Rappels d'algèbre linéaire

Ce chapitre se consacre à rappeler un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui seront utiles pour le cours d'*analyse numérique matricielle et optimisation*. Nous décomposons cela en quatre parties :

– Espaces vectoriels - Bases,
– Applications linéaires - Matrices,
– Déterminant - Trace,
– Valeurs et vecteurs propres - Diagonalisation.

0.1 Espaces vectoriels - Bases

0.1.1 Espaces vectoriels

Soit un vecteur $x \in \mathbb{R}$, celui-ci peut s'écrire :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{ou encore : } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ , avec } e_i = \delta ij = 1 \text{ si } i = j \text{ , } 0 \text{ sinon.}$$

Les x_i sont les *composantes* du vecteur x.

L'ensemble des n vecteurs $\{e_i \in \mathbb{R}^n / i = 1, n\}$ forme la *base canonique* de $\mathbb{R}^n$. C'est *une* base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 0.1.1 *: (Espace vectoriel)*

Soit E, un ensemble abstrait (par exemple $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), muni des deux opérations : $+$: l'addition (dite opération interne], $\times$: la multiplication (dite opération externe) avec un scalaire réel (ou complexe en fonction de l'ensemble abstrait de départ).
On dit que $[E, +, \times)$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$] si les conditions suivantes sont vérifiées :
– $\forall x, y \in E \Longrightarrow x + y \in E$,

– $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C}) \Longrightarrow \lambda x \in E$,
– $(E,+)$ *groupe commutatif (associativité, commutativité, élément neutre et opposé),*
– *la multiplication ayant les propriétés suivantes :*

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y\\(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x\end{array}\right\}\ \textit{distributivité}$$

$$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)=\mu(\lambda x)\ \}\ \textit{associativité}$$

$$0.x = 0 \textit{ élément "zéro"}$$
$$1.x = x \textit{ élément neutre}$$

Remarque : Un sous-espace vectoriel F de E est une partie non vide de l'espace vectoriel E et stable par combinaison linéaire :
– $F \neq \emptyset$
– $\forall x, y \in F \Longrightarrow x + y \in F$,
– $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C}) \Longrightarrow \lambda x \in F$.

Exercice : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 étant choisi (fixé !). Vérifiez que $\{\lambda x_0 / \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace (une droite) vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

0.1.2 Bases

Une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}$ qui est à la fois :
– génératrice et
– libre (indépendance linéaire).

Une famille $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ est *génératrice* de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur x peut s'écrire comme combinaison linéaire (pas forcément unique) des vecteurs x_i $(i = 1, k)$.

Remarque : La famille des combinaisons linéaires de x_1, x_2, ..., x_k forme un sous espace vectoriel (espace *engendré* par x_1, x_2, ..., x_k).

Une famille $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ est *libre* dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\text{si } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \text{ alors } \alpha_i = 0, i = 1, k.$$

Exercice : Démontrer que la repésentation d'un vecteur sur une famille libre est unique.

Et enfin ... dans un espace de dimension n :
– toute famille *génératrice* a *au moins* n vecteurs,
– toute famille *libre* a *au plus* n vecteurs,
– une famille *de plus* de n vecteurs (strictement) ne peut pas être *libre*,
– une famille *de moins* de n vecteurs (strictement) ne peut pas être *génératrice*.

0.2 Applications linéaires - Matrices

0.2.1 Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel.

Une *application linéaire* f sur E est une application de E dans E telle que :

$$\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C}), f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Le *noyau* d'une application linéaire f est :

$$Kerf = \{x \in E / f(x) = 0\}.$$

L'*image* d'une application linéaire f est :

$$Imf = \{y \in E / \exists x \in E, f(x) = y\}.$$

<u>Exercice</u> : Montrer que $Kerf$ et Imf sont des sous espaces vectoriels de E.

f est *injective* si et seulement si :

$$\text{si } f(x) = f(x^{'}) \text{ alors } x = x^{'}$$

<u>Exercice</u> : Montrer que si f est injective alors $Kerf = \{0\}$.

f est *surjective* si et seulement si :

$$\forall y \in E, \exists x \in E, f(x) = y,$$

ou autrement dit si et seulement si $Imf = E$.

