De la puce à l'oreille

- Jean-Claude BODOT -

Introduction au filtrage

chapitre 2

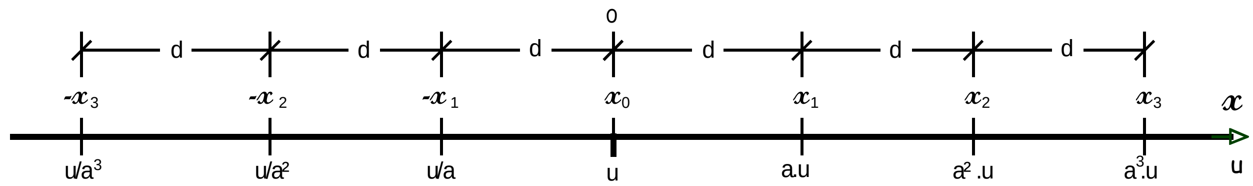
2- Diagrammes asymptotiques

Ils permettent d'évaluer les évolution de, la courbe de réponse et de la courbe de phase, sur un plan.
Dans ce plan, les asymptotes sont des droites, horizontales, verticales ou obliques qui avoisinent la courbe si son évolution est régulière, ou l'intercepte lors d'une inflexion.

2-1 Le diagramme de Bode

- **Axes du plan de Bode**

Nous y rencontrons deux types de graduation des axes, pour amorcer leur définition je vous propose la figure suivante:



On y reconnaît :

- une progression linéaire des repères en x de raison d , et
- une progression géométrique des repères **u** de raison **a**

Les deux variables x et u sont interdépendantes.

Autrement dit à toute valeur de **u** lui correspond une valeur de x et réciproquement. x et u forment un couple.

En partant de $x_0 = 0$ pour laquelle la variable repère est u.

Dans le sens positif :

A la position x_1 , distant de d $=x_1 - x_0$ de x_0 correspond un autre répère de la variable **a**.u

A la position x_2, distant de x_1 de d soit 2.d de x_0 correspond un repère $\mathbf{a}^2.u$

A la position x_3, distant de x_2 de d soit 3.d de x_0 correspond un repère $\mathbf{a}^3.u$

etc....

Dans le sens négatif :

A la position $-x_1$, distant de $-x_1 - x_0=-d$ de x_0 correspond un autre répère de la variable $u/\mathbf{a}.=u.\mathbf{a}^{-1}$

A la position $-x_2$, distant de $-x_1$ de $-x_2 - x_1=-d$ soit -2.d de x_0 correspond un repère $u/\mathbf{a}^2 = u/\mathbf{a}^{-2}$

A la position $-x_3$, correspond un repère $u/\mathbf{a}^3 = u/\mathbf{a}^{-3}$ distant de -3.d de x_0

A la distance d correspond une progression $\mathbf{a}^n.u/\mathbf{a}^{n-1}u = \mathbf{a}^{(n-n-1)} = \mathbf{a}$, de u

où au repère $\mathbf{a}^n.u$ de la variable u correspond le point x_n sur l'axe et

au au repère $\mathbf{a}^{n-1}u$ de cette même variable correspond le point x_{n-1}

Si l'on choisi un repère de référence de la variable u , appelons le u_{Ref} il lui correspond un point x_{Ref}.

a toute valeur de u correspondra un point x tel que

$$x - x_{Ref} = d.\log_{\mathbf{a}}(u/u_{Ref}) \qquad \text{(fii-1)}$$

La raison **a** de la progression géométrique devient tout naturellement la base du logarithme qui permet de définir l'emplacement de x sur l'axe vis à vis de la variable u choisie .

d est le facteur d'échelle du tracé.

En posant $x_{Ref}=0$ $\qquad x = d.\log_a(u/u_{Ref})$ (fii-2)

Ce qui conduit aussi à $\qquad u = u_{Ref} \cdot a^{x/d}$ (fii-3)

Remarque:

- Si $u >> u_{Ref}$ $\quad x$ est positif
- Si $u << u_{Ref}$ $\quad x = d.\log_a(u/u_{Ref}) = - d.\log_a(u_{Ref}/u)$; x est négatif
- Si $u = u_{Ref}$ $\quad x = d.\log_a(u_{Ref}/u_{Ref}) = d.\log_a(1) = 0$

C'est ces trois dernières qui permettent d'effectuer tous les types de tracé possibles sur un plan de Bode.

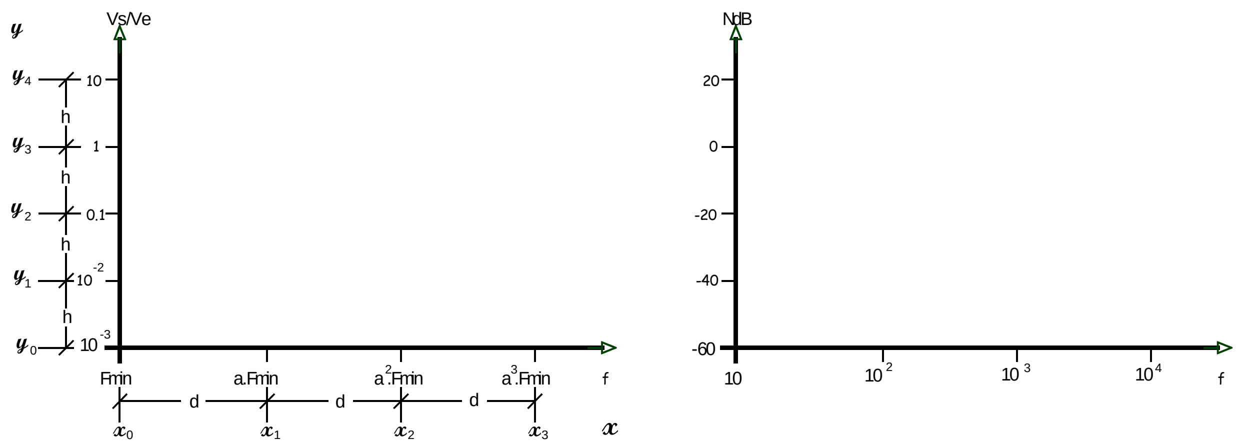
Graduer un axe revient à prendre des valeurs significatives de u , d'en calculer les valeurs de x correspondantes et de les reporter sur l'axe en les annotant.

Le diagramme de Bode comporte 2 plans.
Pour les tracer nous disposons de la fonction de transfert **T** du système analysé.

- Le premier plan traduit la courbe du gain ***G*** en fonction de la fréquence **f**, la variable de la transmittance
  Ce tracé est fréquemment appelée courbe de réponse. Ou diagramme des magnitudes
  L'axe des abcisses est celui des fréquences.
  L'axe des ordonnées est gradué en dB .
- Le second plan traduit la courbe de phase , autrement dit l'argument $\arg(\mathbf{T}_{(f)})$ de la fonction de transfert en fonction de la fréquence.
  L'axe des ordonnées est gradué en radians ou en degrés d'angle.

- **La courbe de réponse**

Soient les deux plans suivants;



Le plan de gauche est en quelque sorte le plan à traduire, le plan de droite le plan des magnitudes de Bode. C'est le plan traduit.

Les deux axes sont conformes a celui étudié .

Sur l'axe des abcisses, remplaçons

- le point u_{Ref} par le point d'abcisse de référence F_{min}
- en conservant le facteur d'échelle d,
- Imposons $x_0=0$,
- remplaçons la variable **u** par **f**, auquel il correspond un point:

$$x = d.\log_a(\mathbf{f}/F_{min}) \quad \text{puisque } x_0=0. \qquad \textbf{(fii-4)}$$

a est est choisi de telle sorte, que le rapport des fréquences repères soit significatif .

- **a**=2 l'écart entre les repères est d'un octave.
- **a**=10 l'écart entre les repères est d'une décade.

