3

Intégrale de Lebesgue

Nous allons, dans ce chapitre, définir une nouvelle notion de l'intégrale. Nous commençons par définir cette intégrale (de Lebesgue) pour des fonctions bornées, puis étendons la définition à des fonctions non bornées.

3.1 Intégration de fonctions bornées

Soit E un ensemble mesurable de mesure finie. On appellera *partition* de E toute famille *finie* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de parties mesurables disjointes deux à deux de E, dont l'union est E. De plus, dans ce qui suit, si $\mathcal{P}$ est une partition de E, on dira qu'une partition $\mathcal{Q}$ est plus fine que $\mathcal{P}$ (on notera $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$ ou $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$) si tout $F \in \mathcal{Q}$ est un sous-ensemble d'un ensemble $E \in \mathcal{P}$. Si $\mathcal{P} = \{E_i\}$ et si $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$, on notera $\mathcal{Q} = \{F_{ij}\}$ pour indiquer que $E_i = \cup_j F_{ij}$ pour tout $E_i \in \mathcal{P}$. Notons que si $\mathcal{P} = \{E_i\}$ est une partition de E alors $\mu(E) = \sum_i \mu(E_i)$.
Soit maintenant f une fonction bornée sur un ensemble E mesurable de mesure finie et soit $\mathcal{P} = \{E_i\}$ une partition de E. On définit, d'une manière analogue au chapitre 1, les quantités :

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf\{f(x);\ x \in E_i\}, \\
M_i &= \sup\{f(x);\ x \in E_i\}, \\
\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(E_i), \\
\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(E_i).
\end{aligned}$$

Notons que si E est un intervalle et si $\mathcal{P}$ est une partition en intervalles alors les nombres $\mathcal{L}(f, \mathcal{P})$ et $\mathcal{U}(f, \mathcal{P})$ ont la même signification qu'au chapitre 1.

Proposition 3.1.1 *Si E est un ensemble de mesure finie et si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$ et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux partitions de E satisfaisant $\mathcal{Q} \succ \mathcal{P}$, alors*

$$m\mu(E) \leq \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{L}(f, \mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}) \leq M\mu(E).$$

Démonstration. Soient $\mathcal{P} = \{E_i\}$ et $\mathcal{Q} = \{F_{ij}\}$ avec $E_i = \cup_j F_{ij}$ pour tout i. Soit maintenant

$$m_i = \inf\{f(x);\ x \in E_i\},\ m_{ij} = \inf\{f(x);\ x \in F_{ij}\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) &= \sum_i m_i \mu(E_i)\\ &= \sum_i m_i \sum_j \mu(F_{ij})\\ &\leq \sum_{i,j} m_{ij}\mu(F_{ij})\\ &= \mathcal{L}(f,\mathcal{Q}).\end{aligned}$$

De la même manière on peut démontrer que $\mathcal{U}(f,\mathcal{Q}) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P})$.

Définition 3.1.1 *Soit E un ensemble de mesure finie et soit f une fonction définie et bornée sur E. On dit que f est* intégrable au sens de Lebesgue *(ou* Lebesgue–intégrable *ou simplement* intégrable*) si*

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \mathcal{U}(f,\mathcal{P}).$$

Dans ce cas, on note $\int_E f$ cette valeur commune, appelée intégrale de f.

Proposition 3.1.2 *Si f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$ alors f est intégrable au sens de Lebesgue et les deux intégrales coïncident.*

Démonstration. Si f est Riemann–intégrable, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partition $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ en intervalles telle que

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Donc f est intégrable au sens de Lebesgue. La valeur de chacune des deux intégrales est entre toute borne inférieure et toute somme supérieure, d'où la coïncidence.

Soit ϕ une fonction définie sur E. On dit que ϕ est une *fonction simple* ou *étagée* s'il existe une partition $\mathcal{P} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ de E et des réels $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tels que ϕ s'écrit sous la forme

$$\phi = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{E_i}.$$

3.2 Fonctions mesurables

Définition 3.2.1 *On dit qu'une fonction définie sur E est* mesurable *si l'ensemble*

$$\{x \in E;\ a \leq f(x) < b\}$$

est mesurable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Notons que si f est mesurable sur E alors l'ensemble E est mesurable.

