

PÁGINA 54

■ EJERCICIOS DE LA UNIDAD

Cálculo de potencias

1 ▲▲▲ Calcula con lápiz y papel:

- | | | |
|----------------|-----------------|----------------|
| a) 5^4 | b) 15^2 | c) 1^7 |
| d) 6^3 | e) 3^5 | f) 2^8 |
| a) $5^4 = 625$ | b) $15^2 = 225$ | c) $1^7 = 1$ |
| d) $6^3 = 216$ | e) $3^5 = 243$ | f) $2^8 = 256$ |

2 ▲▲▲ Averigua el valor de x en cada caso:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------|
| a) $8^x = 64$ | b) $11^x = 121$ | c) $30^x = 900$ |
| d) $4^x = 256$ | e) $6^x = 216$ | f) $5^x = 625$ |
| a) $8^x = 64 \rightarrow x = 2$ | b) $11^x = 121 \rightarrow x = 2$ | |
| c) $30^x = 900 \rightarrow x = 2$ | d) $4^x = 256 \rightarrow x = 4$ | |
| e) $6^x = 216 \rightarrow x = 3$ | f) $5^x = 625 \rightarrow x = 4$ | |

3 ▲▲▲ ¿Cuántas losas de 1 m^2 se necesitan para cubrir un patio cuadrado de 22 m de lado?La superficie del patio es $22 \cdot 22 = 484 \text{ m}^2$.Por tanto, se necesitan 484 losas de 1 m^2 .4 ▲▲▲ ¿Cuántos cubitos de arista unidad se necesitan para construir un cubo de arista 11 ?

$$11^3 = 1\,331$$

Se necesitan $1\,331$ cubitos de arista unidad para construir un cubo de arista 11 unidades.

5 ▲▲▲ Continúa hasta el décimo término cada una de estas series:

0 1 4 9 16...

0 1 8 27 64...

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1 000

6 ▲▲▲ Halla con la calculadora:

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| a) 4^8 | b) 5^9 | c) 8^6 |
| d) 9^6 | e) 14^4 | f) 15^3 |

- a) $4^8 = 65\,536$ b) $5^9 = 1\,953\,125$ c) $8^6 = 262\,144$
 d) $9^6 = 531\,441$ e) $14^4 = 38\,416$ f) $15^3 = 3\,375$

Potencias de base 10. Expresión abreviada de números grandes

7 ▲▲▲ Calcula mentalmente:

- a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4
 d) 10^5 e) 10^6 f) 10^7
 a) $10^2 = 100$ b) $10^3 = 1\,000$ c) $10^4 = 10\,000$
 d) $10^5 = 100\,000$ e) $10^6 = 1\,000\,000$ f) $10^7 = 10\,000\,000$

8 ▲▲▲ Escribe como potencias de diez:

- a) Cien. b) Cien mil.
 c) Cien millones. d) Cien mil millones.
 e) Un billón. f) Cien billones.
 a) Cien $\rightarrow 100 = 10^2$
 b) Cien mil $\rightarrow 100\,000 = 10^5$
 c) Cien millones $\rightarrow 100\,000\,000 = 10^8$
 d) Cien mil millones $\rightarrow 100\,000\,000\,000 = 10^{11}$
 e) Un billón $\rightarrow 1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$
 f) Cien billones $\rightarrow 100\,000\,000\,000\,000 = 10^{14}$

9 ▲▲▲ Expresa con todas sus cifras:

- a) $6 \cdot 10^4$ b) $13 \cdot 10^7$
 c) $34 \cdot 10^9$ d) $62 \cdot 10^{11}$
 a) $6 \cdot 10^4 = 60\,000$ b) $13 \cdot 10^7 = 130\,000\,000$
 c) $34 \cdot 10^9 = 34\,000\,000\,000$ d) $62 \cdot 10^{11} = 6\,200\,000\,000\,000$

10 ▲▲▲ Escribe la descomposición polinómica de los siguientes números:

- a) 68 425 b) 245 000
 c) 2 530 000 d) 7 406 080
 a) $68\,425 = 6 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$
 b) $245\,000 = 2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$
 c) $2\,530\,000 = 2 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4$
 d) $7\,406\,080 = 7 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10$

11 ▲▲▲ ¿Qué número expresa cada descomposición polinómica?

