Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Analyse Fonctionnelle (Master 1 Mathématiques-Informatique)
Daniel Li

Chapitre 6

Le Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

1 La forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

La a forme analytique du Théorème de Hahn-Banach est un théorème permettant de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espace vectoriel, *en gardant un contrôle* sur le prolongement quand il y en avait un sur la forme de départ ; en particulier si l'espace est normé et la forme linéaire est continue, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur tout l'espace, et en gardant la même norme.

Théorème 1.1 (Théorème de Hahn-Banach, *forme analytique***)**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit p une semi-norme sur E.
Soit G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi\colon G \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que :

$$\boxed{|\varphi(x)| \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in G}\,.$$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{K}$ **prolongeant** *φ et telle que :*

$$\boxed{|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E}\,.$$

On aura en fait besoin d'une version un peu plus forte. Pour cela, on dira :

Définition 1.2 *On dit que $p\colon E \to \mathbb{R}_+$ est une* sous-norme *si, pour tous $x, y \in E$:*
1) *$p(\lambda x) = \lambda p(x)$, pour tout λ* **positif** *ou nul ;*
2) *$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.*

On a alors :

Théorème 1.3 (Théorème de Hahn-Banach, *forme analytique forte***)**
Soit E un espace vectoriel **réel** *et p une sous-norme sur E.*
Soit G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi\colon G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant :

$$\boxed{\varphi(x) \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in G}\,.$$

Alors, il existe une forme linéaire $\tilde{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}$ **prolongeant** *φ et vérifiant encore :*

$$\boxed{\tilde{\varphi}(x) \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E}\,.$$

Il faut noter que dans cette version, l'inégalité concerne $\varphi(x)$, et pas sa valeur absolue.

Toutefois, lorsque p n'est pas seulement une sous-norme, mais une semi-norme, on a $p(-x) = p(x)$; donc, lorsque l'espace E est réel, si l'on a :

$$\tilde{\varphi}(x) \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E,$$

on a en fait :

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le Théorème 1.1 découle immédiatement du Théorème 1.3.

La preuve utilise le :

Lemme de Zorn. *Tout ensemble ordonné inductif, non vide, possède un élément maximal.*

Rappelons que l'ordre est *inductif* si toute partie totalement ordonnée possède un majorant.

Preuve du Théorème 1.3. Soit :

$$\mathfrak{P} = \left\{\psi\colon H = D_\psi \to \mathbb{R}\,;\ \begin{cases} H \text{ s.e.v. de } E \text{ et } G \subseteq H \\ \psi \text{ linéaire, } \psi_{|G} = \varphi \text{ et } \psi(x) \leqslant p(x),\, \forall x \in H \end{cases}\right\}.$$

On munit $\mathfrak{P}$ de la relation d'ordre définie par :

$$\psi_1 \prec \psi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(D_{\psi_1} \subseteq D_{\psi_2} \text{ et } \psi_2 \text{ prolonge } \psi_1\big).$$

Alors :
a) $\mathfrak{P} \neq \emptyset$ car $\varphi \in \mathfrak{P}$;
b) $\mathfrak{P}$ est inductif car si $\mathcal{Q}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{P}$, on pose :

$$H_m = \bigcup_{\psi \in \mathcal{Q}} D_\psi$$

et :

$$\psi_m(x) = \psi(x) \text{ si } \psi \in \mathcal{Q} \text{ et } x \in D_\psi.$$

Comme $\mathcal{Q}$ est totalement ordonné, H_m est un sous-espace vectoriel de E et $\psi_m \colon H \to \mathbb{R}$ est bien définie et est une forme linéaire sur H_m. ψ_m est alors visiblement un majorant de $\mathcal{Q}$.

Soit alors $\tilde\varphi$ un élément maximal de $\mathfrak{P}$.

Il reste à voir que $D = D_{\tilde\varphi}$ est égal à E tout entier.

Supposons que non : $D \neq E$. On peut alors choisir un $x_0 \notin D$.

On va chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que, si l'on pose :

$$\begin{cases} H = D + \mathbb{R}x_0 \\ \psi(x + tx_0) = \tilde\varphi(x) + t\alpha\,, \quad x \in D\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

alors $\psi \in \mathfrak{P}$. Cet élément ψ serait un majorant de $\tilde\varphi$, avec $\psi \neq \tilde\varphi$ (puisque $D_\psi = H$ contient x_0 qui n'est pas dans $D = D_{\tilde\varphi}$) : cela contredit la maximalité de $\tilde\varphi$.

