ces traités, expédiés à des correspondants mathématiciens à Alexandrie, sont précédés d'une préface qui contient des remarques importantes sur les motivations, les programmes de recherches et les méthodes d'Archimède.

Sur les équilibres plans, livre 1 et 2

Archimède y démontre la loi du levier (deux corps s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leur poids), introduit la notion de centre de gravité et les détermine pour certaines figures géométriques planes (parallélogramme, triangle, trapèze, segment de parabole). La célèbre maxime : *"'Donnez-moi une place où me tenir et je mettrai la terre en mouvement"'* attribuée à Archimède illustre sa contribution à la statique.

La quadrature de la parabole

Archimède réussit à déterminer la quadrature d'un segment de parabole. *"'Tout segment limité par une droite et par une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole."'* On connait plusieurs démonstrations de ce résultat ainsi qu'un exposé de sa méthode de découverte à l'aide d'analogies avec des leviers. Sa lettre à Dosithée est très instructive car elle situe son résultat dans une perspective historique par rapport à ses prédécesseurs et Euclide en particulier. On voit qu'il y a eu chez lui une double démarche, une de découverte à l'aide de la mécanique, une rigoureuse de démonstration géométrique.

Archimède à Dosithée, prospérité !

Lorsque j'appris que Conon, dont l'amitié à mon égard ne fut jamais en défaut, était mort, que tu avais été lié avec Conon et que tu étais habile en géométrie, je fus affligé de la mort d'un homme qui était à la fois un ami et un mathématicien distingué, et je m'occupai de te faire parvenir par écrit, comme j'avais pensé *d'en écrire à Conon, un théorème de géométrie qui n'avait pas encore été examiné, et qu'après l'avoir étudié maintenant moi- même, j'ai trouvé d'abord par la mécanique, puis démontré par la géométrie.*

Parmi ceux qui, d'ailleurs, se sont occupés de géométrie avant nous, d'aucuns se sont efforcés d'exposer par écrit qu'il était possible de trouver une aire rectiligne équivalente à celle d'un cercle donné ou d'un segment de cercle donné ; puis ils ont essayé de carrer l'aire, délimitée par une section de cône entier et une droite, en assumant des lemmes inadmissibles, motif pour lequel beaucoup ont reconnu que ces choses n'avaient pas été découvertes par eux. Mais aucun de mes prédécesseurs n'a encore, que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant. Nous démontrons, en effet, que tout segment délimité par une droite et par une parabole dépasse d'un tiers le triangle ayant même base et même hauteur que le segment, en admettant d'ailleurs pour la démonstration ce lemme : que l'excès dont la plus grande de deux aires inégales dépasse la plus petite peut être ajouté à lui- même jusqu'à dépasser toute aire finie donnée. Les géomètres qui nous ont précédé ont également fait usage de ce lemme ; car ils s'en sont servis pour démontrer que le rapport de cercles entre eux est le même que celui des carrés de leurs diamètres, et que le rapport de sphères entre elles est le même que celui des cubes de leurs diamètres. De plus, ils ont assumé un lemme semblable pour démontrer que toute pyramide est le tiers du prisme ayant même base et même hauteur que cette pyramide, et que tout cône est le tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que ce cône. Il se fait cependant que les divers théorèmes que nous venons de mentionner ne sont pas considérés comme moins vrais que ceux qui ont été démontrés sans ce lemme, et il me suffira que ceux que je publie maintenant soient traités avec ce même degré de certitude. je t'envoie donc les démonstrations que j'en ai écrites, d'abord telles que je les ai examinées par la mécanique, puis telles que je les ai établies par la géométrie. Elles sont d'ailleurs précédées de propositions élémentaires sur les sections coniques qui seront utiles à la démonstration. Sois en bonne santé.

La méthode

L'impact des découvertes d'Archimède en géométrie et en physique mathématique fut considérable, au moins jusqu'au XVIIe siècle, non seulement par leur contenu, mais aussi par les réflexions sur la notion de démonstration et la méthode de découverte qu'elles supposent. Toutefois Archimède fut très critiqué par les mathématiciens de la Renaissance qui lui reprochaient de n'avoir pas expliqué comment il avait découvert ses résultats.