- a) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2$

- b) $2 \cdot 10^8 + 10^7 + 6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$
 c) $10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0$
 a) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 = 5\,004\,852$
 b) $2 \cdot 10^8 + 10^7 + 6 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 = 210\,635\,000$
 c) $10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 = 1\,111\,111$

12 ▲▲▲ Redondea a la centena de millar y escribe abreviadamente, con el apoyo de una potencia de base diez, el número de habitantes de cada una de estas ciudades:

MADRID → 2 866 850

PARÍS → 2 238 740

ROMA → 2 645 322

EL CAIRO → 16 248 530

MADRID → 2 866 850 → 2 900 000 = $29 \cdot 10^5$

PARÍS → 2 238 740 → 2 200 000 = $22 \cdot 10^5$

ROMA → 2 645 322 → 2 600 000 = $26 \cdot 10^5$

EL CAIRO → 16 248 530 → 16 200 000 = $162 \cdot 10^5$

Operaciones con potencias

14 ▲▲▲ Calcula por el camino más corto:

- a) $2^4 \cdot 5^4$ b) $4^3 \cdot 25^3$ c) $20^3 : 5^3$
 d) $12^4 : 4^4$ e) $(5^3 \cdot 4^3) : 2^3$ f) $6^3 : (21^3 : 7^3)$
- a) $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$
 b) $4^3 \cdot 25^3 = (4 \cdot 25)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$
 c) $20^3 : 5^3 = (20 : 5)^3 = 4^3 = 64$
 d) $12^4 : 4^4 = (12 : 4)^4 = 3^4 = 81$
 e) $(5^3 \cdot 4^3) : 2^3 = (5 \cdot 4)^3 : 2^3 = 20^3 : 2^3 = (20 : 2)^3 = 10^3 = 1\,000$
 f) $6^3 : (21^3 : 7^3) = 6^3 : (21 : 7)^3 = 6^3 : 3^3 = (6 : 3)^3 = 2^3 = 8$

15 ▲▲▲ Reduce a una sola potencia:

- a) $a^2 \cdot a^3$ b) $x^4 \cdot x^2$ c) $m^2 \cdot m^5$
 d) $a^5 : a^4$ e) $x^8 : x^5$ f) $m^9 : m^3$
 g) $(a^4)^3$ h) $(x^2)^5$ i) $(m^3)^3$
 a) $a^2 \cdot a^3 = a^5$ b) $x^4 \cdot x^2 = x^6$ c) $m^2 \cdot m^5 = m^7$
 d) $a^5 : a^4 = a$ e) $x^8 : x^5 = x^3$ f) $m^9 : m^3 = m^6$
 g) $(a^4)^3 = a^{12}$ h) $(x^2)^5 = x^{10}$ i) $(m^3)^3 = m^9$

16 ▲▲▲ Reduce a una sola potencia:

- a) $(a^2 \cdot a^2) : a^3$ b) $(x^6 : x^3) \cdot x^2$

c) $(m^6 : m^4) : m^2$

e) $(x^2)^3 : (x^2)^2$

a) $(a^2 \cdot a^2) : a^3 = a^4 : a^3 = a$

c) $(m^6 : m^4) : m^2 = m^2 : m^2 = m^0 = 1$

e) $(x^2)^3 : (x^2)^2 = x^6 : x^4 = x^2$

d) $(a^3)^5 : a^{12}$

f) $(m^6)^2 : (m^2)^5$

b) $(x^6 : x^3) \cdot x^2 = x^3 \cdot x^2 = x^5$

d) $(a^3)^5 : a^{12} = a^{15} : a^{12} = a^3$

f) $(m^6)^2 : (m^2)^5 = m^{12} : m^{10} = m^2$

PÁGINA 55**18** ▲▲▲ Reduce a una sola potencia y calcula:

a) $2^3 \cdot 4^2$

b) $25^4 : 5^7$

c) $(2^4 \cdot 8^2) : 16^2$

a) $2^3 \cdot 4^2 = 2^3 \cdot (2^2)^2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$

b) $25^4 : 5^7 = (5^2)^4 : 5^7 = 5^8 : 5^7 = 5$

c) $(2^4 \cdot 8^2) : 16^2 = [2^4 \cdot (2^3)^2] : (2^4)^2 = (2^4 \cdot 2^6) : 2^8 = 2^{10} : 2^8 = 2^2 = 4$