Cette contradiction montre que $D = E$ et donc le Théorème 1.3.

Pour obtenir cet α, remarquons que $\psi \in \mathfrak{P}$ si et seulement si :

$$\tilde\varphi(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0)\,, \quad \forall x \in D\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mais, pour avoir cela, il suffit de l'avoir pour $t = 1$ et $t = -1$:

$$\begin{cases} \tilde\varphi(x) - \alpha \leqslant p(x - x_0) \\ \tilde\varphi(x) + \alpha \leqslant p(x + x_0) \end{cases} \quad \forall x \in D.$$

En effet, on aura alors :

$$\tilde\varphi(x) + t\alpha = \begin{cases} t\Big[\varphi\Big(\dfrac{x}{t}\Big) + \alpha\Big] \leqslant tp\Big(\dfrac{x}{t} + x_0\Big) = p(x + tx_0)\,, \quad \text{si } t > 0 \\[2ex] (-t)\Big[\varphi\Big(-\dfrac{x}{t}\Big) - \alpha\Big] \leqslant (-t)p\Big(-\dfrac{x}{t} - x_0\Big) = p(x + tx_0)\,, \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(et si $t = 0$: $\tilde\varphi(x) \leqslant p(x)$ car $\tilde\varphi \in \mathfrak{P}$).

Il suffit donc de pouvoir choisir α tel que :

$$\sup_{x \in D}\{\tilde\varphi(x) - p(x - x_0)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in D}\{p(y + x_0) - \tilde\varphi(y)\}\,,$$

ce qui est possible car :

$$\tilde\varphi(x) + \tilde\varphi(y) = \tilde\varphi(x + y) \leqslant p(x + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0)$$

pour tous $x, y \in D$.

Le Théorème 1.3 est donc prouvé. $\square$

Preuve du Théorème 1.1 dans le cas complexe. On utilise le lemme suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Lemme 1.4 *Soit E un espace vectoriel complexe, et $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent.*

a) Si $v\colon E \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire complexe, alors $u = \operatorname{Re} v\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire réelle et :

$$v(x) = u(x) - iu(ix)\,,\ \forall x \in E. \tag{$*$}$$

b) Inversement, si $u\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire réelle, alors la formule $(*)$ définit une forme linéaire complexe $v\colon E \to \mathbb{C}$.

Appliquons alors le Théorème 1.1 à $E_{\mathbb{R}}$ pour obtenir $u\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ prolongeant $\operatorname{Re}\varphi$ et telle que $|u(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$. La forme linéaire complexe v associée prolonge alors φ, grâce à la formule $(*)$. De plus, si $\theta = \theta_x \in \mathbb{R}$ est tel que $|v(x)| = \mathrm{e}^{-i\theta} v(x)$, on a :

$$|v(x)| = \mathrm{e}^{-i\theta} v(x) = v\big(\mathrm{e}^{-i\theta} x\big) = u\big(\mathrm{e}^{-i\theta} x\big),$$

car $v\big(\mathrm{e}^{-i\theta} x\big) \in \mathbb{R}_+$, et donc :

$$|v(x)| = u\big(\mathrm{e}^{-i\theta} x\big) \leqslant p\big(\mathrm{e}^{-i\theta} x\big) = p(x). \qquad \square$$

2 Quelques conséquences de la forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

Nous allons donner une série de conséquences du Théorème de Hahn-Banach, **toutes <u>très</u> importantes**.

Dans tout ce qui suit, E sera désormais un *espace <u>normé</u>*.