Proposition 3.2.1 *Soit f une fonction bornée et mesurable sur un ensemble E de mesure finie. Alors f est Lebesgue–intégrable sur E.*

Démonstration. Supposons que $-M \leq f(x) < M$ pour tout $x \in E$. Soit N un entier suffisamment grand et soit

$$E_i = \left\{x \in E;\ -M + \frac{i-1}{N} \leq f(x) < -M + \frac{i}{N}\right\},\ 1 \leq i \leq 2MN.$$

Alors $\mathcal{P} = \{E_i\}$ est une partition de E et

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \sum_i \frac{1}{N}\mu(E_i) = \frac{1}{N}\mu(E).$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient le résultat désiré.

Nous donnons maintenant plusieurs caractérisations de la mesurabilité d'une fonction.

Proposition 3.2.2 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est mesurable sur E ;
(ii) $\{x \in E;\ f(x) \geq a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(iii) $\{x \in E;\ f(x) < a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(iv) $\{x \in E;\ f(x) > a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(v) $\{x \in E;\ f(x) \leq a\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$;
(vi) $\{x \in E;\ a < f(x) < b\}$ est mesurable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Notons que les ensembles définis dans (ii) et (iii) sont complémentaires, et de même pour les ensembles définis dans (iv) et (v). Si f est mesurable, alors l'ensemble $\{x \in E;\ f(x) \geq a\}$ est union dénombrable des ensembles mesurables $\{x \in E;\ a \leq f(x) < a + n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Inversement, si l'ensemble $\{x \in E;\ a \leq f(x)\}$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\{x \in E;\ a \leq f(x) < b\} = \{x \in E;\ a \leq f(x)\} \setminus \{x \in E;\ b \leq f(x)\}$$

est mesurable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et donc f est mesurable. Les autres équivalences peuvent être établies d'une manière analogue, en utilisant le fait que la mesurabilité des ensembles est fermée pour les unions et intersections dénombrables et pour la complémentarité.

Proposition 3.2.3 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble mesurable E, alors les fonctions* $\sup f_n$, $\inf f_n$ *sont mesurables. Si de plus,* $\lim f_n(x)$ *existe pour tout $x \in E$ alors la limite est une fonction mesurable.*

Démonstration. Pour montrer que $\sup f_n$ est mesurable, il suffit de vérifier la propriété (iv) de la proposition 3.2.2. On a

$$\{x \in E;\ \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x \in E;\ f_n(x) > a\}.$$

Donc l'ensemble $\{x \in E;\ \sup f_n(x) > a\}$ est une union dénombrable d'ensembles mesurables si f_n est une fonction mesurable. De même

$$\{x \in E;\ \inf f_n(x) < a\} = \bigcup_n \{x \in E;\ f_n(x) < a\};$$

donc $\inf f_n$ est mesurable.
Si $\sup f_n$ prend la valeur $+\infty$, alors

$$\{x \in E;\ \sup f_n(x) = +\infty\} = \bigcap_N \bigcup_n \{x \in E;\ f_n(x) > N\},$$

et cet ensemble est mesurable. La même identité a lieu là où $\inf f_n(x) = -\infty$.

Proposition 3.2.4 *Soient f et g deux fonctions mesurables sur un ensemble E et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors, les fonctions $f + g$ et kf sont mesurables.*

Démonstration. Il est évident que si f est mesurable alors kf l'est aussi. L'inégalité $f(x) + g(x) > a$ est équivalente à $f(x) > a - g(x)$. Celle-ci est vraie si et seulement si il existe un nombre rationnel r tel que

$$f(x) > r \text{ et } r > a - g(x).$$

Donc

$$\{x \in E;\ f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E;\ f(x) > r\} \cap \{x \in E;\ g(x) > a - r\}.$$

Le membre de droite de cette inégalité est une union dénombrable d'ensembles mesurables ; c'est donc un ensemble mesurable.

