

## Página 273

### REFLEXIONA Y RESUELVE

#### Aproximaciones sucesivas

- Comprueba que:

$$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995$$

- Calcula  $f(4,999)$ ;  $f(4,9999)$ ;  $f(4,99999)$ ; ...

- A la vista de los resultados anteriores, ¿te parece razonable afirmar que, cuando  $x$  se aproxima a 5, el valor de  $f(x)$  se aproxima a 7? Lo expresamos así:  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$

Si  $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$ , entonces:

$$f(4,999) = 6,9995; f(4,9999) = 6,99995; f(4,99999) = 6,999995$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$$

- Calcula, análogamente,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$ .

$$f(2) = 5,5; f(2,9) = 5,95; f(2,99) = 5,995; f(2,999) = 5,9995; f(2,9999) = 5,99995$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

## Página 275

1. Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:

$$\text{a) } y = \frac{x+2}{x-3} \quad \text{b) } y = \frac{x^2-3x}{x} \quad \text{c) } y = \frac{x^2-3}{x} \quad \text{d) } y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

- Rama infinita en  $x = 3$  (asíntota vertical).
- Discontinuidad evitable en  $x = 0$  (le falta ese punto).
- Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical).
- Salto en  $x = 4$ .

**2. Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:**

a)  $y = x^2 - 5$

b)  $y = \sqrt{5 - x}$

c)  $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

d)  $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Está definida y es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

b) Está definida y es continua en  $(-\infty, 5]$ .

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Es continua, también, en todo  $\mathbb{R}$ . El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para  $x = 3$ :

$$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto (3, 5). La función es también continua en  $x = 3$ .

d) También las dos ramas empalman en el punto (2, 2). Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: [0, 5).

**Página 278**

**1. Calcula el valor de los siguientes límites:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

a)  $-\frac{3}{2}$

b) 0

**2. Calcula estos límites:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a)  $\sqrt{3}$

b) -1

**Página 279**

**3. Calcula  $k$  para que la función  $y = f(x)$  sea continua en  $\mathbb{R}$ :**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} 21 + k = 7 \rightarrow k = -14$$

Página 281

4. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

a)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$  en  $-2, 0$  y  $2$

b)  $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$  en  $2, 0$  y  $3$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$  en  $1$  y  $-3$

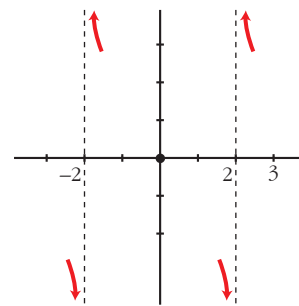
d)  $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$  en  $0$  y  $-3$

a)  $f(x) = \frac{x^3}{(x + 2)(x - 2)}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

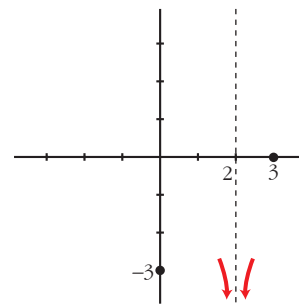


b)  $f(x) = \frac{4(x - 3)}{(x - 2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

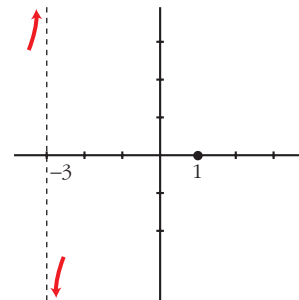
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



c)  $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

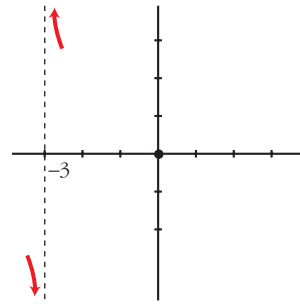
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

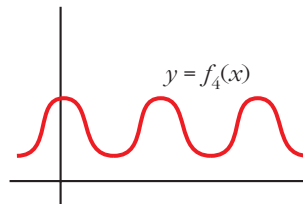
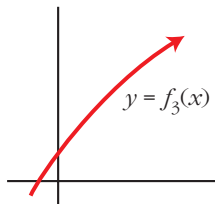
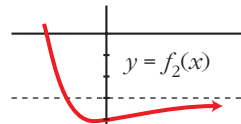
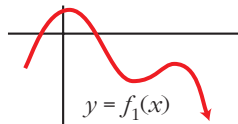
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



## Página 282

1. Di el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe.}$$

## Página 283

1. Di el valor del límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b)  $f(x) = 5x^3 + 7x$

c)  $f(x) = x - 3x^4$

d)  $f(x) = \frac{1}{3x}$

e)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a)  $-\infty$

b)  $+\infty$

c)  $-\infty$

d) 0

e) 0

f)  $-\infty$

2. Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$ , halla un valor de  $x$  para el cual sea  $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$ .

Por ejemplo, para  $x = 1000$ ,  $f(x) = 800\,000\,000$ .

3. Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$ , halla un valor de  $x$  para el cual sea:

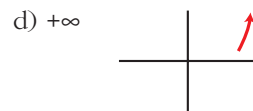
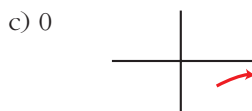
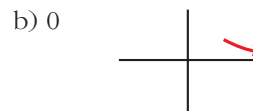
$$\frac{1}{x^2 - 10x} < 0,0001$$

Por ejemplo, para  $x = 1000$ ,  $f(x) = 0,000001$ .