Théorème 2.1 *Toute forme linéaire continue sur un sous-espace G de E se prolonge en une forme linéaire continue sur E tout entier, avec la même norme.*

Preuve. Soit $\varphi_0 \in G^*$ et $C = \|\varphi_0\|_{G^*}$. Il suffit d'appliquer le Théorème de Hahn-Banach avec la semi-norme $p(x) = C\,\|x\|_E$. $\square$

Théorème 2.2 *Pour tout $x \in E$, non nul, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$.*

Preuve. Il suffit de prendre $p(x) = \|x\|$, $G = \mathbb{K}\,x$ et $\varphi_G(\lambda x) = \|x\|\,\lambda$. $\square$

Corollaire 2.3 *Pour tout espace vectoriel normé E, le dual E^* sépare les points de E.*

Preuve. Si $x_1 \neq x_2$, alors $x = x_1 - x_2 \neq 0$; il existe donc $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = \|x\| \neq 0$; donc $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. □

Remarque. Ce n'est pas le cas pour des espaces plus généraux : par exemple, l'espace $L^{1/2}(0,1)$, muni de la distance :

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2}\, dt$$

est un espace vectoriel topologique n'admettant aucune forme linéaire continue non nulle (*exercice*).

Corollaire 2.4 *On a :*

$$\boxed{\|x\| = \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leqslant 1} |\varphi(x)|}.$$

C'est une conséquence immédiate du Théorème 2.2. Notons que la borne supérieure est atteinte. C'est à comparer avec l'égalité :

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |\varphi(x)|\,,$$

qui est une *définition*, et dans laquelle la borne supérieure n'est pas atteinte en général.

Corollaire 2.5 *L'injection canonique :*

$$\begin{array}{cccc} i: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \tilde{x} \end{array}$$

où $\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$, $\forall \varphi \in E^*$, est une isométrie.

i est donc en particulier injective. Par contre, elle n'est pas surjective en général ; nous verrons un peu plus tard quand elle l'est.

Preuve. On a :

$$\|\tilde{x}\|_{E^{**}} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leqslant 1} |\varphi(x)| \overset{\text{Corol. 2.4}}{=} \|x\|.$$ □

Théorème 2.6 *Si F est un sous-espace vectoriel <u>fermé</u> de E et $x_0 \notin F$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in F$ (c'est-à-dire que $F \subseteq \ker \varphi$).*

Preuve. Prenons $G = F + \mathbb{K}\, x_0$ et définissons $\varphi_0(x + \lambda x_0) = \lambda$, pour $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme F est fermé, on a $\delta = \operatorname{dist}(x_0, F) > 0$; donc :

$$|\varphi_0(x + \lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{\delta}\operatorname{dist}(\lambda x_0, F) \leqslant \frac{1}{\delta}\|\lambda x_0 + x\|\,,$$

de sorte que l'on peut la prolonger en $\varphi \in E^*$. □

Corollaire 2.7 *Tout sous-espace vectoriel fermé est l'intersection des hyperplans fermés le contenant.*

Remarques. 1) Nous verrons un peu plus loin une généralisation de ce résultat (Théorème de Minkowski).

2) Un hyperplan H est fermé si et seulement si $H = \ker \varphi$, avec φ continue (c'est-à-dire $\varphi \in E^*$), non nulle (*exercice*).

3) Si E est complexe, toute $\varphi \in E^*$ s'écrit :

$$\varphi(x) = u(x) - iu(ix)\,,$$

où $u = \operatorname{Re}\varphi$. Il en résulte que l'hyperplan, si φ n'est pas nulle, complexe :

$$\ker \varphi = (\ker u) \cap \big[i(\ker u)\big]$$

est l'intersection de deux hyperplans réels. Remarquons aussi qu'il est de codimension 1 dans E, et donc de codimension 2 dans $E_{\mathbb{R}}$.

Le corollaire suivant sert très souvent.

Corollaire 2.8 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $x_0 \in \overline{F}$ si et seulement si, pour toute $\varphi \in E^*$, on a :*

$$\varphi(x) = 0\,,\ \forall x \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_0) = 0.$$

En particulier, F est <u>dense</u> dans E si et seulement si, pour toute $\varphi \in E^*$:

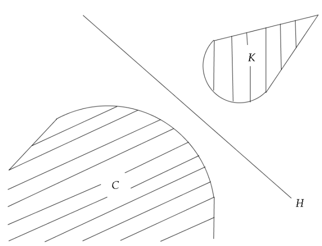
$$\varphi(x) = 0\,,\ \forall x \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0.$$

3 La forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach

Il y a plusieurs énoncés géométriques, avec différentes hypothèses. Bien que certains aient des versions "*complexes*" (pour les espaces vectoriels complexes), c'est essentiellement un théorème "*réel*". Il permet de *séparer* des convexes (compacts, fermés, ouverts, ...) disjoints par des hyperplans affines fermés.