3.3 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Nous définissons maintenant la somme de Riemann d'une fonction Lebesgue–intégrable, *i.e.*, pour une partition de $\mathcal{P} = \{E_i\}$ de l'ensemble E et pour un choix de points $c_i \in E_i$, on définit

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, c) := \sum_i f(c_i)\mu(E_i).$$

Proposition 3.3.1 *Si f est une fonction bornée et intégrable sur un ensemble de mesure finie E alors*

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, c) \to \int_E f.$$

Proposition 3.3.2 *Si f et g sont deux fonctions définies sur E telles que $f = g$ sauf sur un ensemble mesurable de mesure nulle, alors*

$$\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, c) = \lim_{\mathcal{P}} \mathcal{R}(g, \mathcal{P}, c)$$

Notons que, dans la proposition précédente, nous n'avons supposé les fonctions f et g ni mesurables ni bornées. De plus, les sommes de Riemann peuvent converger même pour des fonctions non bornées.

Proposition 3.3.3 *Soient f et g deux fonctions bornées et mesurables sur un ensemble E de mesure finie, et soit k une constante, alors on a les propriétés suivantes :*
(i) $\int_E kf = k \int_E f$,
(ii) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$,
(iii) $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.

Démonstration. Nous nous contenterons de montrer la propriété (i).

$$\begin{aligned}
\int_E kf &= \lim_{\mathcal{P}} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, c) \\
&= \lim_{\mathcal{P}} \sum_i kf(c_i)\mu(E_i) \\
&= \lim_{\mathcal{P}} k \sum_i f(c_i)\mu(E_i) \\
&= \lim_{\mathcal{P}} k\,\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, c) \\
&= k \lim_{\mathcal{P}} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, c) \\
&= k \int_E f.
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.4 *Soit f est une fonction mesurable et bornée sur un ensemble de mesure finie E et soit F un sous-ensemble mesurable de E, alors f est intégrable sur F et on a*

$$\int_F f = \int_E \mathbf{1}_F\, f.$$

Corollaire 3.3.1 *Soient A et B deux ensembles disjoints et soit f une fonction mesurable et bornée sur l'ensemble $A \cup B$. Alors*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $f = f \cdot \mathbf{1}_A + f \cdot \mathbf{1}_B$.

Nous nous intéressons maintenant au passage à la limite dans les intégrales. Comme nous l'avons décrit plus tôt, l'intégrale de Lebesgue permet d'une manière plus naturelle ce passage à la limite.

Proposition 3.3.5 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble de mesure finie E telle que $f_n \to f$ simplement sur E. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable X avec $\mu(X) < \delta$ et un entier N tel que $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $k \geq N$ et tout $x \in E \setminus X$. On dit alors que f_n converge vers f au sens de la mesure (de Lebesgue).*

Démonstration. Soit

$$F_n = \{x \in E;\ \text{il existe } k \geq n \text{ avec } |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

Les ensembles F_n sont mesurables et on a puisque $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$:

$$F_{n+1} \subset F_n,\ \bigcap_n F_n = \emptyset.$$

Puisque $\mu(F_1) < \infty$, on a $\lim \mu(F_n) = 0$. Soit $\mu(F_N) < \delta$. Pour $x \in E \backslash F_N$, on a $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ pour tout $k \geq N$. Il suffit donc de choisir $X = F_N$.

Proposition 3.3.6 *(***Théorème d'Egoroff***)*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble de mesure finie E telle que $f_n \to f$ simplement sur E ; alors pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable $X \subset E$ avec $\mu(X) < \delta$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus X$.