Vis à vis de **f** la progression de x est logarithmique, d'ou le nom de l'échelle de graduation de l'axe des abcisses

De ce qui précède on peut affirmer qu'à tout point d'abcisse x correspond une fréquence

$$F = F_{min} \cdot \mathbf{a}^{\,x/d} \qquad \textbf{(fii-5)}$$

Poser:

- a=10, base des logarithmes décimaux revient à écrire:

$$x = d.\log(F/F_{min}) \quad \textbf{(fii-6)}$$

et $$F = F_{min}.\,10^{x/d} \quad \textbf{(fii-7)}$$

- a=2 mène à: $$x = d.\log_2(F/F_{min}) \quad \textbf{(fii-8)}$$

  Cette dernière formule est délicate dans la mesure ou les logarithmes à base 2 n'apparaissent dans aucune table, et sur aucune calculette. Qu'à cela ne tienne, posons

$$\log_2(n) = k.\log(n), \quad \text{(fii-9)}$$

Si, n=2 $$\log_2(2) = 1 = k.\log(2), \Rightarrow k = 1/\log(2); \quad \text{(fii-10)}$$

pour n quelquonque $$\log_2(n) = \log(n)/\log(2) = 3{,}322\ \log(n) \quad \text{(fii-11)}$$

et **(fii-8)** s'écrit très concrètement $$x = 3{,}322.d.\log(F/F_{min}) \quad \textbf{(fii-12)}$$

Remarque: Vouloir qu'une fréquence F ait même abscisse x, pour a=10 et a=2 revient à prendre un facteur d'échelle égal à d pour a=10 (fii-13)

et $d_{(2)} = d.\log(2) = 0{,}301.d$ pour a=2 (fii-14)

Remarques:

- La connaissance de la fréquence maximale, et l'espace du tracé, permettent de déterminer le facteur d'échelle. Si x_M est la distance maximale de tracé et qu'elle correspondant à Fmax

$$F_{max} = F_{min}.\,\mathbf{a}^{xM/d} \quad \text{(fii-15)}$$

$$x_{max} = d.\log_a(F_{max}/F_{min}) \text{ et,} \quad \text{(fii-16)}$$

$$d = x_{max}/\log_a(F_{max}/F_{min}) \quad \text{(fii-17)}$$

- d, x et x_{max} peuvent être exprimés dans n'importe laquelle des unités qui définissent un espace, pourvu que les trois utilisent la même.
  Un tracé sur une feuille de papier nécessitera d'employer le mm, le pouce,......., alors qu'un tracé informatique utilisera le pixel comme unité d'espace.

•• **l'axe des ordonnées**

La première démarche est la même que pour l'axe des abcisses.

Il suffit d'identifier $u = V_s/V_e = |T|$, et les y aux x (fii-18)

Le facteur d'echelle d devient h pour cet axe

En prenant en compte les raisonnements précédents à toute valeur de $|T|$ correspond un point y sur l'axe à la condition d'avoir établi le couple (y_{Ref}, $|T_{ref}|$). La formule **(fii-1)** s'écrit:

$$y - y_{Ref} = h\ .\ \log_a\ (|T|/|T_{ref}|) \quad \text{(fii-19)}$$

Pour cet axe a=10; $$y - y_{Ref} = h\ .\ \log\ (|T|/|T_{ref}|) \quad \textbf{(fii-20)}$$

Or les sensations que provoque le rapport $|T|/|T_{ref}|$ est généralement traduit en dB.

Puisqu'il est à l'image d'un rapport de tensions, ou de courants, ou de toute autre unité analogue (cf:Les analogies)

et en l'appelant G, le gain, $$G = 20.\ \log\ (\ |T|/|T_{ref}|),\ \ (dB) \quad \text{(fii-21)}$$

$$G = 20.\ \log\ (\ |T|)\ -\ 20.\ \log\ (|T_{ref}|) = G = 20.\ \log\ (\ |T|)\ -\ G_0 \quad \text{(fii-22)}$$

G_0 est le gain de référence

Afin d'obtenir une analyse du module de la fonction de transfert $|T|$, Le gain de référence doit être nul $G_0 = 0$ quelle que soit la fréquence. Ce résultat est obtenu pour $|T_{ref}| = 1$

(fii-22) devient $$G = 20.\ \log\ (\ |T|), \quad \textbf{(fii-23)}$$

Vis à vis de G l'espace $$y - y_{Ref} = (h/20)\ .\ G \quad \textbf{(fii-24)}$$

Le facteur d'échelle est devenu $h_0 = h/20$. A cette distance h_0 correspond un écart de niveau de 1dB.

Cela devient un facteur d'échelle pratique.

Remarques:

- Vis à vis du module de la fonction de transfert , **(fii-20)** montre que l'échelle de l'axe des ordonnees est logarithmique. Vu ainsi, et étant donné que l'échelle des abcisses est logarithmique, le plan de bode peut être qualifié de log,log

- La transposition en dB du module de cette même transmittance, modifie l'échelle en la rendant linéaire. **(fii-24)** traduit cette linéarité. Le plan est qualifié de log,lin ou plutôt de semilog.
- A noterque dans les dénominations log,log et log,lin, le type d'échelle des abcisses précède celui des ordonnées. Ce qui est conforme à l'ordre d'écriture des coordonnées (x, y) d'un point.

♦ **Le tracé de la phase**

Son axe des abcisses est le même que pour le tracé de la courbe de réponse.
L'axe des ordonnées à une échelle linéaire et est gradué en radians ou, le plus souvent en degrés.
La conversion des radians en degrés d'angle est simple si l'on se souvient que π (rd) = 180°

$$1 \text{ rd} = 180/\pi = 57{,}2957795°. \qquad \text{(fii-24)}$$

On peut donc considérer que 1 rd est peu différent de 57,3°.
Cette valeur est exprimée en degrés décimaux, c'est la manière la plus courante et la plus pratique, pour ce que nous avons à en faire. Les marins, aviateurs, et tous les grands voyageurs l'exprimerait sous sa forme sexagésimal (base 60) soit 57° 17' 45 '' ce qui n'a aucun intérêt, mais que des inconvénients pour ce qui nous préoccupe.

♦ **Droite asymptote** ou plus simplement asymptote.

Elle correspond à une droite vers laquelle une courbe tend sans jamais l'atteindre.
Elle peut correspondre aussi à une droite qui intercepte une courbe, à un point d'inflexion, et dont la dite courbe diverge lentement de part et d'autre de ce point.
Une asymptote peut être

- horizontale,
- verticale,
- oblique croissante, on dit encore ascendante,
- oblique décroissante ou oblique descendante

♦♦ **Pente d'une asymptote**

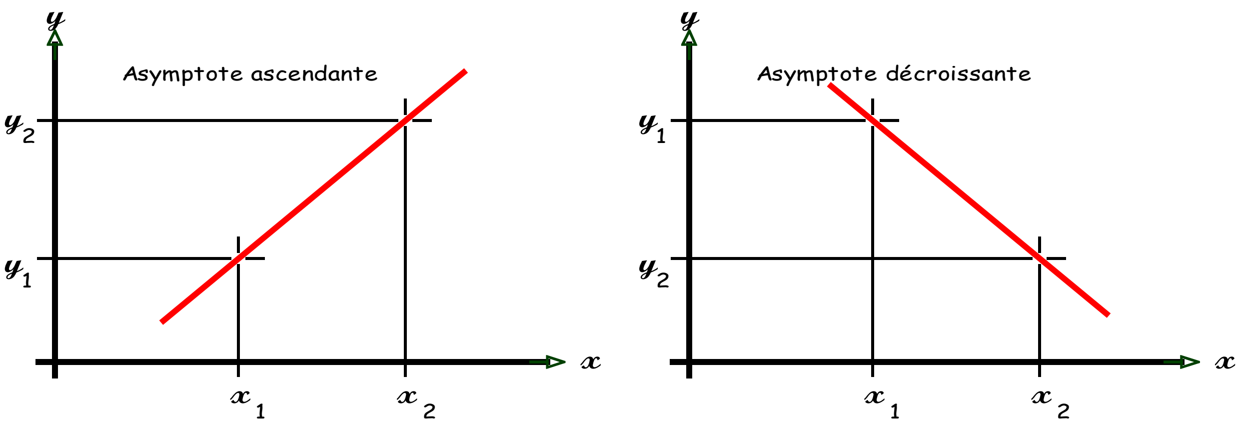
La pente d'une droite correspond, au rapport de ses variations verticales , sur les variations horizontales qui les ont engendrées.
Si et seulement si, elle passe par les points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2 , y_2)
la pente de la droite asymptote peut être définie par:

$$a = \Delta y / \Delta x = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1) \qquad \textbf{(fii-25)}$$