19 ▲▲▲ Calcula y razona:

a) $(2 + 3)^2$

b) $2^2 + 3^2$

c) $(4 + 6)^2$

d) $4^2 + 6^2$

e) $(1 + 10)^2$

f) $1^2 + 10^2$

¿Es igual el cuadrado de una suma que la suma de los cuadrados de los sumandos?

a) $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$

b) $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

c) $(4 + 6)^2 = 10^2 = 100$

d) $4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$

e) $(1 + 10)^2 = 11^2 = 121$

f) $1^2 + 10^2 = 1 + 100 = 101$

Como se muestra en los ejemplos anteriores, el cuadrado de una suma no es igual a la suma de los cuadrados de los sumandos.

20 ▲▲▲ Calcula y compara:

a) $(2 + 3)^3$

b) $2^3 + 3^3$

c) $(1 + 3)^4$

d) $1^4 + 3^4$

e) $(1 + 1)^5$

f) $1^5 + 1^5$

¿Qué observas?

a) $(2 + 3)^3 = 5^3 = 125$

b) $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$

c) $(1 + 3)^4 = 4^4 = 256$

d) $1^4 + 3^4 = 1 + 81 = 82$

e) $(1 + 1)^5 = 2^5 = 32$

f) $1^5 + 1^5 = 1 + 1 = 2$

Como muestran los ejemplos anteriores, la potencia de una suma no es igual a la suma de las potencias de los sumandos.

Raíz cuadrada21 ▲▲▲ Busca el valor de a en cada caso:

a) $a^2 = 64$

b) $a^2 = 100$

c) $a^2 = 144$

d) $a^2 = 400$

e) $a^2 = 625$

f) $a^4 = 16$

a) $a = 8$

b) $a = 10$

c) $a = 12$

d) $a = 20$

e) $a = 25$

f) $a = 2$

22 ▲▲▲ Calcula, en cada caso, el valor de m :

a) $\sqrt{m} = 5$

b) $\sqrt{m} = 8$

c) $\sqrt{m} = 100$

d) $\sqrt{m} = 30$

a) $m = 25$

b) $m = 64$

c) $m = 10\,000$

d) $m = 900$

23 ▲▲▲ Calcula por tanteo el valor de la raíz entera:

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{55}$

c) $\sqrt{169}$

d) $\sqrt{728}$

e) $\sqrt{900}$

f) $\sqrt{10\,000}$

a) $\sqrt{25} = 5$

b) $7 < \sqrt{55} < 8 \rightarrow$ Raíz entera de 55 es 7

c) $\sqrt{169} = 13$

d) $26 < \sqrt{728} < 27 \rightarrow$ Raíz entera de 728 es 26

e) $\sqrt{900} = 30$

f) $\sqrt{10\,000} = 100$

24 ▲▲▲ Calcula con lápiz y papel, y después comprueba con la calculadora:

a) $\sqrt{650}$

b) $\sqrt{1\,369}$

c) $\sqrt{4\,225}$

d) $\sqrt{12\,568}$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{650} & 25 \\ -4 & \hline 250 & \\ -225 & \hline 25 & \end{array}$$

$\sqrt{650} = 25; \text{ Resto } 25$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1\,369} & 37 \\ -9 & \hline 469 & \\ -469 & \hline 0 & \end{array}$$

$\sqrt{1\,369} = 37$

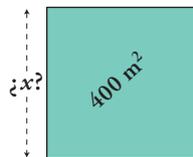
$$\begin{array}{r|l} \text{b) } \sqrt{4225} & 65 \\ -36 & 125 \cdot 5 \\ \hline 625 & \\ -625 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\sqrt{4225} = 55$$

$$\begin{array}{r|l} \text{b) } \sqrt{12568} & 11 \\ -1 & 21 \cdot 1 \\ \hline 025 & \\ -21 & \\ \hline 468 & \\ 444 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

$$\sqrt{12568} = 11; \text{ Resto } 24$$

25 ▲▲▲ Calcula el lado de un cuadrado que tiene una superficie de 400 m^2 .