Théorème 3.1 (Théorème de Hahn-Banach, *forme géométrique***)**
Soit E un espace vectoriel normé.
Soit C et K deux parties non vides de E disjointes et telles que C soit **convexe** *et* **fermée**, *et K soit* **convexe** *et* **compacte**.
Alors, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle que :

$$\boxed{\sup_{x\in C} \operatorname{Re}\varphi(x) < \inf_{y\in K} \operatorname{Re}\varphi(y)}\,.$$



Remarque. On utilise très souvent ce théorème lorsque $K = \{x_0\}$ est réduit à un point.

Remarque. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\sup_{x\in C} \operatorname{Re}\varphi(x) < \alpha < \inf_{y\in K} \operatorname{Re}\varphi(y)\,,$$

on dit que l'*hyperplan* (affine, réel) fermé :

$$H_\alpha = \{x \in E\,;\ \operatorname{Re}\varphi(x) = \alpha\}$$

sépare, *strictement*, C et K.

Lorsque E est un espace réel, on dit qu'une partie de E est un *demi-espace fermé* s'il existe $\varphi \in E^*$, non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que cette partie s'écrive :

$$H_\alpha^+ = \{x \in E\,;\ \varphi(x) \geqslant \alpha\}.$$

On notera que le signe $\geqslant$ peut être remplacé par $\leqslant$:

$$H_\alpha^+ = \{x \in E\,;\ \big(-\varphi(x)\big) \leqslant (-\alpha)\}.$$

Lorsque l'espace est complexe, on considère sa structure réelle sous-jacente, et l'on remplace donc $\varphi(x)$ par $\operatorname{Re}\varphi(x)$, ou par $\operatorname{Im}\varphi(x)$.

Un corollaire immédiat du théorème est l'important résultat suivant :

Théorème 3.2 (Théorème de Minkowski)
Toute partie **convexe** *et* **fermée** *d'un espace vectoriel normé* *réel* *est l'***intersection** *des* **demi-espaces fermés** *qui le contiennent.*

Preuve de la forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach. L'énoncé ne faisant intervenir que $\operatorname{Re}\varphi$, on peut supposer que E est réel.

On aura en fait besoin d'une autre forme géométrique.

Proposition 3.3 *Soit E un espace vectoriel topologique* **réel**. *Soit C et Ω deux parties non vides disjointes de E telles que C soit convexe et fermée et Ω soit convexe et ouverte.*

Alors, il il existe une forme linéaire continue non nulle $\varphi \in E^*$ telle que :

$$\forall x \in C\,,\ \forall y \in \Omega\ : \qquad \varphi(x) < \varphi(y).$$

En particulier :

$$S = \sup_{x\in C}\varphi(x) \leqslant \inf_{y\in\Omega}\varphi(y) = I.$$

Remarque. En particulier ce théorème montre que l'existence de parties convexes ouvertes non vides et différentes de l'espace tout entier "force" l'existence de formes linéaires continues non nulles. C'est pourquoi dans les espaces vectoriels topologiques *localement convexes* (possédant une base de voisinages de 0 formée de convexes), il y a *beaucoup* de formes linéaires continues : elles séparent les points de l'espace (s'il est séparé).

Le fait que $L^{1/2}(0,1)$ ne possède aucune forme linéaire continue non nulle entraîne que cet espace ne possède aucun convexe ouvert non vide, à l'exclusion de lui-même.

Preuve du Théorème 3.1. K étant compact et C étant fermé et disjoint de K, on a :

$$d = \operatorname{dist}(K,C) = \inf_{y\in K}\operatorname{dist}(y,C) > 0.$$

Si l'on pose :

$$\Omega = \{x \in E\,;\ \operatorname{dist}(x,K) < d/2\}\,,$$

alors Ω est convexe (car K l'est : $\Omega = K + \overset{\circ}{B}(0, d/2)$), ouvert, non vide (il contient K), et disjoint de C. Soit φ la forme linéaire continue non nulle donnée par la Proposition 3.3. On a :

$$\begin{aligned} y \in K \text{ et } \|z\| < 1 &\Longrightarrow \quad y + \varepsilon(d/2)z \in \Omega \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi(y) = \varphi\big[y + \varepsilon(d/2)z\big] - \varepsilon(d/2)\varphi(z) \geqslant I - \varepsilon(d/2)\varphi(z) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi(y) \geqslant I + (d/2)|\varphi(z)|\,; \end{aligned}$$

donc, pour tout $y \in K$, on a, en prenant la borne supérieure pour tous les z de norme < 1 :

$$\varphi(y) \geqslant I + (d/2)\|\varphi\|.$$

Alors :

$$\inf_{y \in K} \varphi(y) \geqslant I + (d/2)\|\varphi\| > I\,,$$

puisque φ n'est pas nulle. Cela donne le résultat puisque $I \geqslant S$. $\square$

