

Vers les dB

1° partie

Les Logarithmes

Jean-Claude BODOT - (JCB)

Version 1.07 du 04/02/2011

L'emploi des logarithmes, dans le domaine de l'audio, est principalement motivé par l'utilisation des dB. Ces derniers sont associés à une étude remarquable d'un médecin du 19° siècle, Fechner (1811-1867), Il est l'inventeur de la psycho physique. Il a énoncé cette loi qui porte son nom.

La sensation varie comme le logarithme de l'excitation.

L'objet de cette 1° partie est de définir les règles et relations permettant la maîtrise des logarithmes. Malgré quelques rappels des notions nécessaires, le plein accès aux logarithmes nécessite un pré-acquis en algèbre élémentaire.

Ce texte, peut nécessiter quelques heures de travail personnel, si sa lecture est entreprise par un novice. Se voulant orienté vers une utilisation pratique raisonnée, vous trouverez quelques exemples d'application et astuces d'emploi.

1 - Une manière d'aborder les logarithmes :

Si x , exprime un nombre a élevé à la puissance y , il est noté $x = a^y$

Ce qui signifie qu'il faut y fois multiplier a par lui même pour obtenir x .

$x = a \cdot a \cdot a \dots a$ relation dans laquelle le nombre de a correspond à y

Le point situé entre chaque terme correspond à une multiplication. Les trois points ... à une extension des termes

Sa lecture réciproque est y , est le logarithme de base a , de x .

Il est noté $y = \log_a(x)$

Exemples:

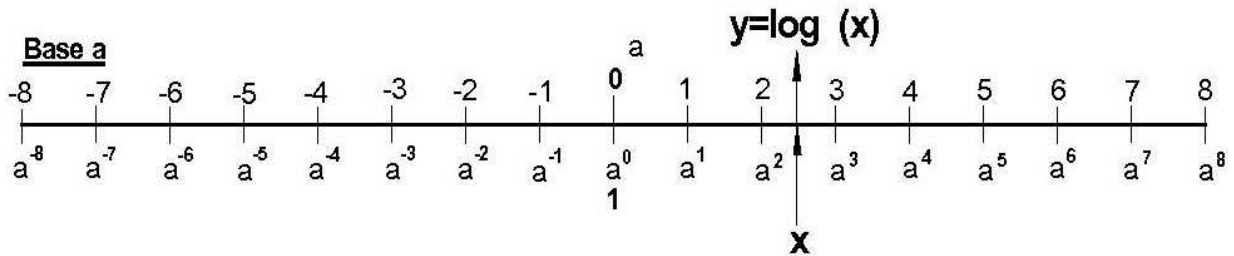
$x = 10^3 = 1000$ implique (\Rightarrow), en base 10, le logarithme de 1000 est $y = \log_{10}(1000) = 3$

$x = 2^5 = 32 \Rightarrow$, en base 2, le logarithme de 32 est $y = \log_2(32) = 5$

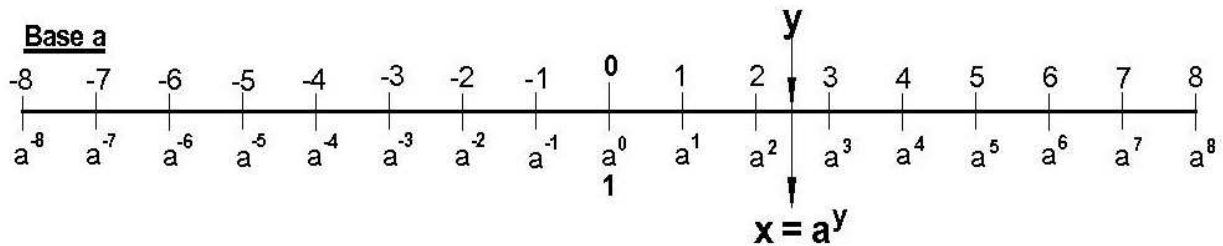
Cela peut être représenté par deux lignes confondues sur lesquelles sont apposées des repères coïncidant à des valeurs réciproques.