Ironie de l'histoire, Archimède adressa un traité à Ératosthène qui exposait sa méthode de découverte, combinant statique et géométrie avec le découpage des figures en lignes ou en surfaces appelées depuis Cavalieri *indivisibles*. Or, ce traité *De la méthode* disparut, sans doute vers le VIe siècle, pour n'être retrouvé qu'en 1899. Ses méthodes de découvertes, à l'aide d'analogies mécaniques, lui on permit de trouver des résultats (comme par exemple le 4/3 de la quadrature de la parabole) qu'il démontrait ensuite rigoureusement à l'aide d'une double réduction à l'absurde désignée depuis par méthode d'exhaustion.

Lettre d'Archimède

"'M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquéte mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique.

Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes : certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, (parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstration,)— car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelques connaissances des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration.

Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier celle méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit. Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière"'.

Voici les résultats dont il expose la méthode qui lui a permis de les trouver.

– Proposition 1 : Tout segment limité par une droite et par une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment de parabole.

– Proposition 2 : Pour toute sphère, le cylindre ayant une base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est lui même équivalent aux trois demis de la sphère, et sa surface est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère.
  Proposition 3 idem avec un sphéroïde de révolution.
– Propositions 4, 7, 8, 11 sur l'étude des volumes de segments de solides de révolution découpés par un plan perpendiculaire à l'axe, en fonction du cône de même base et même hauteur, d'un paraboloïde de révolution (prop4), d'une sphère (prop 7), d'un hyperboloïde de révolution.
– Propositions 5, 6, 9, 10 : recherche de centres de gravité de segments de paraboloïde, de sphère, de sphéroïde.
– Propositions 12 à 16 : calculs de volumes de solides particuliers.

Sur la sphère et le cylindre livres 1 et 2

Pour exposer le contenu de ce livre, le meilleur texte est la préface écrite par Archimède lui-même.

Archimède à Dosithée, joie !

Je t'ai envoyé précédemment, des propositions examinées par moi, la suivante, dont j'avais rédigé l'énoncé et la démonstration : "Tout segment limité par une droite et par une parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment."

D'autres théorèmes importants m'étant venus à l'esprit dans la suite, j'en ai élaboré les démonstrations. Les voici : en premier lieu, "La surface de toute sphère est équivalente au quadruple de son grand cercle." *En second lieu,* "La surface de tout segment de sphère est équivalente au cercle, dont le rayon est égal au segment de droite mené du sommet du segment (de la sphère) à (un point de) la circonférence du cercle qui est la base du segment." *De plus,* "Pour toute sphère, le cylindre ayant une base égale au grand cercle de la sphère et une hauteur égale au diamètre de la sphère est lui même équivalent aux trois demis de la sphère, et sa surface est équivalente aux trois demis de la surface de la sphère."

Ces propriétés préexistaient, liées à la nature des figures indiquées, mais elles étaient ignorées de ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, personne d'entre eux ne s'étant aperçu que les mesures de ces figures sont comparables ; je n'hésite donc pas à ranger ces propositions parmi celles qui ont fait l'objet des recherches des autres géomètres et parmi celles, concernant les figures solides, qui ont été étudiées par Eudoxe et qui paraissent beaucoup plus importantes, à savoir le théorème que " toute pyramide est la troisième partie du prisme ayant même base et même hauteur que la pyramide ", et que " tout cône est équivalent au *tiers du cylindre ayant même base et même hauteur que le cône. " Ces propriétés préexistaient bien, comme étant liées à la nature de ces figures ; mais bien qu'il y eût avant Eudoxe de nombreux géomètres de valeur, il arriva qu'elles fussent ignorées de tous et que personne ne s'en aperçût. Mais il sera possible à ceux qui en seront capables d'examiner mes propositions. Il eût, certes, fallu qu'elles fussent publiées encore du vivant de Conon ; car c'est surtout lui, à mon avis, qui eût été en mesure de les comprendre et de porter sur elles un jugement adéquat. Mais estimant indiqué de les communiquer à ceux qui ont l'expérience des mathématiques, je t'envoie les démonstrations que j'en ai rédigées ; il sera loisible à ceux qui s'occupent des mathématiques de les examiner. Sois en bonne santé !*

Sur les spirales

Archimède étudie une courbe définie de la façon suivante : une demi droite dont une extrémité reste fixe tourne à une vitesse constante. Sur cette demi-droite, un point se déplace à une vitesse constante pendant que la droite tourne. Ce point décrit une courbe appelée spirale. Archimède étudie les propriétés de cette courbe.