## Página 284

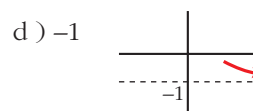
4. Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y representa sus ramas:

a)  $f(x) = \frac{1}{3x}$       b)  $f(x) = \frac{3}{x}$       c)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$       d)  $f(x) = 3x - 5$



5. Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  y representa sus ramas:

a)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$       b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$       c)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$       d)  $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$



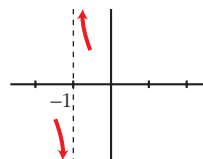
## Página 285

### 1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

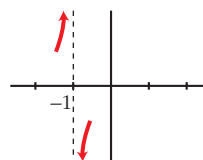
$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$



$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

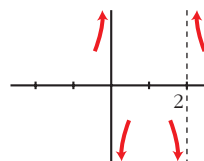


### 2. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$$

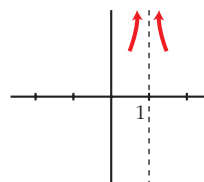
$$\text{b) } y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$



$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$



## Página 287

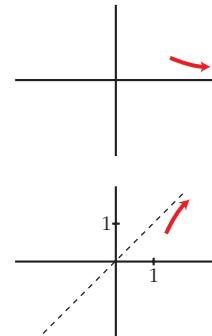
3. Halla las ramas infinitas,  $x \rightarrow +\infty$ , de estas funciones. Sitúa la curva respecto a su asíntota:

a)  $y = \frac{x}{1+x^2}$

b)  $y = \frac{x^3}{1+x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$  es asíntota horizontal.

b)  $y = x + \frac{-x}{1+x^2} \rightarrow y = x$  es asíntota oblicua.



4. Halla las ramas infinitas,  $x \rightarrow +\infty$ , de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:

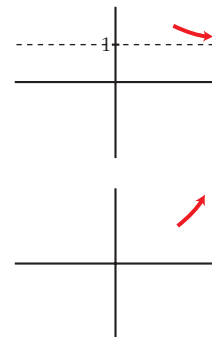
a)  $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$

b)  $y = \frac{2x^3-3x^2+7}{x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$  es asíntota horizontal.

b) grado de  $P$  - grado de  $Q \geq 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \text{rama parabólica hacia arriba.}$$



## Página 288

1. Halla  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y representa la rama correspondiente:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty$$



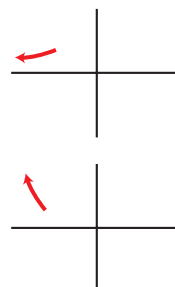
2. Halla  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  y traza las ramas correspondientes:

a)  $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b)  $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$



### Página 289

3. Halla las ramas infinitas,  $x \rightarrow -\infty$ , de estas funciones, y sitúa la curva respecto a las asíntotas:

a)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

b)  $y = \frac{x}{1 + x^2}$

c)  $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

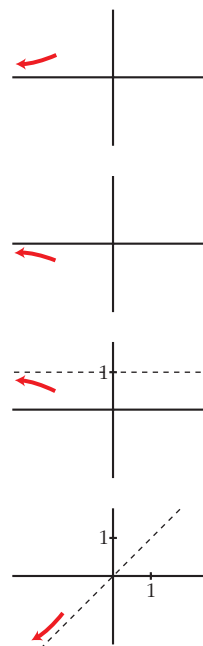
d)  $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$  es asíntota horizontal.

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$  es asíntota horizontal.

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$  es asíntota horizontal.

d)  $y = x + \frac{-x}{1 + x^2} \rightarrow y = x$  es asíntota oblicua.





4. Halla las ramas infinitas, cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y si tienen asíntotas, sitúa la curva respecto a ellas:

a)  $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

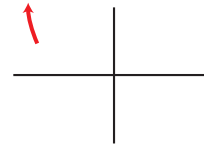
b)  $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

c)  $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

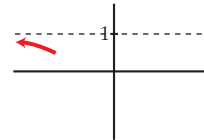
d)  $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x}$

a) grado  $P - \text{grado } Q \geq 2$

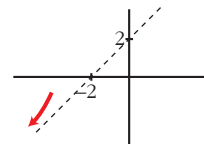
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$  rama parabólica.



b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$  es asíntota horizontal.



c)  $y = x + 2 + \frac{-2}{x + 1} \rightarrow y = x + 2$  es asíntota oblicua.



d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$

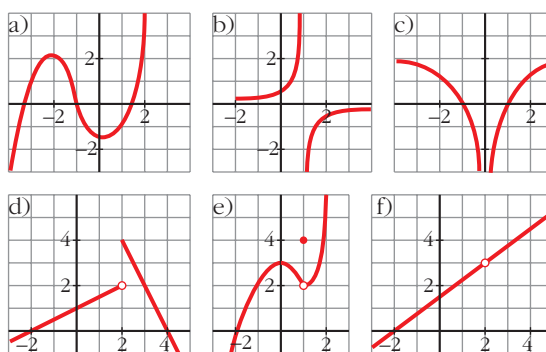


## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

### PARA PRACTICAR

#### Discontinuidades y continuidad

- 1 a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?  
 b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



- a) Solo la a).  
 b) Rama infinita en  $x = 1$  (asíntota vertical).  
 c) Rama infinita en  $x = 0$  (asíntota vertical).  
 d) Salto en  $x = 2$ .  
 e) Punto desplazado en  $x = 1$ ;  $f(1) = 4$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .  
 f) No está definida en  $x = 2$ .