Dans les figures qui suivent, les repères de la ligne du haut suivent une progression arithmétique (Annexe - A) et, les repères de celle du bas une progression géométrique (Annexe - B).

Cette première figure montre, en suivant le sens des flèches, que l'on peut définir la valeur de y à partir de celle de x . Elle permet de visualiser la correspondance de x et de son logarithme y



Cette même représentation permet de définir x , à partir de y . Elle permet de visualiser x à partir de y



2 - Bases usuelles

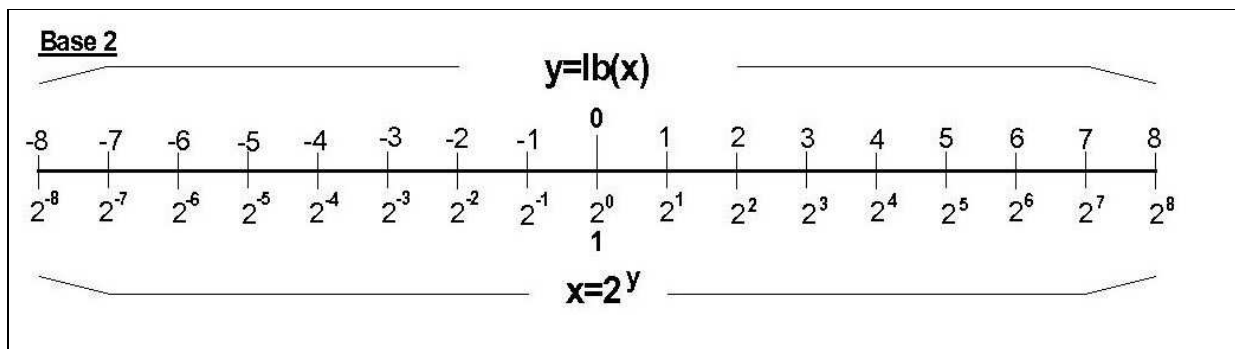
2-1 La base 2 ou base binaire:

Elle est généralement notée $\log_2(x)$ ou plus simplement $\text{lb}(x)$ ce qui conduit à

$$y = \text{lb}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^y$$

(Le symbole \Leftrightarrow correspond à l'implication réciproque des deux formes d'expressions)

Qu'il est possible de rapprocher pour des valeurs faible n'excédant pas à ce graphique

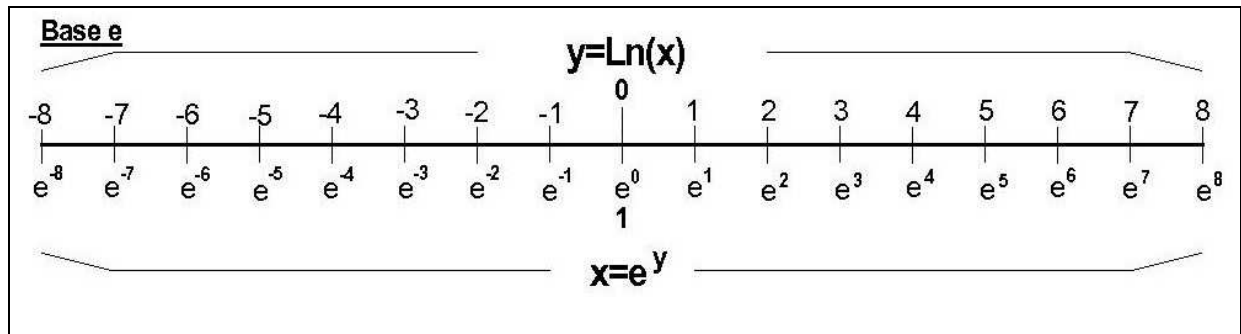


2-2 La base e ou népérienne:

La base utilisée est $e=2,718\ 281 \dots$ appelé nombre de Néper ou nombre d'Euler en hommage à John Napier(1550-1617) et Leonhard Euler(1707-1783) pour leurs travaux.