Sur les conoïdes et sphéroïdes

Traité consacré à la cubature de certains conoïdes et sphéroïdes (solides de révolution engendrés par une portion de conique).

Sur les corps flottants, livres 1 et 2

Archimède expose dans le Traité des corps flottants, sa découverte du principe fondamental de l'hydrostatique, communément appelé depuis principe d'Archimède, qui affirme que *"'tout corps plongé dans un fluide subit une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé"'*. Ainsi, si un solide possède une densité inférieure à celle du liquide dans lequel il est plongé, il flotte, le corps déplaçant un volume de liquide égal à son poids. Dans le cas contraire, le corps coule. L'anecdote d'Archimède, jaillissant nu de son bain, en criant *Eurêka Eurêka* ("'J'ai trouvé"'), est une mise en scène de cette découverte. Il avait trouvé comment résoudre le problème que lui avait posé Hiéron II, roi de Syracuse. Celui-ci voulait savoir si une couronne fabriquée à sa demande, était faite d'or pur ou d'un alliage d'or et d'argent, tout en gradant la couronne intacte.

La Mesure du cercle

La dernière partie de cet article est consacré à ce traité. La quadrature du cercle - dont on ne démontra l'impossibilité qu'à la fin du XIXe siècle, est ramenée par Archimède à la rectification de sa circonférence, c'est-à-dire trouver une ligne droite qui soit égale au périmètre du cercle. Il résoud ce problème en utilisant des polygones réguliers circonscrits et inscrits dans le cercle et il parvint à calculer des valeurs approchées du rapport circonférence / diamètre, c'est-à-dire du nombre pi. Archimède démontra que ce nombre est compris entre 3 + 10 / 71 et 3 + 10 / 70.

L'arénaire

Alors que le système de notation des nombres chez les grecs est limité et ne permet d'écrire que des nombres inférieurs à 99 999 999 (9999 myriades), sous le prétexte de compter les grains de sables de l'univers (d'où le nom du traité) Archimède invente un système de notation qui permet d'écrire des très grands nombres.

2 La mesure du cercle

2.1 La mesure du cercle dans *La sphère et le cylindre*

Dans ce traité, Archimède définit la notion de convexité et concavité pour des courbes et des surfaces et admet certains postulats sur la convexité.

La première partie est ensuite consacrée au cercle. Voici donc d'abord le texte des définitions et des postulats servant à la démonstration des propositions.

2.1.1 Définitions

1. *Il y a dans le plan des lignes courbes limitées, qui ou bien sont entièrement situées d'un même côté des droites joignant leurs extrémités ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.*
2. *J'appelle concave dans le même sens une ligne telle que, si on y prend deux points quelconques, le segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même coté de la ligne, ou bien certains du même coté et certains sur la ligne, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.*
3. *Il y a, de même, des surfaces limitées, non situées, elles mêmes, dans un plan, mais ayant leurs limites dans un plan, qui ou bien sont entièrement situées du même cote du plan, dans lequel elles ont leurs limites, ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté.*
4. *J'appelle concaves dans le même sens des surfaces telles que, si on y prend deux points, les segments de droite compris entre ces points tombent, ou bien tous du même côté de la surface, ou bien certains du même côté et certains sur la surface, mais qu'aucun ne tombe de l'autre côté.*

5. *J'appelle secteur solide, lorsqu'un cône ayant son sommet au centre d'une sphère coupe cette sphère, la figure comprise entre la surface du cône et la partie de la surface de la sphère qui est située à l'intérieur du cône.*
6. *J'appelle rhombe solide la figure composée de deux cônes ayant la même base et dont les sommets sont situés de part et d'autre du plan de la base de manière que leurs axes sont situes en ligne droite.*