Si elle est horizontale $(y_2 - y_1) = 0$ => $a = 0$ **(fii-26)**

Si elle est verticale $(x_2 - x_1) = 0$ a est indéterminé et tend vers l'infini **(fii-27)**

Si elle est oblique, la figure suivante



nous permet de constater que x_2 est supérieur à x_1 dans les deux figures,

Si l'asympote est croissante y_2 est supérieur à y_1 ,la pente a est positive

Si l'asympote est décroissante y_2 est inférieur à y_1 ,la pente a est négative

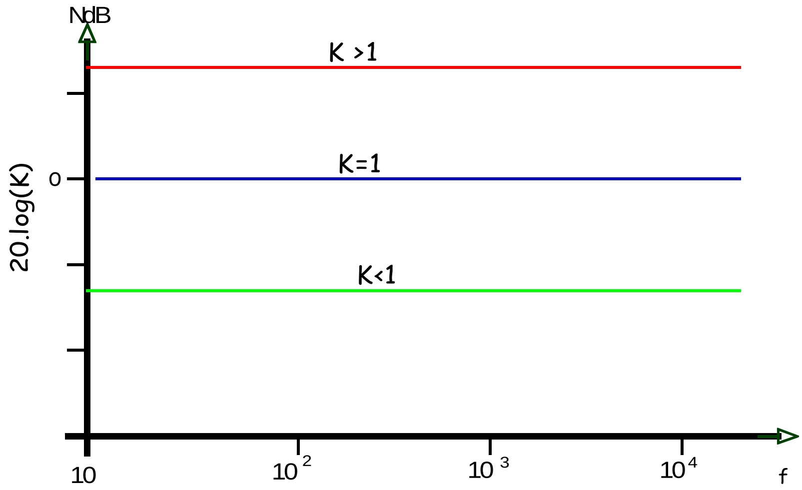
Remarque: La dérivée dy/dx de l'équation de chacune des droites aurait permis d'arriver à ce constat immédiatement.

- **asymptote de** : T= K

Son module est $|T| = K$ et le gain résultant est $G = 20.\log(K)$ **(fii-28)**

Il est indépendant de la fréquence, il ne possède aucun terme en **f**,ω,**p** ou **s**.

Son diagramme asymptotique est une droite. La figure qui suit traduit les trois cas possible K<1, K=1 et K>1



K étant totalement réel, son argument est nul.

Quoique sans importance sur ce tracé vous noterez que la fréquence minimale choisie est F_{min}=10Hz et la fréquence maximale: F_{max} > 10kHz

- **asymptote de la courbe de réponse de**: $T_{(s)} = s^n$ **(fii-29)**

n est l'orde de la transmittance

$T_{(s)}$ peut, sous entendu que la pulsation ω_0 ou la fréquence f_0 de coupure soit connue, être formulée sous la forme

$$T_{(p)} = p^n/\omega_0^n \text{ ou } T_{(\omega)} = j^n.\omega^n/\omega_0^n \text{ ou } T_{(f)} = j^n.f^n/f_0^n \text{ ou encore } T_{(X)} = j^n.X^n \quad \text{(fii-30)}$$

Dans ce cas, la variable **p** n'est pas très pratique d'emploi.

Nous choisirons la variable f , la plus concrète dans la mesure ou l'on parle plus facilement de la fréquence de coupure d'un filtre, que de sa pulsation caractéristique.

Le module de la fonction de transfert de $T_{(f)}$ ramené au module de l'expression complexe correspondante est:

$$|T_{(f)}| = [(a^2+b^2)^{1/2}] \quad \text{(fii-31)}$$

dans laquelle a=0, et $b = (f/f_0)^n$. $T_{(f)}$ est totalement imaginaire (au sens mathématique)

Ainsi $|T_{(f)}| = [(b^2)^{1/2}] = b \Rightarrow |T_{(f)}| = (f/f_0)^n$. (fii-32)

Le Gain, exprimé en dB $G = 20.\log(|T_{(f)}|) = 20.\log[(f/f_0)^n]$ (fii-33)

$$G = 20.n.\log(f/f_0) \quad \textbf{(fii-34)}$$

Remarques

- Quel que soit n, à $f = f_0 \Rightarrow f/f_0=1$, $G_{(f=0)} = 20.n.\log(1) = 0$ (fii-35)

  ce qui signifie que quel que soit l'ordre du filtre de fonction de transfert $T_{(s)} = s^n$,l'asymptote passera par le point de coordonnées (f_0,0).
- n=0 implique G =0 , ce qui ramène à tracer l'asymptote de la constante K=1 (fii-36)

♦♦ **Pente de l'asymptote**

Imaginons que la variable f soit un multiple entier de f_0 et écrivons $f = k_f . f_0$ (fii-37)

Si k_f=2, la fréquence $f = 2.f_0$. (fii-38)

Elle est à l'octave supérieur de f_0 (cf: la psychoacoustique)

à cette fréquence le gain $G_{(f=2f0)} = 20.n.\log(2.f_0/f_0) = 20.n.\log(2) = 6.n$ (fii-39)

Or à la fréquence $f = f_0$ (fii-35) indique que $G_{(f=0)} = 20.n.\log(1) = 0$

La variation de gain est $G_{(f=2.f0)}- G_{(f=0\,)}= 6.n$ (fii-40)

La pente $(G_{(f)} - G_{(f=0\,)})/\ (f/f_0) = 6.n$ dB/Octave **(fii-41)**

Nous avons à faire à une asymptote oblique ascendante dont la pente est egale, à son ordre fois 6dB par octave

Un filtre dont la fonction de transfert est $T_{(s)}= s$, donc du 1° ordre , aura une pente ascendante de 6dB/Octave.

Un filtre dont la fonction de transfert est $T_{(s)}= s^2$, donc du 2° ordre, aura une pente ascendante de 12dB/Octave

Un filtre dont la fonction de transfert est $T_{(s)}= s^3$, donc du 3° ordre, aura une pente ascendante de 18dB/Octave, etc....

Si $k_f = 10$, la fréquence $f=10.f_0$ (fii-42)

on dit que f est distante d'une décade de f_0.

à cette fréquence le gain $G_{(f\,=\,10.f0)} = 20.n.\log(10.f_0/f_0) = 20.n.\log(10) = 20.n$ (fii-43)

La variation de gain est $G_{(f\,=\,10.f0)}- G_{(f\,=\,0\,)}= 20.n$ (fii-44)

La pente $(G_{(f)} - G_{(f=0\,)})/\ (f/f_0) = 20.n$ dB/décade **(fii-45)**

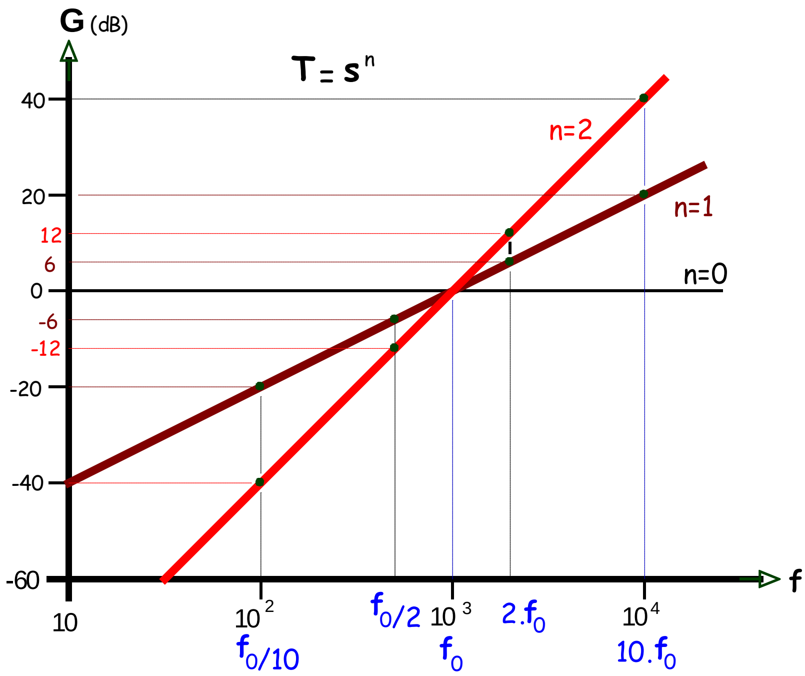
La pente est restée ascendante et egale à son ordre fois 20dB par décade

Un filtre dont la fonction de transfert est $T_{(s)}= s$, donc du 1° ordre , aura une pente ascendante de 20dB/décade.