Preuve de la Proposition 3.3. Fixons $x_0 \in C$ et $y_0 \in \Omega$, et posons :

$$\Gamma = (C - x_0) - (\Omega - y_0)\,,$$

c'est-à-dire que $\Gamma = \{(x - x_0) - (y - y_0)\,;\ x \in C \text{ et } y \in \Omega\}$). C'est un convexe, et il est ouvert :

$$\Gamma = \bigcup_{x \in C} (-\Omega + y_0 - x_0 + x).$$

De plus $0 \in \Gamma$.

Utilisons alors le lemme suivant (dont la preuve est laissée en exercice).

Lemme 3.4 *Soit E un espace vectoriel topologique, et soit Γ une partie de E convexe ouverte et contenant 0. Si l'on pose :*

$$p_\Gamma(x) = \inf\{t > 0\,;\ x \in t\Gamma\}\,,$$

alors p_Γ est une sous-norme sur E, appelée la jauge*, ou* fonctionnelle de Minkowski*, de Γ. De plus :*

a) $\Gamma = \{x \in E\,;\ p_\Gamma(x) < 1\}$ *;*
b) p_Γ *est continue.*

On notera que $p_\Gamma(x) < +\infty$ car, Γ étant un voisinage de 0, on a $(1/\lambda)x \in \Gamma$ pour λ assez grand ; d'autre part, la condition *b*) vient de ce que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon\Gamma = p_\Gamma^{-1}([0, \varepsilon[)$, qui donne la continuité de p_γ en 0, d'où la continuité partout puisque $|p_\Gamma(x) - p_\Gamma(y)| \leqslant p_\Gamma(x - y)$.

Ecrivons maintenant $z_0 = y_0 - x_0$, et considérons le sous-espace vectoriel :

$$G = \mathbb{R}\, z_0$$

et la forme linéaire ψ sur G définie par :

$$\psi(tz_0) = t\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors $z_0 \notin \Gamma$: comme $z_0 = y_0 - x_0$, si l'on avait $z_0 = (x - x_0) - (y - y_0)$ avec $x \in C$ et $y \in \Omega$, on aurait $x = y$, et C et Ω ne seraient pas disjoints. Par conséquent :

$$p_\Gamma(z_0) \geqslant 1.$$

Il en résulte que l'on a :

$$\begin{cases} \text{pour } t > 0 \ : & \psi(tz_0) = t \leqslant t\, p_\Gamma(z_0) = p_\Gamma(tz_0)\,, \\ \text{pour } t \leqslant 0 \ : & \psi(tz_0) = t \leqslant 0 \leqslant p_\Gamma(tz_0)\,. \end{cases}$$

On peut alors appliquer le Théorème 1.3 : il existe une forme linéaire $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ prolongeant ψ et vérifiant :

$$\varphi(z) \leqslant p_\Gamma(z)\,, \quad \forall z \in E. \tag{1}$$

En particulier :

$$z \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad p_\Gamma(z) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) < 1.$$

Alors, pour tout $x \in C$ et tout $y \in \Omega$, on a, puisque $z = x - y + z_0 \in \Gamma$ et puisque $\varphi(z_0) = \psi(z_0) = 1$:

$$\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z_0) = \varphi(x - y + z_0) < 1,$$

et donc :

$$\varphi(x) < \varphi(y).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que φ est continue car, grâce à (1) :

$$|\varphi(z)| = \max\{\varphi(z), -\varphi(z)\} \leqslant \max\{p_\Gamma(z), p_\Gamma(-z)\} \leqslant p_\Gamma(z) + p_\Gamma(-z)\,,$$

et la continuité de p_Γ, puis finalement que φ n'est pas nulle, puisque $\varphi(z_0) = \psi(z_0) = 1$. $\square$