2.1.2 Postulats

J'admets ce qui suit :

1. *De toutes les lignes ayant les mêmes extrémités la plus courte est la droite .*
2. *Quant aux autres lignes, elles sont inégales lorsque, situées dans un plan et ayant les mêmes extrémités, elles tournent l'une et l'autre leur concavité du même coté et que l'une d'entre elles est ou bien entièrement comprise entre l'autre et la droite ayant les mêmes extrémités qu'elle, ou bien en partie comprise, d'autres parties lui étant communes avec l'autre ligne. La ligne comprise est la plus courte.*
3. *De la même manière, de toutes les surfaces ayant les mêmes extrémités, si ces extrémités sont situées dans un plan, la plus courte est le plan.*
4. *Quant aux autres surfaces ayant les mêmes extrémités, si ces extrémités sont situées dans un plan, deux d'entre elles sont inégales d'aire lorsqu'elles tournent l'une et l'autre leur concavité du même côté et que l'une est ou bien entièrement comprise entre l'autre et le plan ayant mêmes extrémités qu'elle, ou bien en partie comprise, d'autres parties lui étant communes avec l'autre surface. La surface comprise a l'aire la plus petite.*
5. *De plus, parmi les lignes inégales, les surfaces inégales, les corps solides inégaux, le plus grand dépasse le plus petit d'une grandeur telle que, ajoutée à elle même (sc. un nombre suffisant de fois), elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec les grandeurs comparées entre elles.*

2.1.3 Propositions sur le cercle

Nous donnons seulement l'énoncé des deux premières propositions avec la figure qui les accompagne. Ceci pour montrer que le traité d'Archimède sur la mesure du cercle vient en synthèse et en continuité de ses autres travaux.

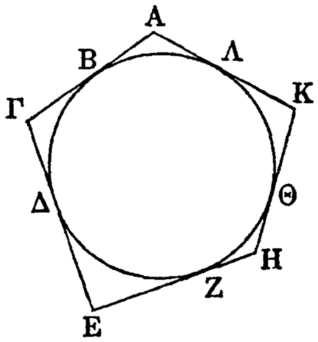


Fig. 1.

Ces principes poses, si un polygone est inscrit dans un cercle, il est évident que le périmètre du polygone inscrit est plus court que la circonférence du cercle, car chacun des côtés du polygone est plus court que l'arc du cercle découpé par lui.

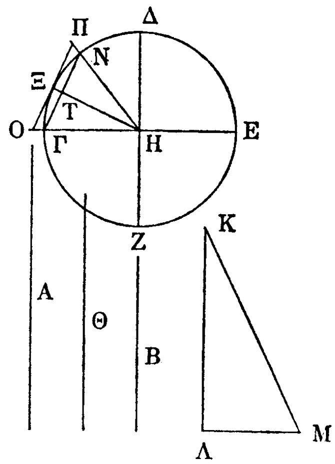
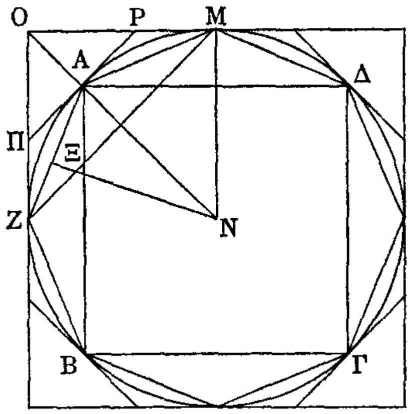


Fig. 3.

Etant donnés deux grandeurs inégales et un cercle, il est possible d'inscrire dans le cercle un polygone et de lui en circonscrire un de manière que le côté du polygone inscrit ait au côté du polygone inscrit un rapport inférieur à celui de la plus grande des deux grandeurs à la plus petite.