On l'écrit **Log(x)**, **Ln(x)** ou **ln(x)**

De ce qui précède $y = \text{Log}(x) = \text{Ln}(x) = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y = \text{exp}(y) = \text{Exp}(y)$

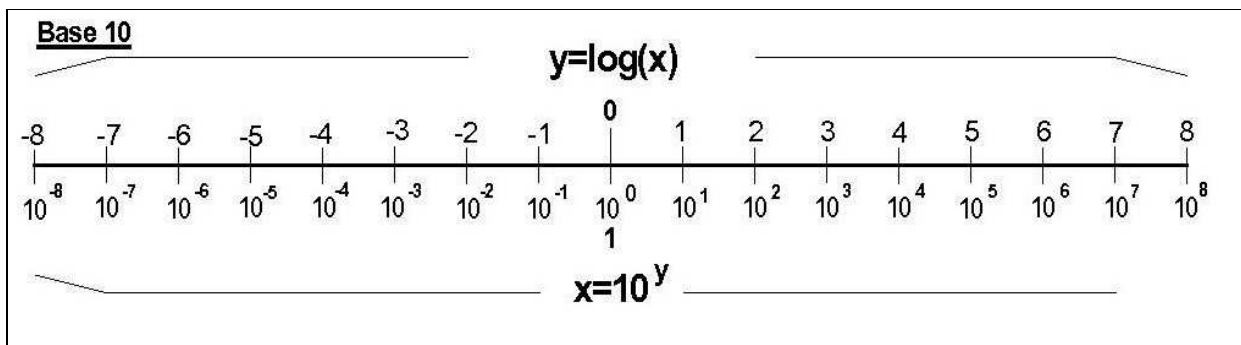


2-3 La base 10 ou base décimale: Elle est la plus utilisée en audio.

De tels logarithmes sont appelés **logarithmes décimaux**, **logarithmes vulgaires** ou **logarithmes de Briggs**. Henry Briggs (1561-1630) est le co-inventeur, avec son ami John Napier (En français Néper), des logarithmes décimaux.

Un logarithme décimal s'écrit généralement **log(x)** ou parfois **lg(x)**.

Il en découle que $y = \text{log}(x) = \text{lg}(x) \Leftrightarrow x = 10^y$



3 - Petite intrusion dans les puissances (au sens mathématiques)

Pour toute valeur de x , il est possible d'utiliser les règles d'emploi des puissances.

$$1/a = 1/a^1 = a^{-1}$$

$$1/a^x = (1/a) \cdot (1/a) \cdot (1/a) \dots (1/a); (1/a) \text{ x fois multiplié par lui-même, } \Rightarrow$$

$$1/a^x = (a^{-1})^x = a^{-x}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$$

$$a^n / a^m = a^n \cdot a^{-m} = a^{(n-m)}$$

dans laquelle on peut remarquer que, si $m = n$:

$$a^n / a^m = a^n / a^n = a^m / a^m = 1.$$

qui correspond à

$$a^{(n-m)} = a^{(n-n)} = a^{(m-m)} = a^0 = 1.$$

qui permet d'affirmer que: **tout nombre élevé à la puissance zéro est égal à 1**

$$(a^n)^m = a^{(m \cdot n)}$$

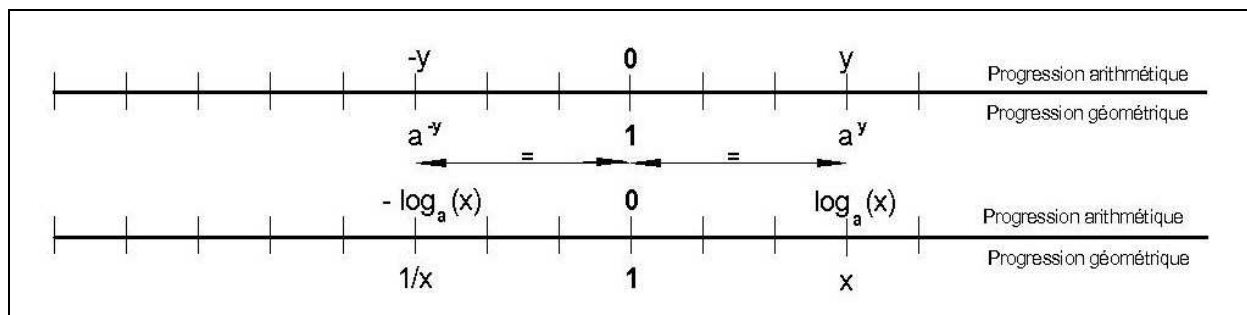
$$(a^n)^{-m} = a^{(n/m)} \text{ ou } (a^{-n})^m = a^{(m/n)}$$