Et l'on a : $dimKerf + dimImf = dimE$. Ce qui permet en dimension finie d'avoir :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff Kerf = \{0\} \\ &\iff Imf = E \quad f \iff \text{surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

0.2.2 Matrices ou représentation d'une application linéaire par une matrice

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$.
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, $f(e_i)$ ($\forall i = 1, n$) est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, il peut se décomposer sur la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$:

$$\begin{aligned}\forall i = 1, n : f(e_i) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(e_i) e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \qquad \text{avec } a_{ji} = \alpha_j(e_i) \text{ (notation)}\end{aligned}$$

Exercice : En partant de $y = f(x)$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, faites apparaitre la matrice reliant y à x :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} y_j e_j = y = f(x) &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j\end{aligned}$$

Ainsi pour chaque e_j, nous avons :

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}$$

écrit plus habituellement :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Nous avons ainsi la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque : La i ème colonne donne les composantes du vecteur $f(e_i)$.

Mais comme nous venons de le voir, la matrice A n'est pas uniquement liée à f. Elle dépend aussi de la base dans laquelle on l'écrit !

Changement de base sur une matrice :

Soient deux bases de $\mathbb{R}^n$:

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ et } \left\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}.\right\}$$

Chaque vecteur $e_i^{'}$ peut alors s'exprimer de la manière suivante :

$$e_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} S_j(e_i^{'}) e_j$$

La matrice S est ainsi définie (avec $S_{ji} = S_j(e_i^{'})$) :

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \ldots & S_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ S_{n1} & S_{n2} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : La i ème colonne donne les composantes de $e_i^{'}$ dans la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Donc ImS est engendré par les vecteurs $e_i^{'}$ (qui forment une base), ainsi (dimension finie) :

$$ImS = E \Longleftrightarrow \text{ surjective } \Longleftrightarrow \text{ bijective}$$

S est donc inversible, d'où :

$$\forall i = 1, n, e_i^{'} = S e_i$$

$$\forall i = 1, n, e_i = S^{-1} e_i^{'}$$

<u>Remarque</u> : S doit être percu comme écrite dans la base canonique !

S est ce que l'on appelle la matrice de passage de la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans la base $\left\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}.\right\}$.

<u>Exercices</u> :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'} e_i^{'}$. Développer la relation entre x_i et $x_i^{'}$.
2. Soit f une application linéaire de matrice A dans la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et de matrice $A^{'}$ dans la base $\left\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_n^{'}.\right\}$. $y = f(x)$ s'écrit matriciellement de la manière suivante :

   $$Y = AX \text{ dans la base des } e_i.$$
   $$Y^{'} = A^{'} X^{'} \text{ dans la base des } e_i^{'}.$$

   Sachant que $X = SX^{'}$, faites apparaitre la relation reliant A et $A^{'}$.

Remarque : Deux matrices A et A' vérifiant $A' = S^{-1}AS$ (avec S matrice inversible) sont dites *semblables*. Elles repésentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Opérations, propriétés particulières :

Le produit de deux matrices $C = AB$ ($C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$) ne correspond pas au produit de deux apllications linéaires ! Il correspond à fog (A étant associé à f,B à f) :

$$y = fog(x) = f(g(x))$$

$$Y = ABX = A(BX).$$

Ainsi, tout comme $fog \neq gof$: $AB \neq BA$.

– Transposée de la matrice A :

$$A^T = \overline{A} = {}^t\!A \Longrightarrow (A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

– A symétrique : $A = A^T$.
– A hermitienne : $A = A^*, (A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ (complexe conjugué) (A^* matrice adjointe).

Une matrice hermitienne à coefficient réel est symétrique.

– A antisymétrique : $A^T = -A$. Les coefficients d'une matrice symétrique sont tous nuls.

$$\forall A : A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{antisymétrique}}$$

– A diagonale : $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.
– A triangulaire supérieure : $a_{ij} = 0, \forall i > j$.
– et :

$$\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, \\
(A + B)^T &= A^T + B^T, \\
(\lambda A)^T &= \lambda A^T, \\
(AB)^T &= B^T A^T, \\
(A^{-1})^T &= (A^T)^{-1}.
\end{aligned}$$

0.3 Déterminant - Trace

Les invariants.