2.2 Le traité sur la *mesure du cercle*

2.2.1 PROPOSITION I



Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

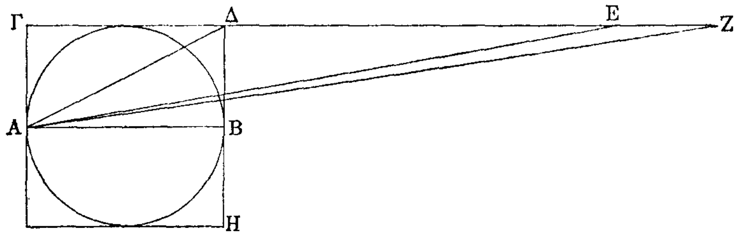
Que le cercle $AB\Gamma D$ soit tel qu'on le suppose par rapport au triangle E comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

En effet, que le cercle soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons-lui le carré $A\Gamma$, divisons les arcs en deux parties égales, et que les segments soient finalement moindres que l'excédent du cercle sur le triangle. Dès lors, la figure rectiligne est plus grande encore que le triangle. Prenons le centre N et menons la perpendiculaire $N\Xi$; dès lors, $N\Xi$ est plus petit que le côté du triangle E. Or, le périmètre de la figure rectiligne est aussi plus petit que le côté restant, puisqu'il est plus petit que la circonférence du cercle ; par conséquent, la figure rectiligne est plus petite que le triangle E ; ce qui est absurde.

D'autre part, que le cercle soit, s'il se peut, plus petit que le triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons les tangentes aux points. Dès lors, l'angle sous OA, AP est droit ; par conséquent, OP est plus grand que MP ; car MP est égal à PL, et le triangle $PO\Pi$ est donc aussi plus grand que la moitié de la figure $OZAM$. Il reste un ensemble de segments, pareils au segments ΠZA, qui est moindre que l'excédent du triangle E sur le cercle $AB\Gamma\Delta$. En conséquence, la figure rectiligne circonscrite est plus petite encore que le triangle E ; ce qui est absurde, car elle est plus grande, parce que NA est égal à la hauteur du triangle. Dès lors, le cercle équivaut au triangle E.

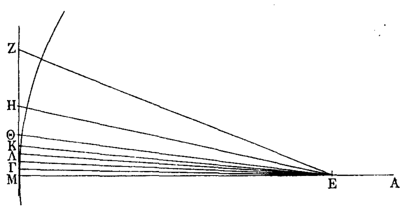
2.2.2 PROPOSITION II

Le rapport du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14.



Soit un cercle dont le diamètre est AB ; circonscrivons-lui le carré ΓH, soit Δ E le double de $\Gamma\Delta$, et que EZ soit le septième de $\Gamma\Delta$. Dès lors, puisque le rapport du triangle $A\Gamma E$ au triangle $A\Gamma\Delta$ est celui de 21 à 7, tandis que le rapport du triangle $A\Gamma\Delta$ au triangle AEZ est celui de 7 à 1, le rapport du triangle $A\Gamma Z$ au triangle $A\Gamma\Delta$ sera celui de 22 à 7. Or, le carré de ΓH est quadruple du triangle $A\Gamma\Delta$, tandis que le triangle $A\Gamma\Delta Z$ est équivalent au cercle AB, puisque, d'une part, la hauteur $A\Gamma$ est égale au rayon du cercle et que, d'autre part, il sera démontré que la base est le triple du diamètre augmenté, à peu de chose près, de son septième. En conséquence, le rapport du cercle au carré ΓH est celui de 11 à 14.

2.2.3 PROPOSITION III



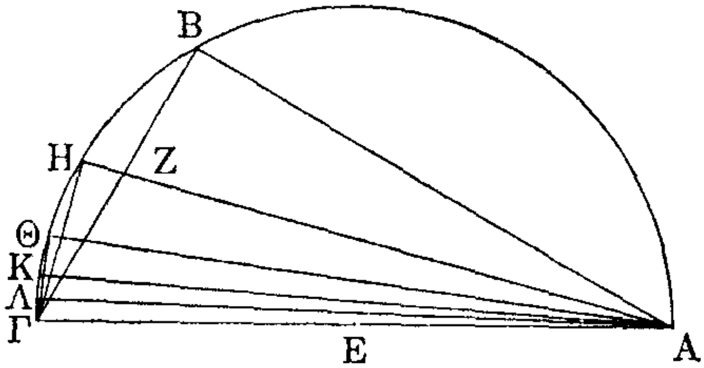
Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzième parties du diamètre.