Proposition 3.3.7 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur un ensemble de mesure finie E et convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe un nombre M tel que*

$$|f_n(x)| \leq M \quad \textit{pour tout } x \in E,\ n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\lim \int_E f_n = \int_E \lim f_n = \int_E f.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et soit X un ensemble mesurable avec $\mu(X) < \epsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément en dehors de X. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_E (f_n - f)\right| &\leq \int_E |f_n - f| \\ &= \int_{E\backslash X} |f_n - f| + \int_X |f_n - f| \\ &< \int_{E\backslash X} |f_n - f| + 2M\epsilon.\end{aligned}$$

Puisque $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus X$, il existe un entier N tel que $|f_n - f| < \epsilon$ sur $E \setminus X$ si $n \geq N$. Donc, si $n \geq N$

$$\begin{aligned}\left|\int_E (f_n - f)\right| &\leq \epsilon\, \mu(E \setminus X) + 2M\epsilon \\ &= \epsilon\, (\mu(E \setminus X) + 2M) \\ &\geq \epsilon\, (\mu(E) + 2M).\end{aligned}$$

Puisque ϵ est arbitraire et $\mu(E) < \infty$, nous obtenons le résultat.

3.4 Intégration de fonctions non bornées

Nous allons maintenant pouvoir définir l'intégration de fonctions non bornées et de fonctions sur des ensembles de mesure non bornée. Ce genre de situations serait exclu pour l'intégrale de Riemann. En particulier, nous verrons que l'intégrale de Lebesgue correspond à l'idée géométrique intuitive de l'intégrale, *i.e.*, l'intégrale est égale à l'aire au-dessus de l'axe des x moins l'aire en dessous. Ces aires devront être finies. Ainsi, on dira que f est Lebesgue–intégrable si et seulement si $|f|$ est Lebesgue–intégrable.
Soit f une fonction positive, mesurable, à valeurs réelles et définie sur un ensemble mesurable E (pouvant être $\mathbb{R}$ tout entier). On définit

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E g \ ; \ 0 \leq g \leq f, \ g \text{ est mesurable et bornée} \right\}.$$

Notons qu'il est possible d'avoir $\int_E f = +\infty$. Nous dirons que f est *intégrable sur E* si on a

$$\int_E f \ < +\infty.$$

Proposition 3.4.1 *Soient f et g deux fonctions positives et mesurables sur E, et soit $k \geq 0$; alors :*
(i) $\int_E kf = k \int_E f$;
(ii) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$;
(iii) Si $f \leq g$, *alors* $\int_E f \leq \int_E g$;
(iv) Si $0 \leq f \leq g$ *et si* g *est intégrable, alors* f *et* $g - f$ *sont intégrables et on a* $\int_E g = \int_E f + \int_E (g-f)$.

Démonstration. Les propriétés (i) et (iii) sont des conséquences immédiates de la définition. Montrons (ii). Soient h_1, h_2 deux fonctions mesurables et bornées avec $0 \leq h_1 \leq f$ et $0 \leq h_2 \leq g$. Alors $h_1 + h_2$ est mesurable et bornée et on a $0 \leq h_1 + h_2 \leq f + g$. Ainsi

$$\int_E (f+g) \geq \int_E (h_1 + h_2) = \int_E h_1 + \int_E h_2.$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les fonctions h_1 et h_2 mesurables et bornées, on obtient

$$\int_E (f+g) \geq \int_E f + \int_E g.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, soit h une fonction mesurable et bornée avec $0 \leq h \leq f + g$. Soient $h_1 = \min\{f, h\}$ et $h_2 = h - h_1$. Alors, h_1 et h_2 sont mesurables et bornées et de plus

$$0 \leq h_1 \leq f, \ 0 \leq h_2 \leq g,$$

donc

$$\int_E h = \int_E (h_1 + h_2) = \int_E h_1 + \int_E h_2 \leq \int_E f + \int_E g.$$

En prenant la borne supérieure pour toutes les fonctions mesurables et bornées $h \leq f + g$, nous obtenons

$$\int_E (f+g) \leq \int_E f + \int_E g.$$

Corollaire 3.4.1 *Si f et g sont intégrables, alors kf et $f+g$ sont intégrables pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

Nous énonçons maintenant les résultats fondamentaux de la théorie de l'intégration.