Un filtre dont la fonction de transfert est $T_{(s)}= s^2$, donc du 2° ordre, aura une pente ascendante de 40dB/décade

Un filtre dont la fonction de transfert est $T_{(s)}= s^3$, donc du 3° ordre, aura une pente ascendante de 60dB/décade, etc....

La figure suivante résume ce texte pour n=0,1,2 et pour une fréquence caractéristique f_0 =1kHz



- **<u>asymptote de la courbe de phase de</u>**: $T_{(s)}= s^n$ **(fii-46)**

(fii-30) donne la transmittance $T_{(f)}= j^n.(f/f_0)^n$ de la variable f

En fait la variable importe peu, puisque cette variable est toujours précédée par j^n.

On en conclu que $\arg(T_{(f)}) = n.\ \pi/2$ radians **(fii-47)**

Exprimé en degrés, sachant que $\pi/2= 90°$, $\arg(T_{(f)}) = n.\ 90$ degrés **(fii-48)**

<u>Remarque importante</u>:

- En fait pour cette fonction de transfert, l'évolution de la courbe se supperpose à l'asymptote.
- L'analyse que nous venons de faire est celle de la courbe représentée par $T_{(s)}= s^n$.
- ***L'asymptote du plan des magnitudes est*** donc ***représentative d'une courbe de réponse.***
- ***L'asymptote du plan de phase est représentative d'une courbe de phase.***

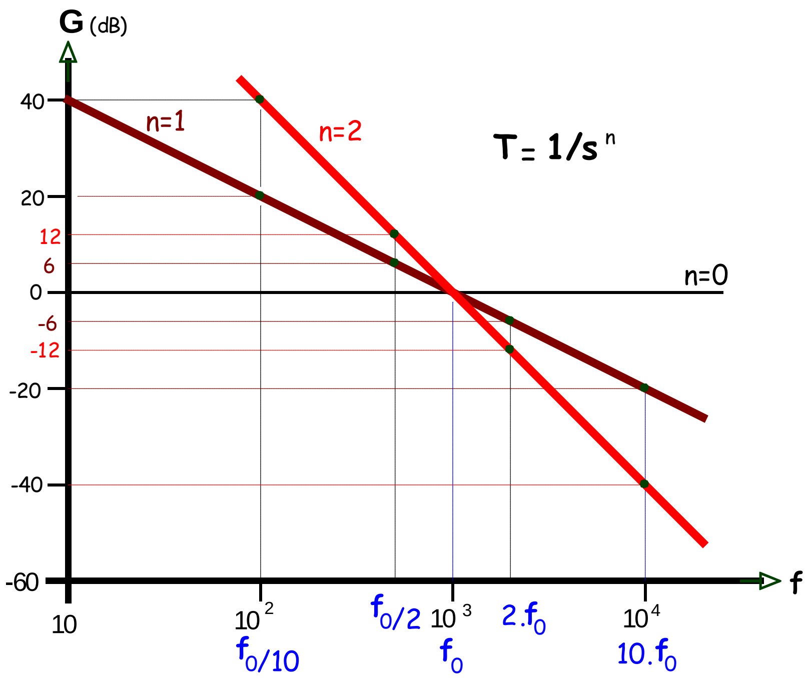
– C'est la réponse d'un différentiateur d'ordre n

♦ **asymptote de la courbe de réponse de**: $T_{(s)} = 1/s^n$ **(fii-49)**

Elle est l'inverse de $T_{(s)} = s^n$ · D'ou, en posant $T_{(s)} = 1/s^n = s^{-n}$, **(fii-50)**
en remplaçant n par -n dans les précédentes formules et en interprétant
nous pouvons conclure que

– ce filtre passe par le point $(f_0,0)$,
– sa pente est de $(G_{(f)} - G_{(f=0)})/ (f/f_0) =$ -6. n (dB/Octave) = -20.n (dB/décade). (fii-51)
Le signe – indique qu'elle est décroissante.
– $\arg(T_{(f)}) = -$ n. $\pi/2$ radians = - n. 90 degrés. (fii-52)

La figure suivante explicite ces conclusions .



C'est la réponse d'un circuit intégrateur parfait. Nous retrouverons cette équation lors de l'étude des filtres actifs

♦ **asymptotes de**: $T_{(s)} = (1+s)^n$ **(fii-53)**

♦♦ ***Courbe de réponse***

Le développement de $T_{(s)}$ mène à

$$T_{(s)} = (1+s)^n = 1 + a_1.s + a_2.s^2 + ... + a_{n-1}.s^{n-1} + a_n.s^n \quad \text{(fii-54)}$$

Dans lequel $a^n=1$ ce qui implique

$$T_{(s)} = 1 + a_1.s + a_2.s^2 + ... + a_{n-1}.s^{n-1} + s^n \quad \text{(fii-55)}$$

La recherche des asymptotes amène à considérer les limites fréquencielles de la transmittance, soit

– f qui tend vers 0,
Il suffit de poser **f**=0 pour se rendre compte que dans cette condition, tous les termes ou se trouvent la variable **s** sont nuls. Autrement dit, quel que soit l'ordre du filtre $T_{(s)}$, son asymptote $a_{1(s)}=1$
– f qui tend vers l'infini. La encore, il ne faut pas hésiter et poser **f**=infini. Dans ce cas $a_{2(s)}=s^n$

Le résultat correspond à une asymptote horizontale de gain

$$G=20.\log(a_{1(s)})=20.\log(1)=0 \quad \textbf{(fii-56)}$$

qui intercepte et donne le relais à une asymptote oblique de gain

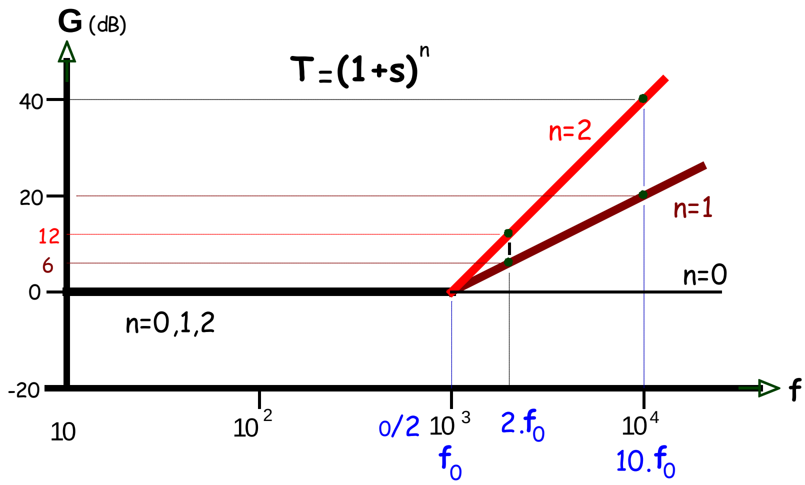
$$G=20.\log(|a_{2(s)}|) = n.20.\log(f/f_0) \quad \textbf{(fii-57)}$$

dont la pente est de n.6 dB/Octave ou n.20 dB/décade **(fii-58)**

Remarques:

- $T_{(s)} = (1+s)^n$ est une formule de réduction qui permet de trouver à coup sur et sans grands calculs les deux asymptotes majeures d'une transmittance d'ordre n.
- Afin de cerner au mieux l'évolution de la transmittance réelle, il est toujours possible de chercher d'autres asymptotes. Leur interprétation est d'autant plus délicate que n est grand. La mise en facteur en transmittances du second ordre aide énormément, nous y reviendrons lors d'applications dans les prochains chapitres.