$$(a^{-n})^{-m} = a^{(m \cdot n)}$$

3-1 Conséquences sur les logarithmes

$$\begin{aligned} \log_a(1) &= \log_a(a^0) = 0 \\ \log_a(a) &= \log_a(a^1) = 1 \\ \log_a a^x &= x \\ \log_a(1/a) &= \log_a(a^{-1}) = -1 \\ \log_a(1/a^x) &= \log_a a^{-x} = -x \\ \log_a(a^n \cdot a^m) &= \log_a a^{(n+m)} = n + m \\ \log_a(a^n/a^m) &= \log_a a^{(n-m)} = n - m \\ \log_a((a^n)^m) &= \log_a a^{(n \cdot m)} = n \cdot m \end{aligned}$$

3-2 Remarque graphique sur $y = \log_a(a^x)$ et $y = \log_a(1/a^x)$



les points images de deux inverses x et $1/x$ de la progression géométriques sont opposés y et $-y$ dans la progression arithmétique. Ils sont équidistants de l'origine $y_{(1)} = \log_a(1) = 0$

4 - Domaine d'utilisation et signes résultants

Un logarithme, quelle que soit sa base, n'est défini que pour les nombres strictement positifs ($x > 0$)

De ce qui précède il est possible de se rendre compte que:

- le logarithme d'un nombre supérieur à 1 est positif
- le logarithme d'un nombre supérieur à 0 et inférieur à 1, est négatif.

5 - Opérations sur les logarithmes

Quelle que soit la base employée, pourvu que chacun des termes appartienne à une base unique

5 - 1 **Logarithme d'un produit** $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$

5 - 2 **Logarithme d'un rapport** $\log(u/v) = \log(u \cdot v^{-1}) = \log u - \log v$

5 - 3 **Logarithme d'un inverse** $\log(1/u) = \log u^{-1}$, de la forme $\log(u^n)$ avec $n=-1$.

Ce qui revient à écrire $\log(1/u) = -\log(u)$

5 - 4 **Logarithme d'une puissance** $\log(u^n) = \log(u \cdot u \cdot u \dots u \cdot u) = \log(u) + \log(u) + \dots + \log(u) = n \text{ fois } \log(u)$

si, $n = a/b$, alors $\log u^{(a/b)} = n \cdot \log u = (a/b) \cdot \log(u)$

5 - 5 **Logarithme d'une puissance de puissance** $\log((u^n)^m)$

C'est le log de m fois n fois u soit le logarithme de m.n fois u

$$\log((u^n)^m) = \log(u^{(n \cdot m)}) = m \cdot n \cdot \log(u)$$

5 - 6 changement de base.

En prenant d pour base de départ et a pour base d'arrivée.

de l'égalité $k \cdot \log_d(u) = \log_a(u)$ il est déduit: $k = \log_d(u) / \log_a(u)$

Exemple:

Pour passer d'un log en base 2 à un log en base 10. Posons u égal à un nombre supérieur à 1, par exemple $u=2$ parce que par exemple, il correspond à la base des logarithmes du dénominateur et facilitera la conversion

$$k = \log_{10}(2) / \log_2(2) = 0,301 / 1 = 0,301$$

Ainsi $0,301 \cdot \log_2(u) = \log_{10}(u)$ ou $\log_2(u) = \log_{10}(u) / 0,301 = 3,322 \cdot \log_{10}(u)$