Proposition 3.4.2 *(***Lemme de Fatou***)*
Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives, convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\liminf \int f_n \geq \int f.$$

Démonstration. soit h une fonction mesurable bornée avec $0 \leq h \leq f$ et soit $h_n = \min\{f_n, h\}$; les fonctions h_n sont évidemment mesurables et uniformément bornées par la même borne que h. Puisque $f_n \to f \geq h$, on a $h_n \to h$. La proposition 3.3.7 implique $\int h_n \to \int h$. Puisque $\int f_n \geq \int h_n$ pour tout n, on a

$$\liminf \int f_n \geq \lim \int h_n = \int h.$$

Cette dernière inégalité est vraie pour toute fonction h mesurable et bornée vérifiant $h \leq f$; donc

$$\liminf \int f_n \geq \int f.$$

Proposition 3.4.3 *(***Théorème de la convergence monotone***)*
Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers f. Alors

$$\int f_n \to \int f.$$

Proposition 3.4.4 *Soit (f_n) une suite de fonctions positives mesurables convergeant vers f. On suppose qu'il existe une fonction intégrable g telle que $0 \leq f_n \leq g$ pour tout n, alors*

$$\int f_n \to \int f.$$

Démonstration. Puisque $f \leq g$, la fonction f est intégrable. Par le lemme de Fatou, il suffit de montrer que

$$\limsup \int f_n \leq \int f.$$

Comme on a

$$0 \leq g - f_n \to g - f,$$

le lemme de Fatou implique

$$\liminf \int (g - f_n) \geq \int (g - f) = \int g - \int f.$$

Or

$$\liminf \left(\int g - \int f_n \right) = \int g - \limsup \int f_n.$$

Donc, puisque g est intégrable

$$\int g - \limsup \int f_n \geq \int g - \int f,$$
$$\limsup \int f_n \leq \int f.$$

Il nous reste maintenant à étendre la définition de l'intégrable de Lebesgue à des fonctions non nécessairement positives. Pour cela, si f est une fonction, nous notons

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{1}{2}(|f| + f),$$
$$f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Ainsi puisque $f = f^+ - f^-$, nous définissons naturellement

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Nous dirons alors que f est (Lebesgue–) intégrable (ou intégrable sur un ensemble E) si les fonctions f^+ et f^- sont intégrables (sur E).
Nous allons maintenant énoncer les propriétés de base de l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 3.4.5 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur un ensemble E et soit $k \in \mathbb{R}$, alors les fonctions kf et $f+g$ sont intégrables (sur E) et*
(i) $\int kf = k \int f$,
(ii) $\int (f+g) = \int f + \int g$,
(iii) Si $f \leq g$, *alors* $\int f \leq \int g$.

Démonstration.

(i) Si $k > 0$, alors $(kf)^+ = kf^+$ et $(kf)^- = kf^-$. Donc, si $k > 0$,

$$\int kf = \int (kf)^+ - \int (kf)^- = k \int f^+ - k \int f^- = k \int f.$$

La même démarche peut être appliquée si $k < 0$.
(ii) Soient h_1 et h_2 deux fonctions quelconques positives et intégrables telles que

$$h_1 - h_2 = h = h^+ - h^-.$$

On a

$$h_1 + h^- = h_2 + h^+,$$
$$\int h_1 + \int h^- = \int h_2 + \int h^+,$$
$$\int h_1 - \int h_2 = \int h^+ - \int h^- = \int h.$$

Puisque les fonctions $(f^+ + g^+)$ et $(f^- + g^-)$ sont intégrables et positives et que

$$(f^+ + g^+) - (f^- + g^-) = f + g,$$

nous avons

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- \\ &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

(iii) Si $f \leq g$, alors $g - f$ est positive et on a par (i) et (ii),

$$\int (g - f) = \int g - \int f.$$

D'où le résultat.