$$l = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

26 ▲▲▲ ¿Cuáles de estos números son cuadrados perfectos? Justifica tu respuesta:

a) 2 025

b) 8 281

c) 15 325

d) 116 964

a) $\sqrt{2025} = 45$

b) $\sqrt{8281} = 91$

c) $123 < \sqrt{15325} < 124$

d) $\sqrt{116964} = 312$

Son cuadrados perfectos 2 025, 8 281 y 116 964.

Operaciones con raíces

27 ▲▲▲ Calcula y compara, ¿qué observas?

a) $\sqrt{9+16}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$

c) $\sqrt{36+64}$

d) $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

a) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

c) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$

d) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$

Se observa que la raíz de una suma no coincide con la suma de las raíces de los sumandos.

28 ▲▲▲ Calcula y reflexiona, ¿qué observas?

a) $\sqrt{4 \cdot 9}$

b) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

c) $\sqrt{9 \cdot 16}$

d) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6 & \text{b) } \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6 \\ \text{c) } \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12 & \text{d) } \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \end{array}$$

Se comprueba que la raíz de un producto coincide con el producto de las raíces de los factores.

29 ▲▲▲ Calcula y razona, ¿qué observas?

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{\frac{36}{9}} & \text{b) } \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} \\ \text{c) } \sqrt{\frac{100}{25}} & \text{d) } \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} \\ \text{a) } \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 & \text{b) } \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \\ \text{c) } \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2 & \text{d) } \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2 \end{array}$$

Se comprueba que la raíz de una fracción (cociente) es igual a la raíz del numerador (dividendo) partido por la raíz del denominador (divisor).

31 ▲▲▲ Extrae factores fuera de la raíz:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{18} & \text{b) } \sqrt{50} & \text{c) } \sqrt{45} \\ \text{d) } \sqrt{72} & \text{e) } \sqrt{28} & \text{f) } \sqrt{200} \\ \text{a) } \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \\ \text{b) } \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \\ \text{c) } \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5} \\ \text{d) } \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \\ \text{e) } \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot \sqrt{7} \\ \text{f) } \sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2} \end{array}$$

■ PROBLEMAS DE ESTRATEGIA

32 Rosana ha construido un gran cubo de 10 cm de arista utilizando cubitos blancos de 1 cm de arista.

¿Cuántos cubitos rojos, iguales a los anteriores, necesita para recubrir totalmente al gran cubo blanco?

El cubo blanco tiene 10 cm de arista y contiene $10^3 = 1\,000$ cubitos.

El nuevo cubo tiene 12 cm de arista y contiene $12^3 = 1\,728$ cubitos.

Los cubos rojos añadidos son: $1\,728 - 1\,000 = 728$

- 33 Con la calculadora de cuatro operaciones: ¿Cuál es el mayor número que puedes obtener en pantalla si solo puedes pulsar dos veces cada una de estas teclas? (Escribe una expresión con las operaciones que le mandas hacer a la máquina).

$$\boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=}$$

- Para las calculadoras que programan el factor constante con una sola pulsación la tecla $\boxed{\times}$:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow \boxed{234256}$$

La operación realizada ha sido:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow 22 \cdot 22 = 22^2$$

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow (22 \cdot 22) \cdot (22 \cdot 22) = 22^2 \cdot 22^2 = 22^4 = 234\,256$$

- Para las calculadoras que necesitan dos pulsaciones en $\boxed{\times}$ para programar el factor constante:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{=} \rightarrow \boxed{10648}$$

La operación realizada ha sido:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \rightarrow 22 \cdot 22 = 22^2$$

$$\boxed{2} \quad \boxed{2} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{\times} \quad \boxed{=} \quad \boxed{=} \rightarrow 22 \cdot 22 \cdot 22 = 22^3 = 10\,648$$