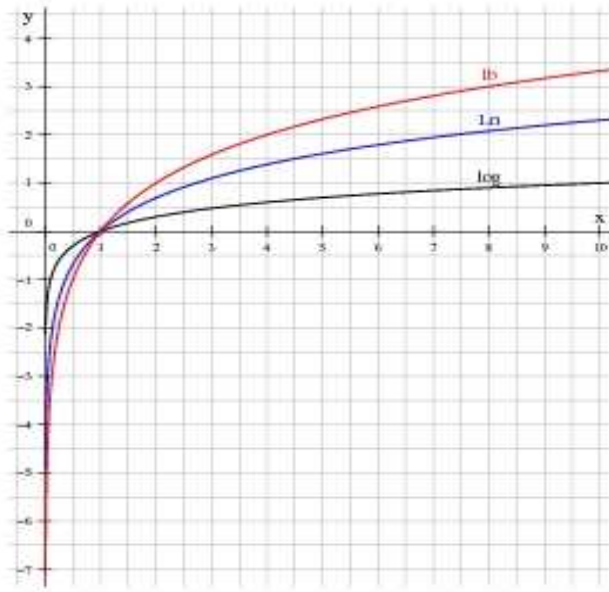
6 - La fonction logarithme et sa réciproque:

Rien n'exclut de considérer que x est une variable. Dans ce cas y évoluera en fonction des valeurs discrètes de x

On peut écrire cette fonction $y(x) = \log_a(x)$,

Le graphisme suivant traduit cette fonction, pour les bases 2 (lb), e (Ln) et 10 (log)

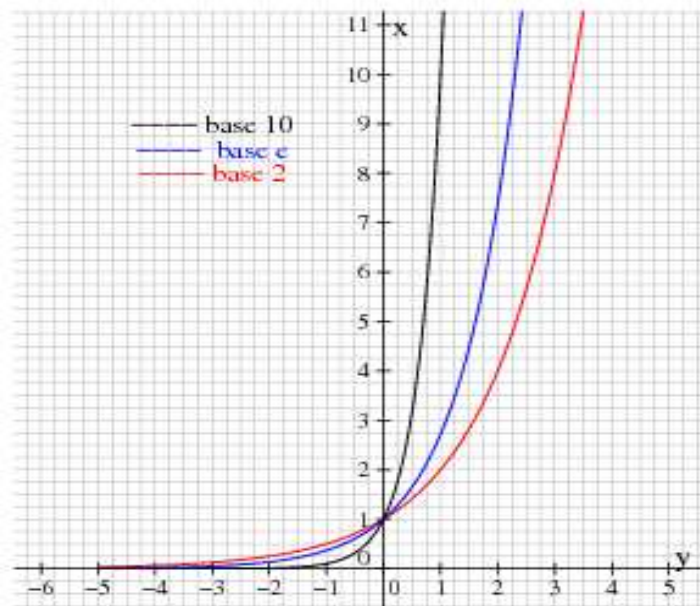
la variable x est située sur l'axe des abscisses (l'axe horizontal) et la résultante y sur l'axe des ordonnées (l'axe vertical)



Sa fonction réciproque est la fonction exponentielle : $x(y) = a^y$

A toute valeur particulière de y correspond la base (une valeur constante) élevée à la puissance y

y est devenue la variable et se situe, sur l'axe des abscisses. Les résultats $x(y)$ de l'exponentielle se situe sur l'axe des ordonnées (affectation des axes peu ordinaire, mais nécessaire vis à vis des relations traitées)



7 - Exemples

7-1 Décharge d'un condensateur dans une résistance

- Que se passe-t-il lors de la décharge ?

Un condensateur de valeur C (en Farad) est préalablement chargé de telle manière qu'apparaisse entre ses bornes une tension U_0 . A un temps t_0 , est appliquée une résistance de valeur R (en Ohm).

Sur un tel sujet la littérature spécialisée nous apprend que le produit des valeurs de C et R correspond à une constante de temps $\tau = C.R$ (en secondes).