Proposition 3.4.6 *(***Théorème de la convergence dominée de Lebesgue***)* *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant vers f simplement et vérifiant $|f_n| \leq g$ pour une fonction intégrable g et pour tout n. Alors*

$$\int f_n \to \int f.$$

Démonstration. On écrit $f_n = f_n^+ - f_n^-$ et on obtient

$$f_n^+ \to f^+ \quad \text{et} \quad 0 \leq f_n^+ \leq g \quad \text{pour tout } n.$$

Donc, par la proposition 3.4.4, on a

$$\int f_n^+ \to \int f^+.$$

De même, $f_n^- \to f^-$ et $0 \leq f_n^- \leq g$ pour tout n ; et donc

$$\int f_n^- \to \int f^-.$$

Proposition 3.4.7 *Soit f une fonction intégrable. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble T de mesure finie, une partition $\{E_i\}$ de T et un choix $c_i \in E_i$ tels que*

$$\left| \int f - \sum_i f(c_i)\mu(E_i) \right| < \epsilon.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour des fonctions positives f. Soit $f \geq 0$ et soit g une fonction mesurable et bornée avec $0 \leq g \leq f$ telle que $g = 0$ en dehors d'un ensemble de mesure finie T, et

$$\int f - \epsilon < \int_T g \leq \int f.$$

Soit $\mathcal{P} = \{E_i\}$ une partition de T telle que $\mu(E_i) > 0$ pour tout i et $\mathcal{U}(g, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(g, \mathcal{P}) < \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
\int f - 2\epsilon &= \int f - \epsilon - \epsilon \\
&< \int f - \epsilon + \mathcal{L}(g, \mathcal{P}) - \mathcal{U}(g, \mathcal{P}) \\
&< \mathcal{L}(g, \mathcal{P}) \leq \int_T g \leq \int f.
\end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned}
m_i &= \inf\{g(x);\ x \in E_i\}, \\
\overline{m}_i &= \inf\{f(x);\ x \in E_i\}.
\end{aligned}$$

Puisque f ne peut pas être identiquement égale à $+\infty$ sur un ensemble de mesure non nulle, chaque $\overline{m}_i$ est fini et on a $0 \leq m_i \leq \overline{m}_i$ pour tout i. Donc

$$\int f - 2\epsilon < \mathcal{L}(g, \mathcal{P}) = \sum_i m_i \mu(E_i) \leq \sum_i \overline{m}_i \mu(E_i).$$

Soit $\phi = \sum_i \overline{m}_i \mathbf{1}_{E_i}$. La fonction ϕ est évidemment mesurable et on a

$$\int \phi = \sum_i \overline{m}_i \mu(E_i) \leq \int f.$$

Donc

$$\int f - 2\epsilon < \sum_i \overline{m}_i \mu(E_i) \leq \int f.$$

Choisissons des points $c_i \in E_i$ tels que :

$$\overline{m}_i \leq f(c_i) < \overline{m}_i + \frac{\epsilon}{\mu(T)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int f - 2\epsilon &< \sum_i f(c_i) \mu(E_i) \\
&\leq \sum_i \left(\overline{m}_i + \frac{\epsilon}{\mu(T)} \right) \mu(E_i) \\
&= \sum_i \overline{m}_i \mu(E_i) + \epsilon \\
&< \int f + \epsilon.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int f - \sum_i f(c_i)\mu(E_i)\right| < 2\epsilon.$$

On en déduit alors le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.2 *Pour toute fonction intégrable f il existe une fonction étagée ϕ telle que*

$$|\phi| \leq |f|, \qquad \left|\int f - \int \phi\right| < \epsilon.$$

3.5 Intégrale de Lebesgue et dérivation

Nous allons maintenant examiner dans quelles conditions le théorème fondamental de la théorie de l'intégration :

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a),$$

est valable lorsqu'il s'agit de l'intégrale au sens de Lebesgue. Nous verrons, en effet, que cette propriété n'est pas toujours vraie.