Soit un cercle, un diamètre $A\Gamma$, le centre E, une tangente $\Gamma\Delta Z$ et l'angle sous ZE, $E\Gamma$ tiers d'un angle droit. Dès lors, le rapport de EZ à ΓZ est celui de 306 à 153, tandis que le rapport de $E\Gamma$ à ΓZ est celui de 265 à 153. Partageons l'angle $ZE\Gamma$ en deux parties égales par la droite EH ; dès lors, ZE est à $E\Gamma$ comme ZH est à $H\Gamma$. Par conséquent, la somme de ZE, $E\Gamma$ est à $Z\Gamma$ comme $E\Gamma$ est à ΓH ; de manière que le rapport de $E\Gamma$ à ΓH est plus grand que celui de 571 à 153. Dès lors, le rapport du carré de EH au carré de $H\Gamma$ est égal à celui de 349450 à 23409 ; donc, le rapport des racines est égal à celui de 591 1/8 à 153.

Que l'angle $HE\Gamma$ soit de nouveau divisé en deux parties égales par la droite $E\Theta$. Dès lors, de même, le rapport de $E\Gamma$ à $\Gamma\Theta$ sera plus grand que celui de 1162 1/8 à 153 ; par conséquent, le rapport de $E\Theta$ à $\Gamma\Theta$ sera plus grand que celui de 1172 1/8 à 153.

Que l'angle $\Gamma E\Theta$ soit encore divisé en deux parties égales par la droite EK. Dès lors, le rapport de $E\Gamma$ à ΓK sera plus grand que celui de 2334 1/4 à 153 ; par conséquent, le rapport de EK à ΓK est plus grand que celui de 2339 1/4 à 153.

Que l'angle $KE\Gamma$ soit encore divisé en deux parties égales par la droite ΛE.



Dès lors, le rapport de $E\Gamma$ à $\Lambda\Gamma$ sera sera plus grand que celui de 4673 1/2 à 153 ; par conséquent, puisque l'angle $ZE\Gamma$, qui est le tiers de l'angle droit, a été divisé quatre fois en deux parties égales, l'angle $\Lambda E\Gamma$ sera la quarante-huitième partie de l'angle droit. Faisons donc au point E un angle ΓEM égal à ce dernier angle. Dès lors, l'angle ΛEM est la vingt-quatrième partie de l'angle droit, et, par conséquent, la droite ΛM est le côté du polygone de 96 côtés circonscrit au cercle. Donc, puisqu'il a été démontré que le rapport de $E\Gamma$ à $\Lambda\Gamma$ est plus grand que celui de 4673 1/2 à 153, tandis que $A\Gamma$ est le double de $E\Gamma$ et que ΛM est le double de $\Lambda\Gamma$, il en résulte que le rapport de $A\Gamma$ au périmètre du polygone de 96 côtés est aussi plus grand que celui de 4673 1/2 à 14688. De plus, ce dernier nombre est le triple du premier avec un excédent de 667 1/2 qui est moindre que la septième partie de 4673 1/2 ; de manière que le polygone circonscrit au cercle est plus petit que le triple augmenté de plus d'unseptième du diamètre. En conséquence, la circonférence du cercle est à fortiori plus petite que le triple augmenté de plus d'un septième du diamètre.

Soit un cercle de diamètre $A\Gamma$ et un angle $BA\Gamma$ qui soit le tiers de l'angle droit. Dès lors, le rapport de AB à $B\Gamma$ est moindre que celui de 1351 à 780, tandis que le rapport de $A\Gamma$ à ΓB est celui de 1560 à 780.