Vous pourrez interpréter ce développement à l'aide du grapique suivant dans lequel f_0=1kHz



•• **Courbe de phase**

Lorsque f tend vers 0 $T_{(s)}=1$, l'argument est celui d'une constante.

Ce qui donne naissance à une asymptote horizontale, $arg(T_{(s)}) = 0$, qui sera tracée des fréquences, les plus basses prisent en compte, jusqu' à f_0 . Dans la zone ou $f \leqq f_0$

Lorsque f tend vers l'infini, l'argument est celui que nous avons déterminé pour $T_{(s)}=s^n$ et qui engendre une seconde asymptote horizontale qui débute à f_0 et s'arrête à la fréquence maximale analysée. Autrement formulé dans la zone des fréquences ou $f \geqq f_0$

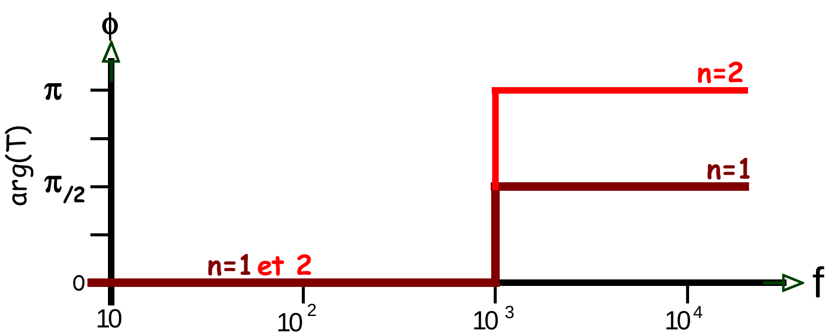
$$arg(T_{(s)}) = n.\pi/2 \text{ rd ou } arg(T_{(s)}) = n.90° \qquad \textbf{(fii-59)}$$

A la fréquence caractéristique f_0 une asymptote verticale relie les deux précédente. L'argument réel de la courbe à cete fréquence est la moyenne arithmétique entre les arguments des deux asymptotes, soit

$$arg(T_{(s)}) = n.\pi/4 \text{ rd ou } arg(T_{(s)}) = n.45° \qquad \text{(fii-60)}$$

A cette fréquence, la courbe de phase intercepte l'asymptote verticale à son point d'inflexion.
Les courbes de phase des filtres prototypes du premier chapitre le montrent assez clairement.

Les asymptote de ce type de filtre d'ordres 1 et 2, et dont la fréquence caractéristique est f_0=1kHz sont représentées ci dessous



- **asymptotes de**: $T_{(s)} = 1/(1+s)^n$ **(fii-61)**

Comme précédemment on constate que cette transmittance est l'inverse de la précédente.

De ce fait on peut l'écrire $\mathbf{T}_{(s)}= (1+\mathbf{s})^{-n}$ **(fii-62)**

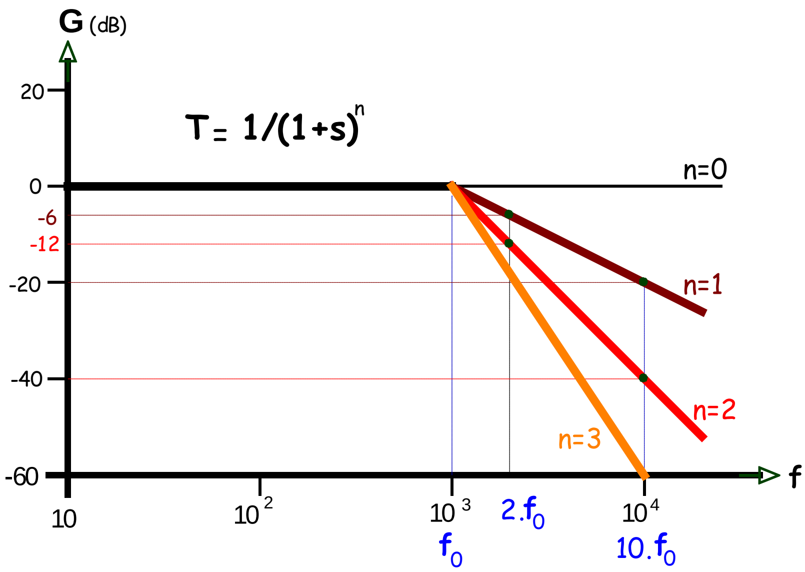
•• **Asymptotes à la courbe de réponse**

Il en découle que l'asymptote horizontale $a_{1(s)}=1$ à pour ordonnée $G_{(f<fO)}=20.\mathrm{Log}(1)=0$ dB.

Elle s'interrompt à f_0 pour passer le relais à une asymptote oblique ayant pour transmittance $a_{2(s)}= \mathbf{s}^{-n}$.

Ce qui précède indique qu'il s'agit d'une droite oblique décroissante dont la pente est de -6.n dB/Octave soit -20.n dB/décade.

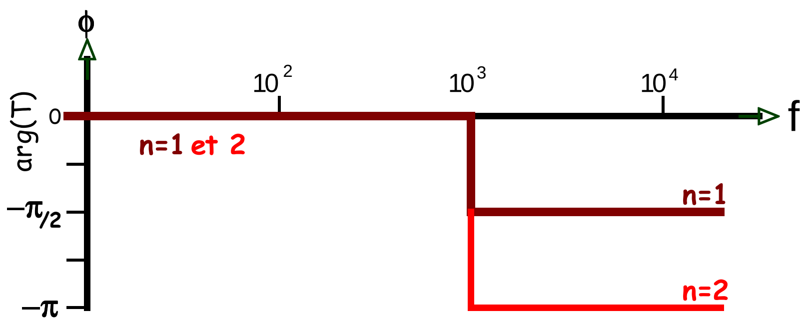
Les asymptotes pour n=0,1,2,3 et f_0 =1kHz sont conformes au diagramme suivant.



•• **Asymptotes à la courbe de phase**

Il en va de même, l'argument de la transmittance de la zone fréquentielle ou $f> f_0$ est négatif.

Traduit pour f_0 = 1kHz et, n=1 et 2, sur le plan de phase suivant .



Restriction possible

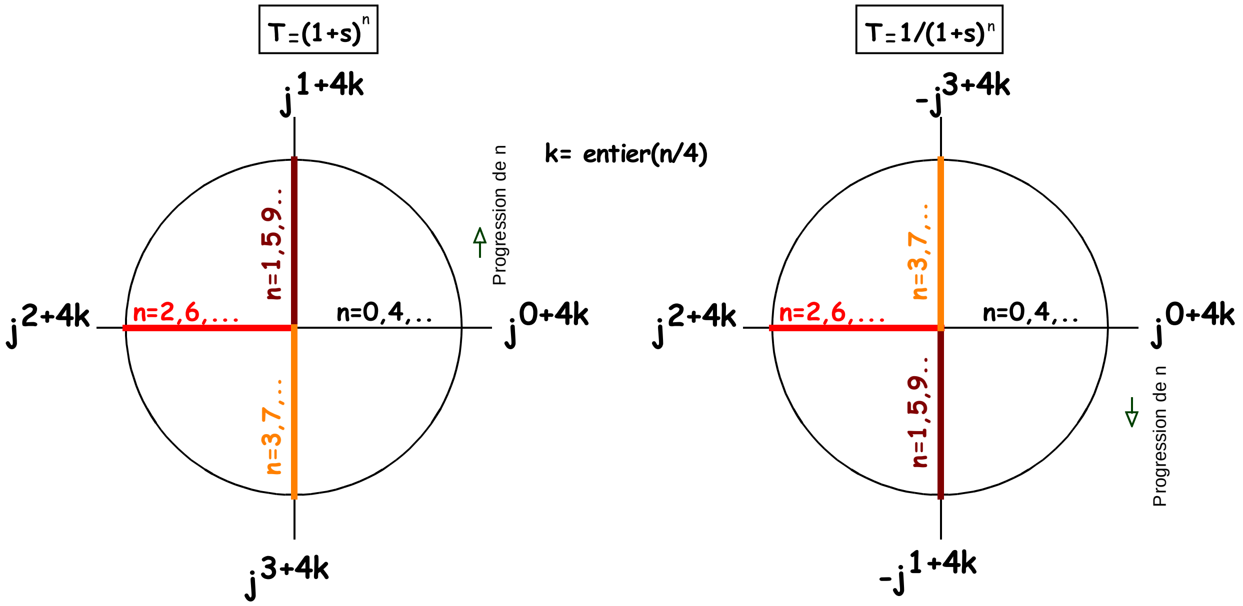
Je n'ai pas représenté l'asymptote de n=3 parce que le graphe devient ambigu si, comme de nombreux traceur, l'espace est limité à ($-\pi$, π).

