Théorème de Bolzano-Weierstrass :

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration :

La démonstration suivante exploite le principe de dichotomie qui consiste à découper un « objet » en deux portions, en conserver une et la découper à nouveau de sorte de générer un processus récurrent.

L'idée essentielle ici est la suivante : Lorsqu'on découpe un ensemble infini en deux sous-ensembles, nécessairement l'un d'entre eux (au moins) doit être infini. Ceci permettra d'exploiter le principe de dichotomie... Passons aux faits :

Soit (u_n) une suite réelle bornée par un certain réel $M \in \mathbb{R}^+$.

Nous allons construire par un procédé dichotomique deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que, pour tout entier naturel *n*, l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N} / a_n \leq u_k \leq b_n\}$ soit infini :

Etape initiale :

Pour $a_0 = -M, b_0 = M$ l'ensemble A_0 est infini car égal à $\mathbb{N}$.

Etape n :

Soit a_n et b_n tels que l'ensemble $A_n = \{k \in \mathbb{N} / a_n \leq u_k \leq b_n\}$ soit infini et construisons a_{n+1} et b_{n+1}. Posons $d = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et considérons :

$A^- = \{k \in \mathbb{N} / a_n \leq u_k \leq d\}$ et $A^+ = \{k \in \mathbb{N} / d \leq u_k \leq b_n\}$.

On a $A_n = A^- \cup A^+$.

Comme A_n est infini, au moins l'un des deux ensembles A^- ou A^+ doit être infini.

Si A^+ est infini, on pose $a_{n+1} = d$ et $b_{n+1} = b_n$.

Sinon, A^- est nécessairement infini et on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = d$.

Dans les deux cas l'ensemble $A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} / a_{n+1} \leq u_k \leq b_{n+1}\}$ est infini.

De plus dans les deux cas $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

Montrons qu'alors les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Par récurrence, sachant $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$, on obtient $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b-a)$.

On en déduit que $b_n - a_n \to 0$, il ne reste plus qu'à étudier les monotonies de (a_n) et (b_n).

A l'étape n, sachant que $b_n - a_n \geq 0$ on a $a_n \leq d = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$.

Par suite que a_{n+1} soit égale à a_n ou à d on a $a_{n+1} \geq a_n$.

De même, que b_{n+1} soit égale à d ou à b_n on a $b_{n+1} \leq b_n$.

Ainsi (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

Finalement les suites (a_n) et (b_n) sont bien adjacentes, elles convergent donc vers une même limite *c*.

De plus on a la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \{k \in \mathbb{N} / a_n \leq u_k \leq b_n\}$ est un ensemble infini.

Nous allons maintenant pouvoir construire une suite extraite de (u_n) qui soit convergente :

Définissons par récurrence, une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la manière suivante :

On pose $\varphi(0) = 0$, puis lorsque $\varphi(n)$ est défini, on pose $\varphi(n+1) = \min\left(A_{n+1} \setminus \{0,1,2,...,\varphi(n)\}\right)$.

Comme l'ensemble A_{n+1} est infini, l'ensemble $A_{n+1} \setminus \{0,1,2,...,\varphi(n)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et par suite, elle admet bien un plus petit élément.

Par construction on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n)$. L'application φ est donc strictement croissante.

Considérons maintenant la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$.

Par construction de φ, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \in A_n$ c'est à dire $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$.

Comme (a_n) et (b_n) convergent vers c, il en est de même de $(u_{\varphi(n)})$.

Finalement, nous avons extrait de la suite (u_n) une sous-suite convergente.