Elle nous apprend également que la tension u aux bornes de C chute en suivant la loi

$$u = U_0 \cdot e^{-(t-t_0)/C.R}$$

que l'on peut simplifier en convenant que t_0 est l'origine de l'action soit le temps de départ de la décharge. Cela peut être identifié à la remise à 0 d'un chronomètre et la prise en compte du seul temps écoulé t après sa remise en marche au temps t_0 .

Cela permet de simplifier l'équation de décharge de C qui devient

$$u = U_0 \cdot e^{-t/C.R} = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

La variable étant le temps, elle peut s'écrire aussi $u_{(t)} = U_0 \cdot e^{-t/C.R}$

La première question, sans doute la plus simple que l'on peut se poser est de connaître la valeur de $u_{(t)}$ lorsque le temps de décharge est égal à τ soit au temps $t = \tau = C.R$.

La précédente équation devient $u_{(t)} = U_0 \cdot e^{-1} = U_0/e = U_0/2,71828$ ce qui correspond à un rapport

$$u_{(t)}/U_0 = e^{-1} = 1/e$$

pour un rapport autre, il peut être intéressant de connaître le temps nécessaire pour l'atteindre.

En partant de $u_{(t)} = U_0 \cdot e^{-t/C.R} \Rightarrow u_{(t)}/U_0 = e^{-t/C.R} \Rightarrow$

$$\ln(u_{(t)}/U_0) = \ln(e^{-t/C.R}) \Rightarrow \ln(u_{(t)}/U_0) = (-t/C.R) \cdot \ln(e)$$

Or, $\ln(e) = 1 \Rightarrow \ln(u_{(t)}/U_0) = -t/C.R$ et $t = -C.R \cdot \ln(u_{(t)}/U_0) = -\tau \cdot \ln(u_{(t)}/U_0)$

Au bout d'un temps t supérieur à 0, le rapport entre $u_{(t)}$ et U_0 est inférieur à 1. Son logarithme est négatif. La règle des signes nous apprend que la multiplication de deux signes identiques (+).(+) ou (-).(-) donne un signe positif. Ce qui fait que le temps calculé est positif.

- **Application:** Si $C=100\mu F$ est préalablement chargé pour faire apparaître une tension de 10v à ses bornes, et que la résistance utilisée pour sa décharge est $R=10k\Omega$

Quel temps de décharge faut-il, pour que le condensateur voit entre ses bornes une tension de 1v ?

- valeur des composants C et R ramenés à leur unité

Sachant que $1k\Omega = 1000\Omega = 10^3\Omega$, la valeur de calculs de $R=10 \cdot 10^3 = 10^1 \cdot 10^3 = 10^{(1+3)} = 10^4\Omega$

Il en va de même pour C dont le $\mu F = 10^{-6}F \Rightarrow C=100 \cdot 10^{-6} = 10^2 \cdot 10^{-6} = 10^{(2-4)} = 10^{-4}F$

- **Il en découle** la constante de temps $\tau = C.R = 10^4 \cdot 10^{-4} = 10^{(4-4)} = 10^0 = 1s$

Rapprochées, des termes des formules, les tensions: $U_0=10v$ et $u_{(t)}=1v$

En exploitant la formule $t = -\tau \cdot \ln(u_{(t)}/U_0) \Rightarrow t = -1 \cdot \ln(1/10) = -1 \cdot [\ln(1) - \ln(10)]$

Or, $\ln(1)=0 \Rightarrow t = (-1) \cdot (-\ln(10)) = \ln(10) = 2.3s$

Remarque: Cette valeur correspond à 2.3 fois la constante de temps

7-2 Détermination d'une pression acoustique à partir d'un SPL (Sound Pressure Level)

- **Petite introduction:** Un niveau, délivré par une source sonore placée à 1m (ou dont le niveau est rapporté à cette distance) de l'auditeur est défini par la relation

$$SPL = 20 \cdot \log(P_s/P_0)$$

Cette équation utilise les logarithmes décimaux.

Le **SPL** est le niveau sonore exprimé en dB

P_s est la pression acoustique, (exprimée en Pascal) engendrée par la source et constatée à 1m de l'auditeur.