Définition 3.5.1 *Nous dirons qu'une propriété est valable « presque partout » si celle-ci a lieu partout sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi par exemple, si f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E, on dira que $f = g$ presque partout (ou simplement* p.p.*) s'il existe une partie X de E telle que*

$$\mu(X) = 0, \quad f(x) = g(x) \ \forall \ x \in E \setminus X.$$

Proposition 3.5.1 *Si f est une fonction croissante sur l'intervalle $[a, b]$ alors f' existe presque partout.*

Proposition 3.5.2 *Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, alors f' est mesurable et on a*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Soit

$$f_n(x) = n\Big(f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)\Big)$$

où on a par convention $f(x + \frac{1}{n}) = f(b)$ si $x + \frac{1}{n} \geq b$. Donc f_n est mesurable pour tout n, et $f_n(x) \to f'(x)$ pour presque tout x. Donc f' est mesurable. Comme pour tout n, $f_n \geq 0$, on a par le lemme de Fatou et grâce à la croissance de f :

$$\begin{aligned}\int_a^b f' &= \int_a^b \lim f_n \\ &\leq \liminf \int_a^b f_n \\ &= \liminf \left(n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right) \\ &= f(b) - \limsup n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \\ &\leq f(b) - f(a).\end{aligned}$$

En effet, puisque f est croissante, on a pour tout n

$$n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \geq n f(a) \frac{1}{n} = f(a).$$

L'inégalité inverse se montre d'une manière analogue en considérant une suite

$$f_n(x) = n\Big(f(x) - f(x - \frac{1}{n}) \Big).$$

Proposition 3.5.3 *Si f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^x f = 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $f = 0$* p.p.

Démonstration. Supposons que $\int_a^x f = 0$ pour tout x ; alors $\int_c^d f = 0$ pour tout $c, d \in \,]a, b[$. Supposons maintenant que f est strictement positive sur un ensemble E de mesure strictement positive. Il existe alors un sous-ensemble fermé $F \subset E$ tel que $\mu(F) > 0$ et $\int_F f > 0$. Soit U l'ouvert $]a, b[\setminus F$ et écrivons U avec

$$U = \bigcup_i \,]a_i, b_i[\,.$$

Puisque $U \cup F = \,]a, b[$, on a

$$\int_U f = - \int_F f < 0.$$

Donc

$$\sum_i \int_{a_i}^{b_i} f < 0.$$

On en déduit que $\int_{a_i}^{b_i} f \neq 0$ pour un intervalle $]a_i, b_i[$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

Proposition 3.5.4 *Si f est bornée et mesurable sur $[a, b]$ et*

$$F(x) = \int_a^x f,$$

alors F est continue et $F(a) = 0$ et $F' = f$ presque partout.

Démonstration. Écrivons $f = f^+ - f^-$. On a

$$F(x) = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^- = F_1(x) - F_2(x),$$

où F_1, F_2 sont deux fonctions croissantes. D'après la proposition 3.5.2, $F'(x)$ existe pour presque tout x. De plus, si f est majorée par M, on a

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \le M\,|x_2 - x_1|;$$

donc F est continue. Soit

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) \\ &= n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f. \end{aligned}$$

Donc $|f_n(x)| \le M$ pour tout x et $f_n(x) \to F'(x)$ *p.p.* Par le théorème de la convergence dominée et la continuité de F,

$$\begin{aligned} \int_a^x F' &= \lim_n \int_a^x f_n \\ &= \lim_n \left(\int_a^x nF\left(t + \frac{1}{n}\right) dt - \int_a^x nF(t)\, dt \right) \\ &= \lim_n \left(\int_x^{x+\frac{1}{n}} nF(t)\, dt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} nF(t)\, dt \right) \\ &= F(x) - F(a) \\ &= F(x) = \int_a^x f. \end{aligned}$$

En effet

$$n \int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)\, dt = \int_0^1 F(x + \frac{s}{n})\, ds.$$

Ainsi, par le théorème de la convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} n \int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 F(x + \frac{s}{n})\, ds = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} F(x + \frac{s}{n})\, ds = F(x).$$

Donc

$$\int_a^x (F' - f) = 0 \qquad \text{pour tout } x,$$

et donc $F' = f$ *p.p.* par la proposition 3.5.3.