- 2 Halla los puntos de discontinuidad, si los hay, de las siguientes funciones:

a)  $y = x^2 + x - 6$

b)  $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c)  $y = \frac{x-1}{2x+1}$

d)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e)  $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f)  $y = \frac{1}{x^2 + 2}$

a) Continua.

b) 2

c)  $-\frac{1}{2}$

d) Continua.

e) 0 y 5

f) Continua.

**3** Comprueba si las siguientes funciones son continuas en  $x = 0$  y en  $x = -2$ :

a)  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b)  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

c)  $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d)  $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) No es continua ni en  $x = 0$  ni en  $x = -2$ .

b) Sí es continua en  $x = 0$ , no en  $x = -2$ .

c) No es continua en  $x = 0$ , sí en  $x = -2$ .

d) Continua en  $x = 0$  y en  $x = -2$ .

**4** Indica para qué valores de  $\mathbb{R}$  son continuas las siguientes funciones:

a)  $y = 5 - \frac{x}{2}$

b)  $y = \sqrt{x - 3}$

c)  $y = \frac{1}{x}$

d)  $y = \sqrt{-3x}$

e)  $y = \sqrt{5 - 2x}$

f)  $y = x^2 - x$

a)  $\mathbb{R}$

b)  $[3, +\infty)$

c)  $\mathbb{R} - \{0\}$

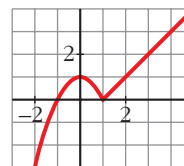
d)  $(-\infty, 0]$

e)  $(-\infty, \frac{5}{2}]$

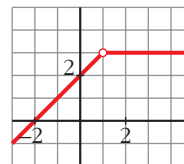
f)  $\mathbb{R}$

**5** Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica dada y di si son continuas o discontinuas en  $x = 1$ .

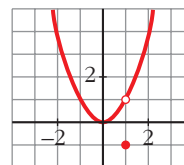
a)  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b)  $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua.

b) Discontinua.

c) Discontinua.

- 6 Comprueba si la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  es continua en  $x = 0$ .

• Recuerda que para que  $f$  sea continua en  $x = 0$ , debe verificarse que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en  $x = 0$ .

- 7 Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a)  $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$  en  $x = -1$

b)  $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  en  $x = 2$

c)  $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  en  $x = 1$

a) No, pues no existe  $f(-1)$ .

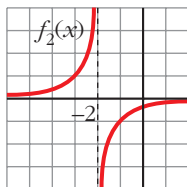
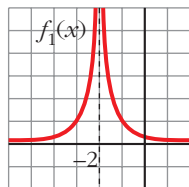
b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2$ . Sí es continua en  $x = 2$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$ . No es continua en  $x = 1$ .

## Página 296

### Visión gráfica del límite

8



Estas son, respectivamente, las gráficas de las funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

¿Cuál es el límite de cada una de estas funciones cuando  $x \rightarrow -2$ ?

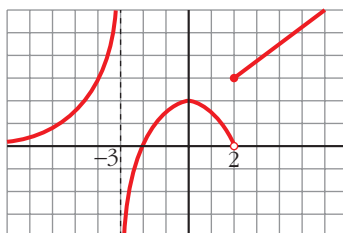
• Observa la función cuando  $x \rightarrow -2$  por la izquierda y por la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f_2(x).$$

9 Sobre la gráfica de la función  $f(x)$ , halla:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$       f)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$       g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$       h)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



- a)  $+\infty$       b)  $-\infty$       c) 2      d) 0  
 e) 0      f) 3      g)  $+\infty$       h) 0

### Límite en un punto

10 Calcula los siguientes límites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 5 - \frac{x}{2} \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10 + x - x^2}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$   
 g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$       h)  $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

- a) 5      b) 0      c) -2      d)  $\sqrt{2}$   
 e) 2      f) 2      g) 1      h)  $e^2$

**11** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$                       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

• Para que exista límite en el punto de ruptura, tienen que ser iguales los límites laterales.

a) 5

b) 4

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

**12** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

c)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$

d)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$

• Sacar factor común y simplificar cada fracción.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$

c)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2(3b-2)}{b} = 0$

d)  $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b(b-7)}{4b} = -\frac{7}{4}$

**13** Resuelve los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \frac{3}{-1} = -3$

c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = 2$

- 14** Calcula el límite de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$  en  $x = 3$ ,  $x = 0$  y  $x = -1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

**Límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$**

- 15** Calcula los siguientes límites y representa la información que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)^2$

• Dale a  $x$  “valores grandes” y saca conclusiones.

- 16** Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$  y representa la información que obtengas.