P_0 est celle correspondant à notre seuil d'audition (grandeur psycho acoustique) Elle est égale à $2 \cdot 10^{-5} Pa$

L'objectif est de trouver la relation pour définir la pression de la source engendrant un SPL donné

La relation peut s'écrire $SPL/20 = \log(P_s/P_0)$

Qu'il est possible de traduire en $10^{SPL/20} = 10^{\log(P_s/P_0)} = P_s/P_0 \Rightarrow P_s = P_0 \cdot 10^{SPL/20}$

La relation $10^{\log(P_s/P_0)} = P_s/P_0$, peut surprendre mais, si l'on considère par exemple que $\log(2)=0,301...$

on constate assez vite que $10^{0,301...}=2$, autrement dit $10^{\log(2)}=2$ qu'il est possible de généraliser sans aucune crainte, dans la mesure où cette formulation est la conséquence de la réciprocity entre la fonction exponentielle, de base donnée, et le logarithme correspondant de même base.

Application : A quelle pression acoustique correspond un SPL de 100dB ?

En remplaçant les termes SPL et P_0 par leur valeur dans la formule $P_s = P_0 \cdot 10^{SPL/20}$,

on obtient $P_s = 2.10^{-5} \cdot 10^{100/20} = 2.10^{-5} \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^{(5-5)} = 2.10^0 = 2.1 = 2 \text{ Pa}$

8- Quelques astuces pour une appréciation rapide des logarithmes décimaux

8-1 Les principaux logarithmes décimaux à connaître

$$\log(1) = 0$$

$$\log(2) = 0,301 \text{ parfois réduit à } 0,3$$

$$\log(3) = 0,477$$

$$\log(7) = 0,845$$

$$\log(10) = 1$$

8-2 Calcul des logarithmes manquants

Pour les définir, il suffit de les décomposer en produit de chiffre dont on connaît le log, et utiliser les formules de conversion

$$\log(4) = \log(2.2) = \log(2^2) = 2 \cdot \log(2) = 0,602$$

$$\log(5) = \log(10/2) = \log(10) - \log(2) = 0,699 \text{ ou souvent admis } 0,7$$

$$\log(6) = \log(2.3) = \log(2) + \log(3) = 0,301 + 0,477 = 0,778, \text{ souvent arrondi à } 0,78$$

$$\log(8) = \log(2.2.2) = \log(2^3) = 3 \cdot \log(2) = 0,903 \text{ généralement arrondi à } 0,9$$

$$\log(9) = \log(3.3) = \log(3^2) = 2 \cdot \log(3) = 0,954 \text{ souvent arrondi à } 0,95$$

Ce dernier montre que l'arrondi de $\log(9) = (\log(10) + \text{l'arrondi de } \log(8))/2$

C'est par cette méthode que nous pouvons apprécier mentalement les logarithmes des nombres premiers supérieurs à 10.

Il s'agit d'obtenir la moyenne arithmétique des logs des 2 nombres, celui qui précède et celui qui suit le nombre dont on veut déterminer le logarithme. $\log(n) = (\log(n-1) + \log(n+1))/2$ avec $n > 10$

Par exemple, $\log(11)$ dont la valeur réelle est 1,04139..... est estimé par cette méthode à:

$$\log(11) = (\log(12) + \log(10))/2 = (\log(2.2.3) + 1)/2 = (2 \cdot \log(2) + \log(3) + 1)/2 = 1,0395.$$

L'erreur sur le résultat est de 0,00189. Qui représente un taux d'erreur de 0,18%

Vu sous l'angle de la perception d'une pression, l'écart entre le calcul approché et le calcul réel procure un écart de SPL de:

$$20 \cdot \log(1,0395/1,04139) = -0,016 \text{ dB.}$$

Vis à vis de la valeur du seuil différentiel de sonie de 0,4dB, qui renseigne sur l'écart de niveaux qui engendre une différence de perception audible, l'écart constaté est négligeable.

Ce qui tend à montrer que l'application de cette méthode de calcul est valide et que ses conséquences sont imperceptibles.