Divisons l'angle $BA\Gamma$ en deux parties égales par la droite AH. Dès lors, puisque l'angle BAH est égal à l'angle $H\Gamma B$ ainsi qu'à l'angle $HA\Gamma$, l'angle $H\Gamma$ sera aussi égal à l'angle $HA\Gamma$. De plus, l'angle droit $AH\Gamma$ est commun ; par conséquent, le troisième angle $HZ\Gamma$ sera égal au troisième angle $A\Gamma H$. Il en résulte que les triangles $AH\Gamma$, ΓHZ sont équiangles. Dès lors, AH est $H\Gamma$ comme ΓH est à HZ et comme $A\Gamma$ est à ΓZ. Or, $A\Gamma$ est à ΓZ comme la somme des droites ΓA, AB est à $B\Gamma$; par conséquent, la somme de ΓA, AB est aussi à $B\Gamma$ comme AH est à $H\Gamma$. Il résulte de là que le rapport de AH à $H\Gamma$ est moindre que celui de 2911 à 780, et que le rapport de $A\Gamma$ à ΓH est moindre que celui de 3013 3/4 à 780. Divisons l'angle ΓAH en deux parties égales par la droite $A\Theta$;

le rapport de $A\Theta$ à $\Theta\Gamma$ sera, pour les mêmes motifs, plus petit que celui de 5924 3/4 à 780, ou que celui de 1823 à 240, car ces nombres sont respectivement les 4/13 des nombres précédents. Par conséquent, le rapport de $A\Gamma$ à $\Gamma\Theta$ est moindre que celui de 1838 9/11 à 240. Divisons encore l'angle $\Theta A\Gamma$ par la droite KA ; dès lors, le rapport de AK à $K\Gamma$ est moindre que celui de 1007 à 66, car ces nombres sont respectivement les 11/40 d'autres nombres. Par conséquent, le rapport de $A\Gamma$ à ΓK est moindre que celui de 1009 1/6 à 66.

Divisons encore l'angle $KA\Gamma$ en deux parties égales par la droite ΛA ; dès lors, le rapport de $A\Lambda$ à $\Lambda\Gamma$ sera moindre que celui de 2016 1/6 à 66, tandis que le rapport de $A\Gamma$ à $\Lambda\Gamma$ sera moindre que celui de 2017 1/4 à 66.

Il en résulte que, par inversion, le rapport du périmètre du polygone au diamètre est plus grand que celui de 6336 à 2017 1/4. Or, le premier de ces nombres est trois et 10/71 fois plus grand que 2017 1/4 ; par conséquent, le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans un cercle est aussi grand que le triple plus 10/71 du diamètre ; de manière que le cercle est aussi, à fortiori, plus grand que le triple plus 10/71 du diamètre. Dès lors, la circonférence du cercle vaut trois fois le diamètre plus une partie inférieure au septième, mais supérieure aux 10/71 du diamètre.

3 Commentaires sur le traité d'Archimède

Commentant la *Mesure du cercle*. Eutocius d'Ascalon (Ve siècle après J.C.) déclare :

"'Il faut savoir que Apollonios de Perge de son côté a démontré ces relations dans son Ocytocium au moyen d'autres nombres et avec une plus grande approximation. Mais si ce travail semble plus exact, il n'est d'aucune utilité pour le propos dArchimède - son propos dans ce livre était. en effet... de trouver une approximation en vue des nécessités de la vie. On trouvera donc déplacé le blâme de Sporus de Nicée, qui reproche à Archimède de n'avoir pas trouvé exactement à quel segment de droite est égale la circonférence du cercle, et cela d'après un passage du Rucher, où il dit que son maître, à savoir Philon de Gadares, avait poussé l'investigation jusqu'à des nombres plus exacts que n'étaient ceux qu'avait indiqués Archimède, j'entends 1/7 et 10/71 ; tous ces critiques, l'un après l'autre, semblent avoir ignoré le propos d'Archimède, et ils opèrent avec des multiplications et des divisions de myriades, qu'il n'est pas facile de suivre, à moins qu'on n'ait passé par l'école du Livre de calcul de Magnus. Si on veut, d'une façon générale, resserrer l'approximation, il faudrait le faire d'après ce que Claude Ptolémée dit dans "'la composition mathématiqueż, au moyen des degrés, des minutes et des cordes, et j'aurais fait ce travail, si je n'avais pas compris, comme je l'ai souvent dit, qu'il est impossible de trouver au moyen des procédés décrits ici, un segment de droite exactement égal à la circonférence du cercle et que, pour

qui cherche à s'approcher de près (de la valeur exacte) les indications données ici par Archimède suffisent."'