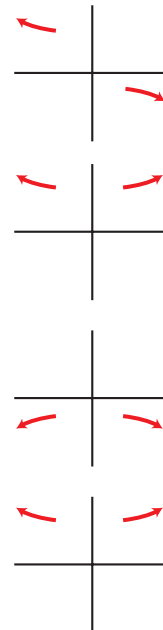
Resolución de los ejercicios 15 y 16:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



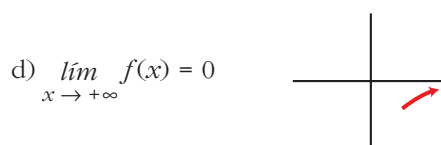
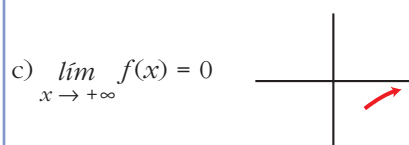
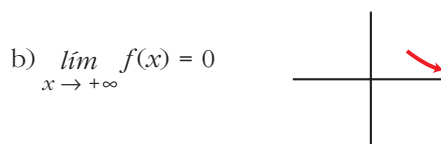
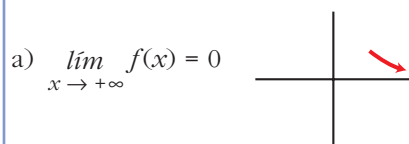
**17** Comprueba, dando valores grandes a  $x$ , que las siguientes funciones tienden a 0 cuando  $x \rightarrow +\infty$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$

b)  $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

c)  $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$

d)  $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$



**18** Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.

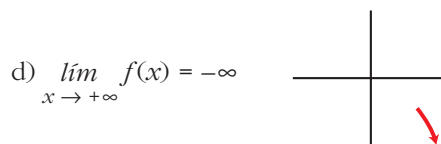
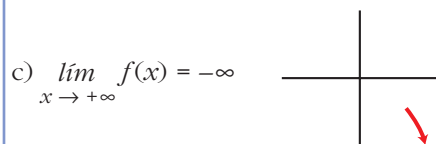
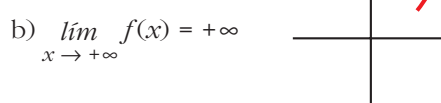
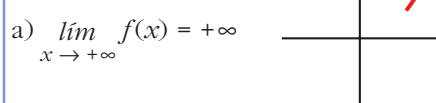
a)  $f(x) = x^3 - 10x$

b)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

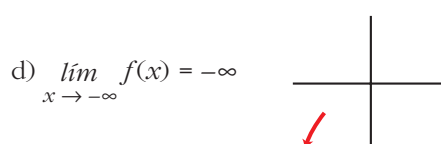
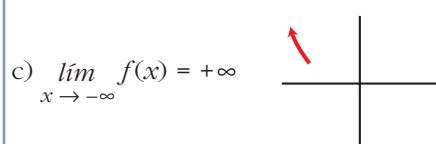
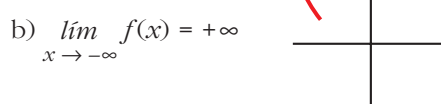
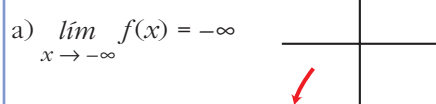
c)  $f(x) = \frac{3 - x}{2}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ :



Cuando  $x \rightarrow -\infty$ :





Página 297

**19** Calcula los siguientes límites y representa las ramas que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

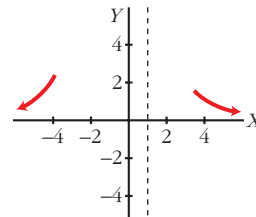
g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

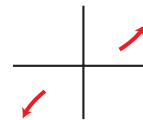
**20** Calcula el límite de todas las funciones del ejercicio anterior cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Resolución de los ejercicios 19 y 20:

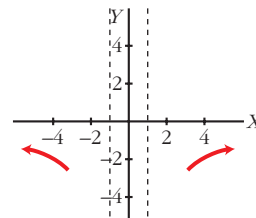
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$



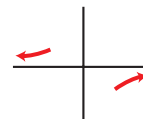
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



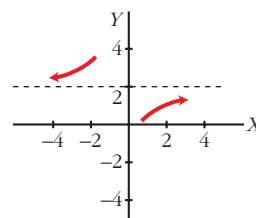
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$



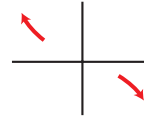
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$



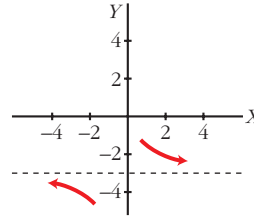
e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$



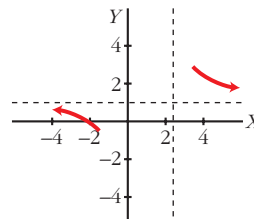
f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = +\infty$



g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$



h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$



**21 Resuelve los siguientes límites:**

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x-2)^2$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{5x}$

a) 3

b)  $-\infty$

c) 0

d)  $+\infty$

**22 Calcula el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones y representa las ramas que obtengas:**

a)  $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

b)  $f(x) = 10x - x^3$

c)  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

d)  $f(x) = \frac{1 - 12x^2}{3x^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$



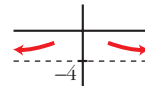
b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$



### Asíntotas

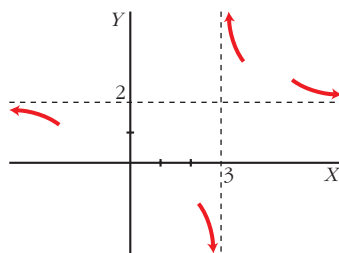
**23** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

a)  $y = \frac{2x}{x-3}$

c)  $y = \frac{2x+3}{4-x}$

a) Asíntotas:

$x = 3; y = 2$

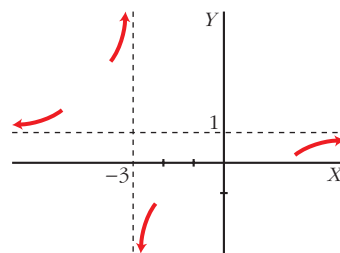


b)  $y = \frac{x-1}{x+3}$

d)  $y = \frac{2}{1-x}$

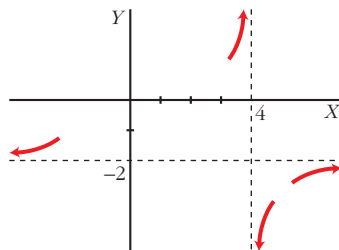
b) Asíntotas:

$x = -3; y = 1$



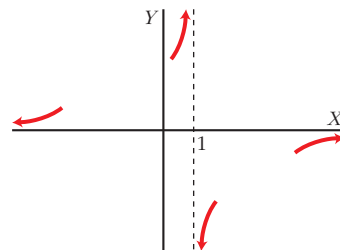
c) Asíntotas:

$x = 4; y = -2$



d) Asíntotas:

$x = 1; y = 0$

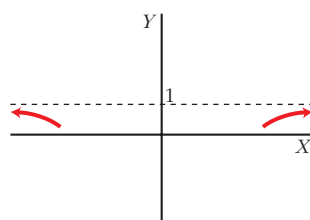


**24** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a)  $y = \frac{x^2}{x^2+4}$

c)  $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$

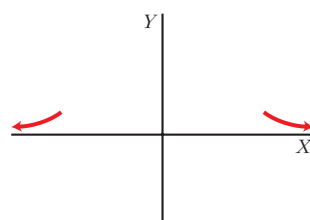
a) Asíntota:  $y = 1$



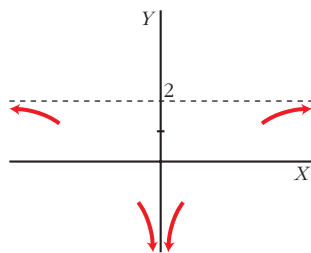
b)  $y = \frac{3}{x^2+1}$

d)  $y = \frac{x^4}{x-1}$

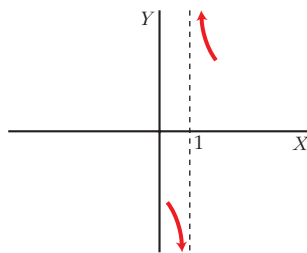
b) Asíntota:  $y = 0$



c) Asíntotas:  $x = 0$ ;  $y = 2$



d) Asíntota:  $x = 1$



**25** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

a)  $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 3}$

b)  $f(x) = \frac{3x}{2x - 5}$

c)  $f(x) = \frac{1}{2 - x}$

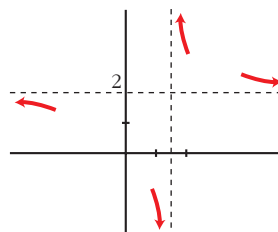
d)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$

e)  $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

f)  $f(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2}$

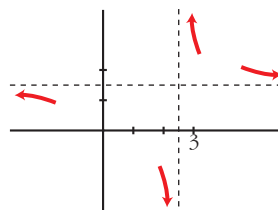
a) Asíntota vertical:  $x = \frac{3}{2}$

Asíntota horizontal:  $y = 2$



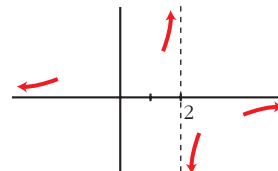
b) Asíntota vertical:  $x = \frac{5}{2}$

Asíntota horizontal:  $y = \frac{3}{2}$



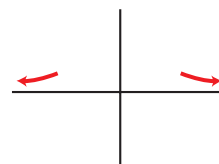
c) Asíntota vertical:  $x = 2$

Asíntota horizontal:  $y = 0$



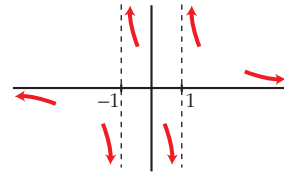
d) Asíntota vertical:  $y = 0$

No tiene más asíntotas.



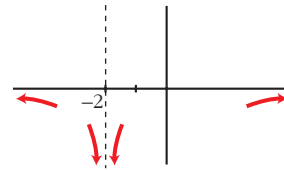
e) Asíntota vertical:  $x = 1, x = -1$

Asíntota horizontal:  $y = 0$



f) Asíntota vertical:  $x = -2$

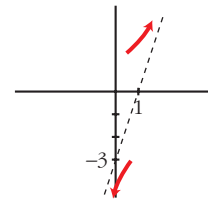
Asíntota horizontal:  $y = 0$



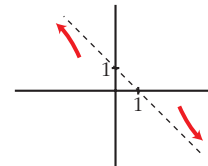
**26** Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

a)  $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$       b)  $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$       c)  $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$   
 d)  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$       e)  $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$       f)  $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

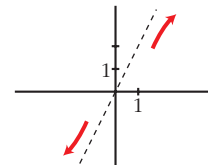
a)  $\frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$   
 Asíntota oblicua:  $y = 3x - 3$



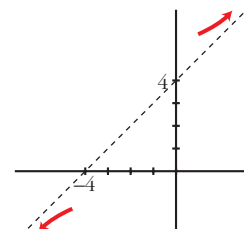
b)  $\frac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$   
 Asíntota oblicua:  $y = -x + 1$



c)  $\frac{4x^2-3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$   
 Asíntota oblicua:  $y = 2x$