Le fait d'obtenir un argument, dont la valeur absolue est supérieur à π, en change le signe et le tracé devient discontinu. Il est donc important de toujours rapprocher le tracé à son asymptote dont la position angulaire peut être déterminée sur le plan complexe.

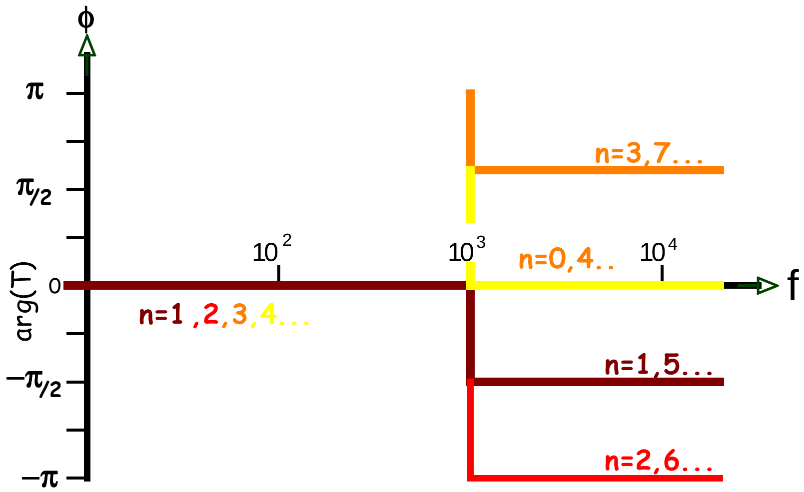
Dans ce cas, l'une des astuces consiste à lire le plan de phase comme s'il était tracé sur un cylindre horizontal , de circonférence =2.π , les horizontales à $-\pi$ à π étant confondues.

Le double graphe suivant montre l'orientation des asympotes des transmittance , $\mathbf{T}_{(s)}=(1+\mathbf{s})^n$ et de son inverse $\mathbf{T}_{(s)}^{-1}= 1/(1+\mathbf{s})^n$ en fonction de n.

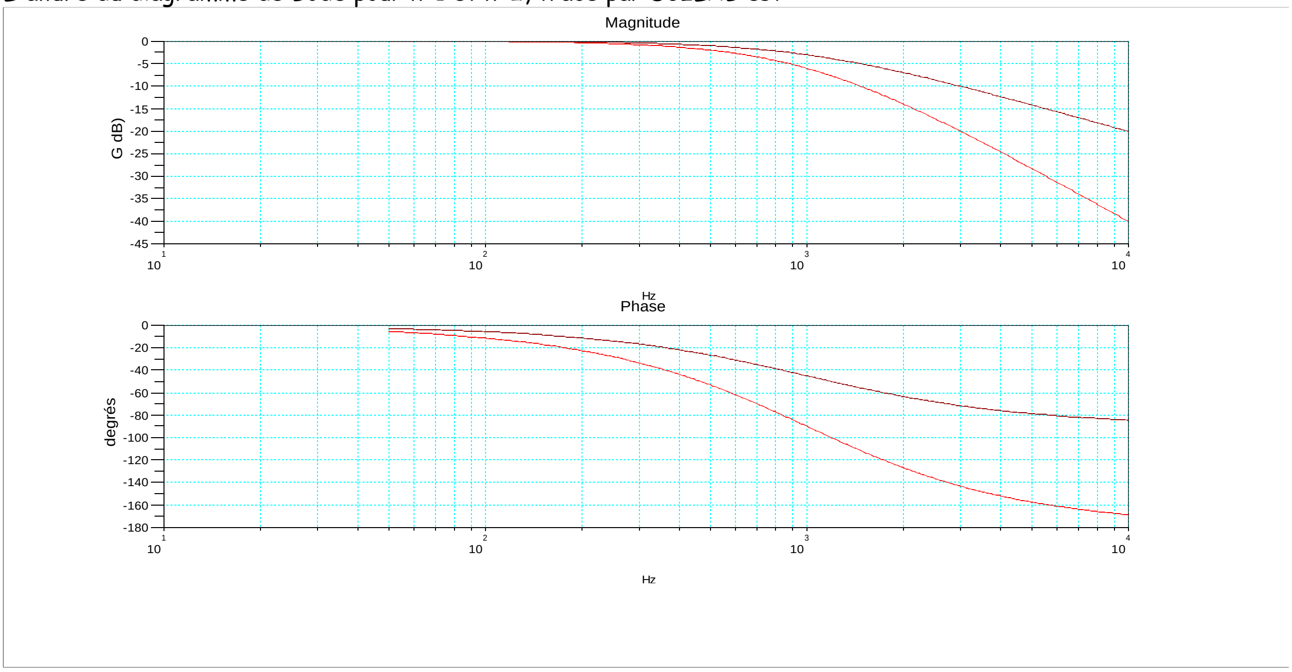
Les exposants de j tiennent compte du sens d'évolution du degré n de la transmittance considérée.



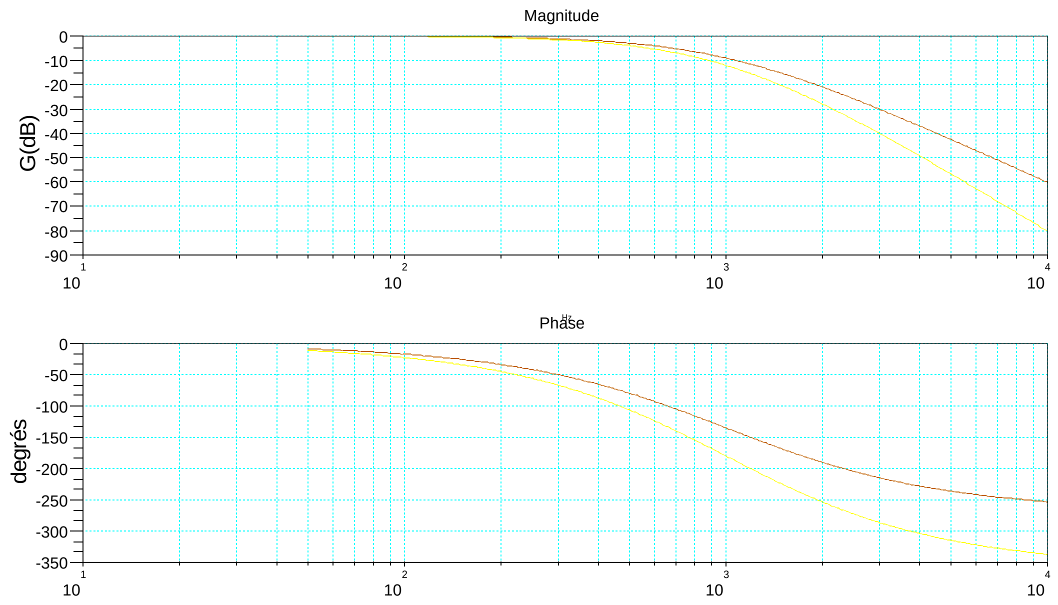
L'ambiguité étant levée, dans ces conditions le diagramme asymptotique des phases est:



L'allure du diagramme de Bode pour n=1 et n=2, tracé par SCILAB est



Pour n=3 et n=4 il devient



SCILAB traite correctement le tracé et ne se limite pas à l'espace angulaire -180,180°

Ces filtres sont des filtres passe bas du n° ordre.