0.3.1 Déterminant

Le *déterminant* de la matrice carrée A d'ordre n est :

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} ... a_{n,\sigma(n)}$$

où S_n est l'ensemble des $n!$ permutations de $1, 2, ..., n$ et $|\sigma|$ est la signature de σ (nombre de permutations de deux termes consécutifs c.a.d. élémentaires).

- $detI = 1$ (I matrice identité),
- $detA = detA^T, detA^* = \overline{detA}$,
- $det\alpha A = \alpha^n detA$ (conséquence : en général $det(A+B) \neq detA + detB$),
- $detAB = detAdetB = detBA$,
- $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{detA}$ si $detA \neq 0$ c.a.d. si A^{-1} existe,
- et pour A diagonale ou triangulaire (sup. ou inf.) : $detA = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercices :

1. Montrer que $detA = 0$ pour A antisymétrique en dimension impaire.
2. Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.

0.3.2 Trace

Le *trace* de la matrice carrée A d'ordre n est :

$$TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- $TrA = TrA^T$,
- $Tr\alpha A = \alpha TrA$,
- $TrAB = TrBA$ et en général $TrAB \neq TrATrB$,
- $TrA = 0$ si A est antisymétrique,
- si A et A' sont semblables : $TrA = TrA'$.

0.4 Valeurs et vecteurs propres - Diagonalisation

0.4.1 Valeurs et vecteurs propres

Si l'on a pour une matrice A d'ordre n :

$$Au = \lambda u$$

u est un *vecteur propre* (si il est non nul) et λ est sa *valeur propre* associée. En pratique, on fixe le vecteur propre en "normalisant" u t.q. $||u|| = 1$ (sinon on en a une infinité).

Comme on recherche un u non nul et que l'on a :

$$(A - \lambda I)u = 0.$$

Il faut que le déterminant de $A - \lambda I$ soit nul :

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

sinon la seule solution est le vecteur nulle. On doit avoir un noyau $Ker(A - \lambda I) \neq 0$.

Vecteurs propres à gauche :

En utilisant $detA^* = \overline{detA}$, on a :

$$0 = \overline{det(A - \lambda I)} = det(A - \lambda I)^* = det(A^* - \overline{\lambda} I).$$

Donc les valeurs propres de A^* sont les conjugués de celles de A et :

$$A^* v = \lambda v \text{ avec } v \neq 0$$
$$\text{ou encore :}$$
$$v^* A = \lambda v^*.$$

Ainsi, on dit que v est un vecteur propre à gauche de A.

Exercice : Montrer que les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.

0.4.2 Diagonalisation

Théorème 0.4.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est diagonalisable si et seulement si A possède n vecteurs propres linéairement indépendants. La matrice diagonale D est constituée des valeurs propres de A :*

$$D = S^{-1} A S$$

avec S et S^{-1} t.q. les colonnes de S sont les vecteurs propres de A et les lignes de S^{-1} sont les conjugués des vecteurs propres à gauche de A.

Attention, toutes les matrices ne sont pas diagonalisables.

Exemple : La matrice de Jordan (d'ordre n).

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ . & & & & . & 1 \\ 0 & . & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Déterminons u t.q. $Ju = \lambda u$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda u_1 + & u_2 & = \lambda u_1 \\ \lambda u_2 + & u_3 & = \lambda u_2 \\ & . & \\ & . & \\ \lambda u_{n-1} + & u_n & = \lambda u_{n-1} \\ & \lambda u_n & = \lambda u_n \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} u_2 & = 0 \\ u_3 & = 0 \\ . & \\ . & \\ u_n & = 0 \\ \lambda u_n & = \lambda u_n \end{array}\right.$$

Donc $u = \alpha e_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Les vecteurs propres ne sont pas ici linéairement indépendants.

Autres résultats importants :

Si toutes les valeurs propres de A sont disctinctes alors A est diagonalisable.

Une matrice hermitienne est diagonalisable. Ses valeurs propres sont réelles et ses vecteurs propres sont orthogonaux (une matrice symétrique réelle est une matrice hermitienne !).

Quelque soit A, il existe une matrice unitaire U t.q. $U^{-1}AU$ soit triangulaire.

<u>Rappels</u> :
– matrice orthogonale : $A^TA = AA^T = I$,
– matrice unitaire : $A^*A = AA^* = I$,
– matrrice normale : $A^*A = AA^*$.