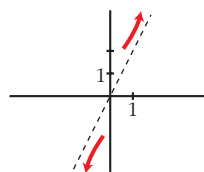


d)  $\frac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \frac{10}{x-3}$   
 Asíntota oblicua:  $y = x + 4$



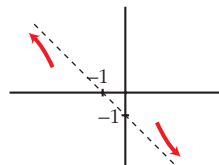
$$e) \frac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \frac{4x - 3}{x^2 - 2}$$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$



$$f) \frac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \frac{1}{2x - 2}$$

Asíntota oblicua:  $y = -x - 1$



## PARA RESOLVER

**27** Calcula los límites de las siguientes funciones en los puntos que anulan su denominador:

$$a) f(x) = \frac{3x}{2x + 4}$$

$$b) f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$d) f(t) = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$b) f(x) = \frac{x - 1}{x(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$c) f(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$d) f(t) = \frac{t^2(t - 2)}{t^2}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -2$$

**28** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$a) y = \frac{(3 - x)^2}{2x + 1}$$

$$b) y = \frac{5x - 2}{2x - 7}$$

$$c) y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

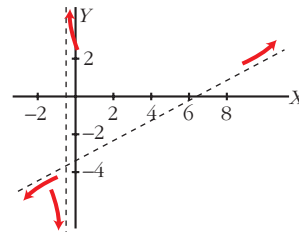
$$d) y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

$$e) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

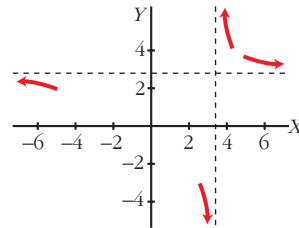
$$f) y = \frac{3x^2}{x + 2}$$

a)  $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{49/4}{2x+1}$

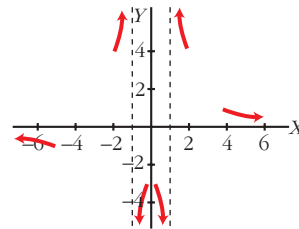
Asíntotas:  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$



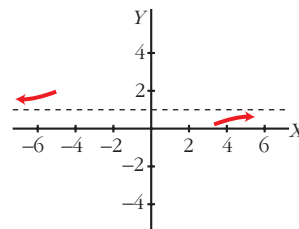
b) Asíntotas:  $y = \frac{5}{2}$ ;  $x = \frac{7}{2}$



c) Asíntotas:  $y = 0$ ;  $x = \pm 1$

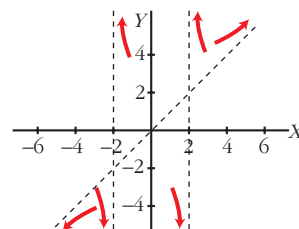


d) Asíntotas:  $y = 1$

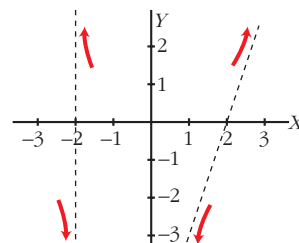


e)  $y = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}$

Asíntotas:  $y = x$ ;  $x = -2$ ,  $x = 2$



f) Asíntotas:  $x = -2$ ;  $y = 3x - 6$



**29** Halla las ramas infinitas de estas funciones. Cuando tengan asíntotas, sitúa la curva:

a)  $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

b)  $y = \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2}$

c)  $y = \frac{1}{9 - x^2}$

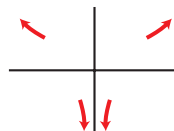
d)  $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

e)  $y = \frac{2x^2}{x + 3}$

f)  $y = \frac{x^3}{2x - 5}$

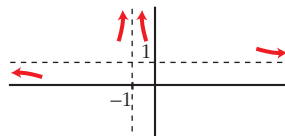
a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical:  $x = 0$



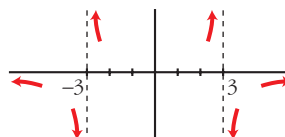
b) Asíntota vertical:  $x = -1$

Asíntota horizontal:  $y = 1$

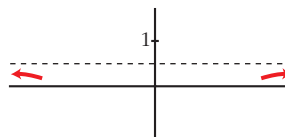


c) Asíntotas verticales:  $x = 3$ ,  $x = -3$

Asíntota horizontal:  $y = 0$

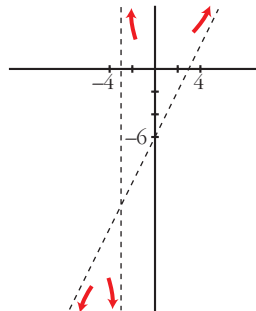


d) Asíntota horizontal:  $y = \frac{1}{2}$



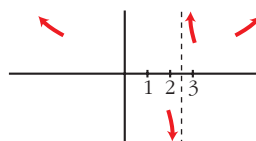
e) Asíntota vertical:  $x = -3$

Asíntota oblicua:  $y = 2x - 6$



f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical:  $x = \frac{5}{2}$





## Página 298

- 30** Prueba que la función  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$  solo tiene una asíntota vertical y otra horizontal.