- **<u>asymptotes de</u>**: $T_{(s)} = s^n/(1+s)^n$ **(fii-63)**

♦♦ **<u>asymptotes à la courbe de réponse</u>**

Aux fréquences inférieure à la fréquence de coupure f_0, l'équation de l'asymptote de $T_{(s)}$ est

$$a_{1(s)} = s^n/1 = s^n \quad \text{(fii-64)}$$

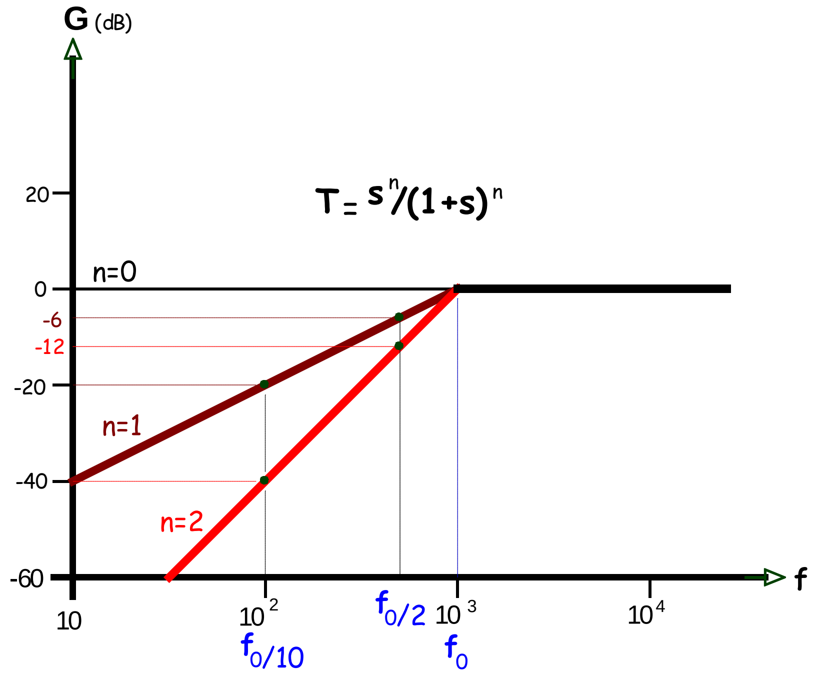
reportée sur le plan de bode, il lui correspond une droite oblique croissante de n.6 db/octave ou n.20 dB/décade

Aux fréquences supérieures à la fréquence caraactéristique

$$a_{2\,(s)} = s^n/s^n = 1 \quad \text{(fii-65)}$$

Il lui correspond une asympote horizontale dont l'ordonnée est OdB

Les deux asymptotes se rejoignent au point (f_O, 0).



Ce graphe représente le diagramme asymptotique de deux ***filtres passe haut du 1° et second ordre***

•• **asymptotes à la courbe de phase**

Dans la zone ou $\mathbf{f} < \mathbf{f}_O$ l'argument de $\arg(T_{(f<fO,\ s)})$ est celui de $a_{1(s)} = s^n$

Son asymptote est donc celle définie dans (fii-47) $\arg(T_{(f<fO,\ s)}) = n.\ \pi/2$ rd **(fii-66)**

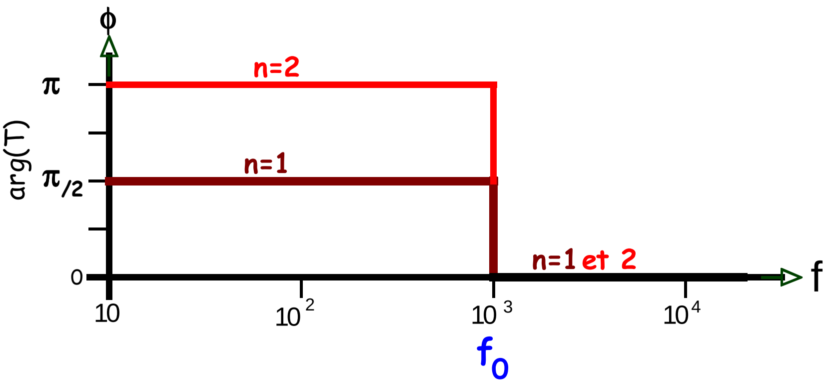
ou (fii-48) $\arg(T_{(f<fO,\ s)}) = n.\ 90°$ **(fii-67)**

Dans la zone ou $\mathbf{f} > \mathbf{f}_O$ l'argument de $\arg(T_{(f>fO;s)})$ est celui de $a_{1(s)} = 1$ ce qui implique

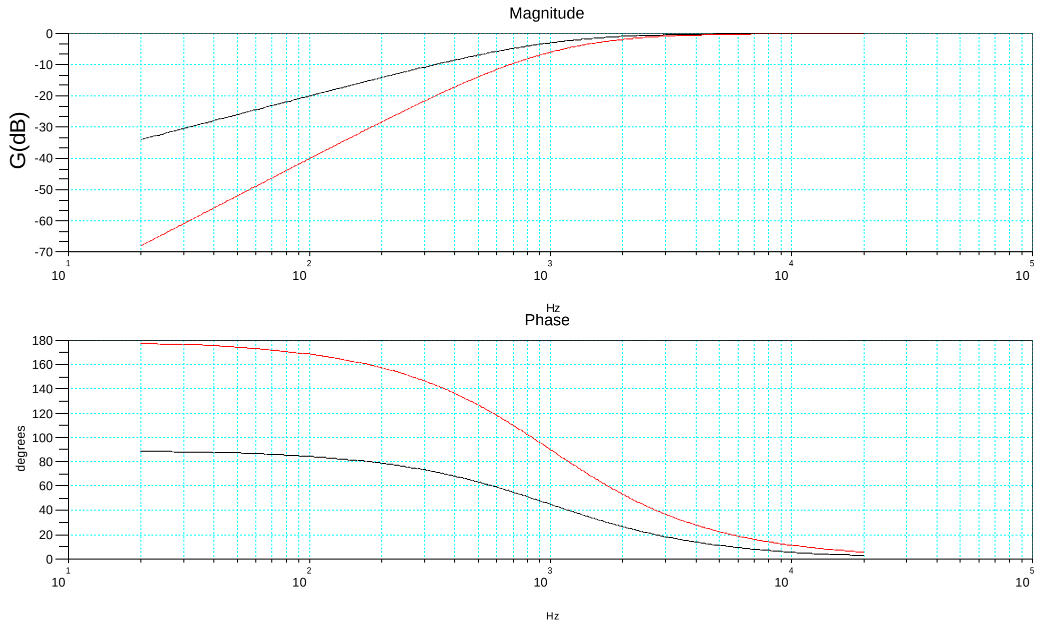
$$\arg(T_{(f>fO;s)}) = 0. \qquad \textbf{(fii-68)}$$

une asymptote verticale d'abcisse f_O intercepte les deux précédentes.

Le tracé des asymptotes des filtres du 1° et second ordre passe haut apparaît dans le diagramme suivant



Le diagramme de Bode complet pour le le ***filtre passe haut*** du premier et du second ordre est le suivant



♦ **asymptotes de**: $T_{(s)} = s^{n/2}/(1+s)^n$ **(fii-69)**

Remarques:

– Afin que l'exposant du numérateur de la transmittance soit un entier, cela amène à choisir n pair.

– De cette remarque n ne peut qu'être qu'égal ou supérieur à 2.

•• **Asymptotes à la courbe de réponse**

La variable **f** et la fréquence caractérique $\mathbf{f}_O$ sont déterminées dans **s**

Aux fréquences $\mathbf{f} \ll \mathbf{f}_O$ T(s) peut s'écrire $a_{1(s)} = s^{n/2}/1 = s^{n/2}$ **(fii-70)**

Aux fréquences $\mathbf{f} \gg \mathbf{f}_O$ T(s) peut s'écrire $a_{2(s)} = s^{n/2}/\ s^n = 1/s^{n/2} = s^{-n/2}$ **(fii-71)**

En identifiant $a_{1(s)}$ et $a_{2(s)}$ aux tracés connus,

– $a_{1(s)}$ conduit, sur le diagramme de Bode, à une droite asymptotique croissante et de pente (n/2). 6 dB/Octave ou (n/2).20 dB/décade.

