Cantor et la théorie des ensembles

Bolzano, en 1847, a remarqué qu'une différence caractéristique entre ensemble fini et ensemble infini est l'existence de sous-ensembles propres équipotents au tout.
Ainsi, ce qui était une difficulté devient une définition !

De 1878 à 1884, Cantor publiera six mémoires sur la théorie des ensembles où il dégage la notion d'équipotence de deux ensembles, de cardinal de puissance d'un ensemble, d'ensemble totalement ordonné, étudie les propriétés topologiques de R et aborde les problèmes de mesure. Les travaux de Cantor sont très controversés.

> *« Par ensemble, on entend un groupement en un tout, d'objets bien distincts de notre intuition liés à l'infini et on définit la notion de cardinal d'un ensemble comme généralisation de la notion de nombre d'éléments.»*

Cantor a montré qu'on pouvait établir une bijection entre les points de la droite et les points du plan. ***« Je le vois, je ne le crois pas ! »*** a-t-il écrit.

Cantor étudie les cardinaux des ensembles de nombres.

Sont dénombrables :

- L'ensemble des entiers relatifs Z
- L'ensemble des nombres rationnels Q
- L'ensemble des nombres algébriques.

Ne sont pas dénombrables

- L'ensemble des nombres réels R
- L'ensemble des nombres transcendants
- L'ensemble des nombres complexes C

Le théorème de CANTOR
Pour tout ensemble E, *le cardinal de l'ensemble P*(E) *des parties de* E *est strictement supérieur au cardinal de* E.

On peut se demander s'il existe des cardinaux compris entre le dénombrable $\chi0$ et le continu c. **L'affirmation *«Il n'existe pas de cardinal strictement compris entre $\chi0$ et* c.*»* s'appelle *l'hypothèse du continu*.**

Remarque sur les nombres transcendants : *Dans l'enseignement au lycée, les étudiants rencontrent quelques nombres transcendants comme $\prod$ et e. Implicitement, ils peuvent en tirer l'idée que ces nombres sont peu nombreux et se limitent à quelques nombres exotiques. On voit combien le résultat mathématique est ici loin de l'intuition.*