☛ Al hallar  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  verás que no es  $\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Asíntota vertical:  $x = 0$

Asíntota horizontal:  $y = 1$

- 31** Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$                       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

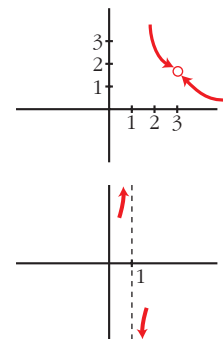
a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \frac{5}{3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

No existe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$



- 32** Calcula los siguientes límites y representa los resultados que obtengas:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

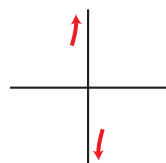
c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x(x+1)}$$

Calculamos los límites laterales:

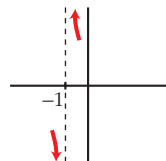
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x(x+1)} = -\infty$$



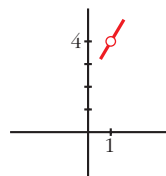
$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$



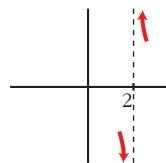
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 4$$



$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x-2}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x+2)}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x+2)}{x-2} = +\infty$$



### 33 Halla las asíntotas de estas funciones:

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\text{c) } y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{e) } y = x + \frac{4}{x-5}$$

$$\text{f) } y = x + 1 + \frac{5}{x}$$

$$\text{a) } y = x + \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

b) Asíntota vertical:  $x = 0$

Asíntotas verticales:  $x = -1, x = 1$

Asíntota oblicua:  $y = x$

c) Asíntota horizontal:  $y = 2$

d) Asíntota horizontal:  $y = 0$

Asíntotas verticales:  $x = \pm 1$

e)  $x = 5, y = x$

f) Asíntota vertical:  $x = 0$

Asíntota oblicua:  $y = x + 1$

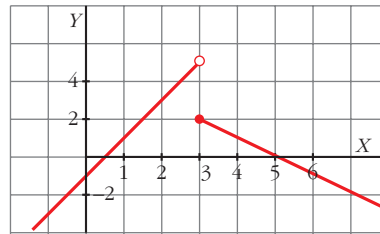
**34** Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

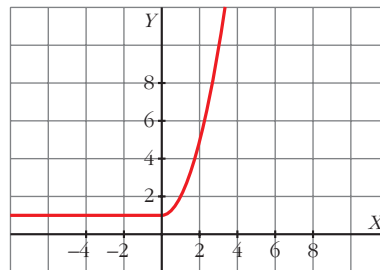
$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

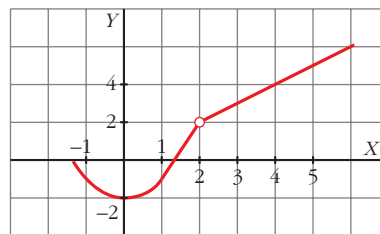
a) Discontinua en  $x = 3$ .



b) Función continua.



c) Discontinua en  $x = 2$ .



**35** a) Calcula el límite de las funciones del ejercicio anterior en  $x = -3$  y  $x = 5$ .

b) Halla, en cada una de ellas, el límite cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -7; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 26; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**36** Calcula los límites cuando  $x \rightarrow +\infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$  de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = 2^{x-1}$

b)  $f(x) = 0,75^x$

c)  $f(x) = 1 + e^x$

d)  $f(x) = 1/e^x$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**37** Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales:

a)  $y = 2^{x+3}$

b)  $y = 1,5^x - 1$

c)  $y = 2 + e^x$

d)  $y = e^{-x}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = -1$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ :  $y = 0$

**38** Calcula, en cada caso, el valor de  $k$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ .

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a)  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} 5 = 3 + k \rightarrow k = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\} 5 = 4 + 2k \rightarrow k = 1/2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \rightarrow k = 1$$

**39 Estudia la continuidad de estas funciones:**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$x \neq 1 \rightarrow$  Continua

Es continua en  $\mathbb{R}$ .

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$x \neq 1$  y  $x \neq -1 \rightarrow$  Continua

Es continua en  $\mathbb{R}$ .

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \rightarrow \text{Discontinua en } x = 0$$

Si  $x \neq 0$ , es continua.

**40 Calcula  $a$  para que las siguientes funciones sean continuas en  $x = 1$ :**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - a \end{array} \right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array} \right\} a = 2$$

**41** En una empresa se hacen montajes en cadena. El número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento según la función  $M(t) = \frac{30t}{t+4}$  ( $t$  en días).

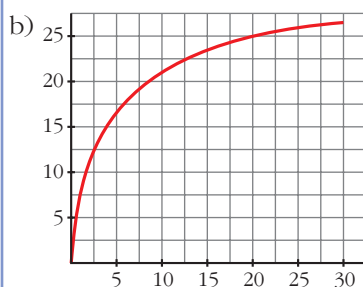
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representa la función sabiendo que el periodo de entrenamiento es de un mes.

c) ¿Qué ocurriría con el número de montajes si el entrenamiento fuera mucho más largo?

a)  $M(1) = 6$  montajes el primer día.

$M(10) = 21,43 \rightarrow 21$  montajes el décimo día.



c) Se aproxima a 30 (pues  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$ ).

## Página 299

### CUESTIONES TEÓRICAS

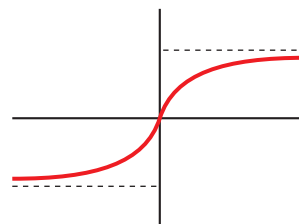
**42** ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no esté definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto?

Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

**43** ¿Puede tener una función más de dos asíntotas verticales? ¿Y más de dos asíntotas horizontales? Pon ejemplos.

Sí. Por ejemplo,  $f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$  tiene  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$  como asíntotas verticales.

No puede tener más de dos asíntotas horizontales, una hacia  $+\infty$  y otra hacia  $-\infty$ , por ejemplo:



- 44** El denominador de una función  $f(x)$  se anula en  $x = a$ . ¿Podemos asegurar que tiene una asíntota vertical en  $x = a$ ? Pon ejemplos.

No. Por ejemplo,  $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x}$  en  $x = 0$ ; puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x + 1)}{x} = 1$$

- 45** Si  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ , ¿podemos afirmar que  $f$  es continua en  $x = 2$ ?

No. Para que fuera continua debería ser, además,  $f(2) = 5$ .

- 46** Representa una función que verifique estas condiciones. ¿Es discontinua en algún punto?

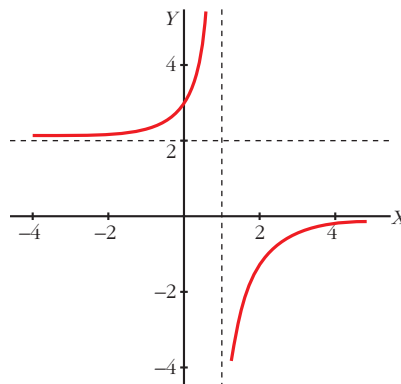
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Es discontinua en  $x = 1$ .



### PARA PROFUNDIZAR

- 47** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x|} = 3$$

**48** Halla un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = \frac{1}{3x - 5}$  sea menor que 0,001.

Por ejemplo, para  $x = 1000$ ,  $f(x) = 0,00033$ .

**49** Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^3)$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75^x - x)$

a)  $-\infty$

b)  $+\infty$

c) 0

d)  $+\infty$

**50** ¿Cuál es la asíntota vertical de estas funciones logarítmicas? Halla su límite cuando  $x \rightarrow +\infty$ :

a)  $y = \log_2(x - 3)$

b)  $y = \ln(x + 2)$

a) Asíntota vertical:  $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Asíntota vertical:  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Página 299

**AUTOEVALUACIÓN**

1. Calcula el límite de  $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$  en los puntos de abscisas 0, 3 y 5.

Di si la función es continua en esos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en  $x = 0$  y en  $x = 5$ . No es continua en  $x = 3$ , porque no tiene límite en ese punto.

2. Halla los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1}$

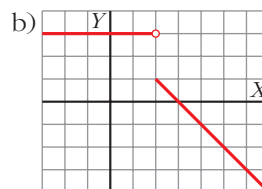
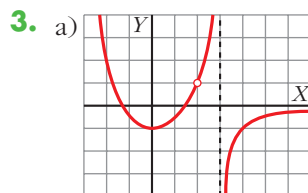
b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$  (Si  $x \rightarrow 4^+$  o si  $x \rightarrow 4^-$ , los valores de la función son positivos).



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

- 4. Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 2x}$  y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

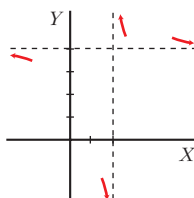
$$\text{Simplificamos: } \frac{4x^2}{x^2 - 2x} = \frac{4x}{x - 2} \rightarrow y = \frac{4x}{x - 2}$$

- Asíntota vertical:  $x = 2$

$$\text{Posición } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x}{x - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x}{x - 2} = +\infty \end{array} \right.$$

- Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x - 2} = 4; y = 4$

$$\text{Posición } \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty, y > 4 \\ x \rightarrow -\infty, y < 4 \end{array} \right.$$



5. Justifica qué valor debe tomar  $a$  para que la función sea continua en  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de  $x$  menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en  $x = 1$ , debe cumplirse:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$f(1) = a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right\}$$

Para que exista el límite, debe ser:

$$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

6. Halla el límite de  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$  cuando  $x \rightarrow 3$ ;  $x \rightarrow 2$ ;  $x \rightarrow +\infty$ ;  $x \rightarrow -\infty$  y representa la información que obtengas.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

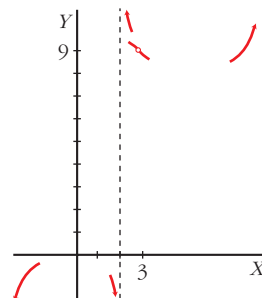
$$\text{Simplificamos: } \frac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-2} = 9$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$$



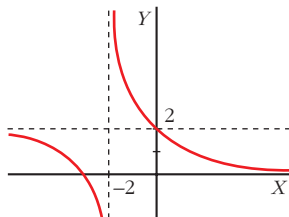
**7. Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$



**8. Estudia las ramas infinitas de  $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 4}$  y sitúa la curva respecto a su asíntota.**

No tiene asíntotas verticales porque  $x^2 + 4 \neq 0$  para cualquier valor de  $x$ .

No tiene asíntotas horizontales porque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 4} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 4} = -\infty$ .

Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\frac{2x^3}{x^2 + 4} = \frac{-2x^3 - 8x}{-8x} + \frac{2x}{-8x}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2 + 4} = 2x - \frac{8x}{x^2 + 4}$$

Asíntota oblicua:  $y = 2x$

Posición  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \rightarrow -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$