8-3 Les logarithmes et la curiosité: Le dernier calcul, met la puce à l'oreille sur la possibilité de définir la tolérance de niveaux sonores entre les canaux d'une chaîne reproductrice. Ceci, afin de guider, à ce que le déséquilibre possible, entre eux, reste imperceptible. Cela peut aider au choix des composants de chacun des étage de la chaîne.

A partir du seuil différentiel de sonie $S=0,4\text{dB}$, il est possible de définir un rapport R_+ qui exprime la limite de déséquilibre possible

$$\text{En posant } S=20 \cdot \log(R_+) \Rightarrow R_+ = 10^{S/20} = 10^{0,4/20} = 10^{0,02} = 1,047$$

En considérant $1,047 = (1/1) + (0,047/1)$ la tolérance possible est de 0,047/1 soit 4,7%

Leur étude est limitée aux éléments de compréhension des logarithmes..

A- Les progressions arithmétiques

A-1- Exemples

- 1, 6, 11, 16,...
- -4, -2, 0, 2, 4, 6,...
- -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,

Sont des progressions arithmétiques

A-1- Définition d'une progression arithmétique

Dans le premier exemple on voit que:

Le second terme $t_2 = 6$ est égal au premier terme t_1 majoré de 5 $\Rightarrow t_2 = t_1 + 5$

Le troisième terme t_3 qui est égal au second terme $t_2 + 5 \Rightarrow t_3 = t_2 + 5$

Il en va de même du quatrième terme vis à vis du troisième $\Rightarrow t_4 = t_3 + 5$

A partir du second terme chacun des termes est donc espacé de 5 par rapport à celui qui le précède.

Cette valeur constante qui distance chacun des termes à partir du second, ici 5, est appelée la raison r de la progression.

Dans le second exemple, le premier terme t_1 vaut -4 et la raison $r = 2$

Dans le troisième exemple $t_1 = -2$ et $r = 1$

Vu ainsi:

$$t_2 = t_1 + r$$

$$t_3 = t_2 + r = t_1 + r + r = t_1 + 2.r,$$

$$t_4 = t_3 + r = t_2 + 2.r = t_1 + 3.r$$

De ce qui précède on peut voir que le terme de rang n , soit t_n prend la valeur :

$$t_n = t_1 + (n-1) . r$$

Dans le cadre de l'étude des logarithmes, la progression arithmétique utilisée est de raison $r = 1$

B- Les progressions géométriques

B-1 Exemples

- 1, 2, 4, 8, 16,....
- 2, -4, 8, -16, 32
- 1, 1/2, 1/4, 1/8,

B-2 Définition d'une progression géométrique

Dans le premier exemple on voit que:

Le second terme t_2 est égal au premier terme t_1 multiplié par 2 $\Rightarrow t_2 = t_1 . 2$

Le troisième terme t_3 qui est égal au second terme $t_2 . 2 \Rightarrow t_3 = t_2 . 2$

Il en va de même du quatrième terme vis à vis du troisième $\Rightarrow t_4 = t_3 . 2$

Chacun des termes correspond au précédent multiplié par un même nombre . Ce nombre porte le nom de raison de la progression. Il est généralement noté q . Dans cet exemple $q = 2$.

Vu ainsi:

$$t_2 = t_1 . q$$

$$t_3 = t_2 . q = t_1 . q . q = t_1 . q^2,$$

$$t_4 = t_3 . q = t_2 . q^2 = t_1 . q^3$$

De ce qui précède on peut voir que le terme de rang n , soit t_n prend la valeur : $t_n = t_1 . q^{(n-1)}$

Dans le deuxième exemple, le premier terme $t_1=2$ et la raison est $q = -2$

Dans le troisième, le premier terme $t_1 = 1$ et $q = 1/2$

Dans le texte sur les logarithmes, les échelles utilisant des progressions géométriques, utilisent des raisons: q égales à la base des logarithmes employés .

Suivant la figure, on trouve

- $q = a$ une base quelconque permettant de généraliser, qui est vite remplacée par:
- $q = 2$, la base des logarithmes binaires, ou
- $q = e$, la base des logarithmes népériens, ou
- $q = 10$, la base des logarithmes décimaux.