- $a_{2(s)}$ mène sur ce même diagramme à une droite asymptotique décroissante et de pente -(n/2). 6 dB/Octave ou -(n/2).20 dB/décade.

Elles s'interceptent lorsque $(f/f_0)^{n/2}=(f/f_0)^{-n/2}$

soit $(f/f_0)^{n/2}=1/(f/f_0)^{n/2}$ <=> $(f/f_0)^{n^2/4}=1$ <=> $f/f_0=1$ (fii-72)

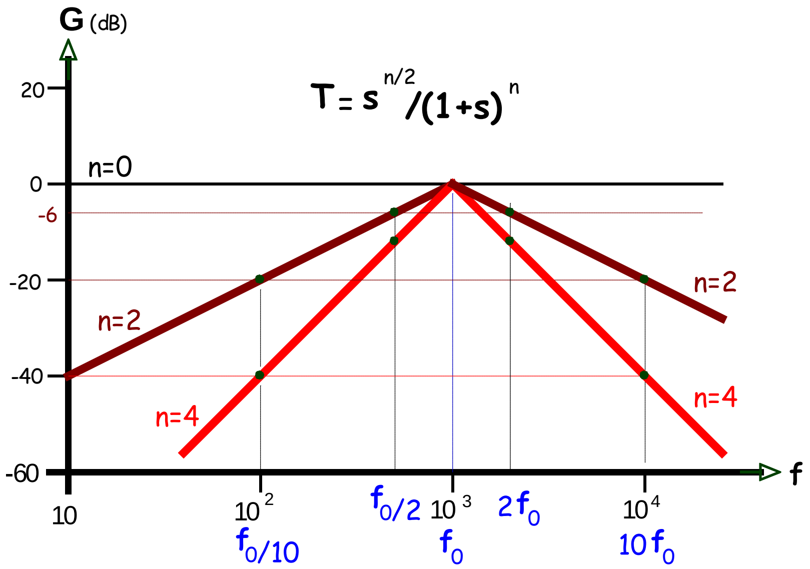
Le point d'abcisse de leur interception est $f = f_0$ **(fii-73)**

Le point d'ordonnée est $G_0=20.\log((f_0/f_0)^{n/2}) = 20.\log(1) =0$ **(fii-74)**

Remarques:

- quel soit l'ordre n du filtre les deux asymptotes s'interceptent au point (f_0 ,0)
- Ce filtre défavorise les fréquences situées autour de sa fréquence caractéristique f_0
- Il favorise une bande de fréquences, dont la largeur est à déterminer autour de f_0.
- C'est un ***filtre passe bande d'ordre n***

Son diagramme asymptotique apparaît .



•• **asymptotes à la courbe de phase**

(fii-70) oriente vers une droite asymptotique horizontale dont l'ordonnée est :

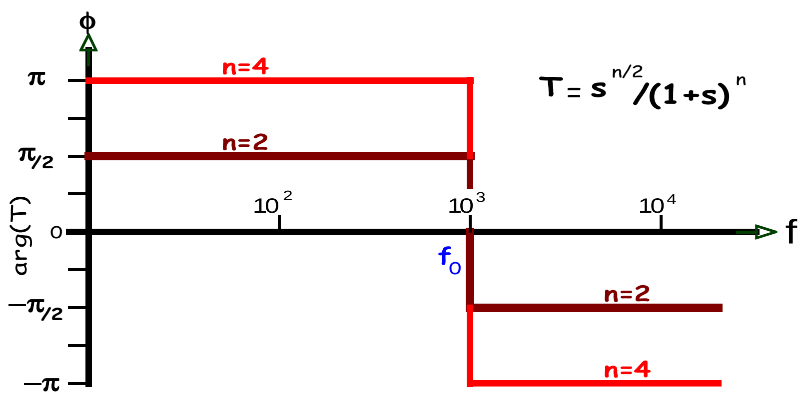
$\arg(a_{1(s)}) =n/2.\ \pi/2$ rd $= n.\ \pi/4$ rd **(fii-75)**

soit exprimée en degrés $\arg(a_{1(s)}) = n.\ 45°$ **(fii-76)**

L'argument de $a_{2(s)}$ est l'opposé de $a_{1(s)}$ => $\arg(a_{2(s)}) = -\ n.\ 45°$ **(fii-77)**

A la fréquence caractéristique f_0, encore appelée fréquence d'accord, l'argument est médian des deux asymptote, ce qui se traduit par $\arg(a_{f0}) =0$. **(fii-78)**

Elle est matérialisée par une asymptote verticale d'abcisse f_0. Qui relie les deux asymptotes horizontales.



♦♦ **application à un passe bande du 2° ordre**

Sa fonction de transfert est $\mathbf{T_{(s)}} = \mathbf{s} /(1 + \mathbf{s/Q} + \mathbf{s^2})$ (fii-79)

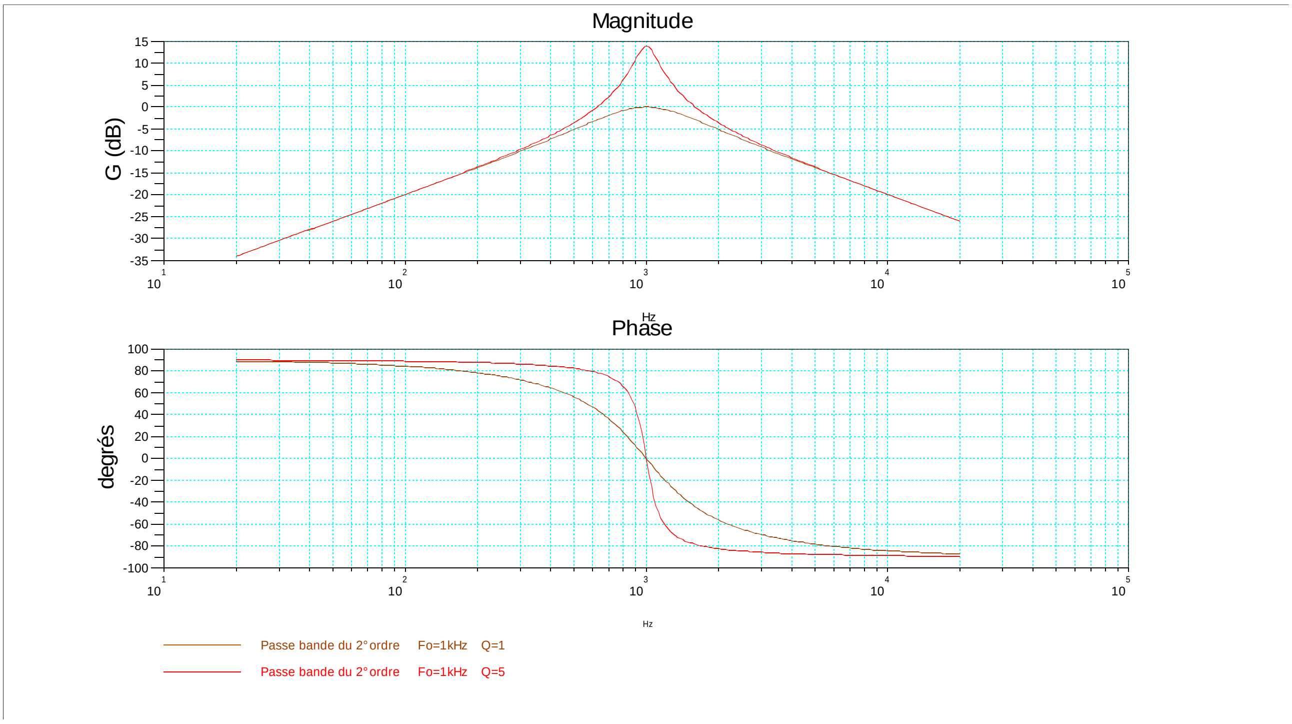
Les asymptotes de sa courbe de réponse sont définies dans ce qui précède, puisque indépendantes du terme **s/Q**

Par contre à la fréquence $\mathbf{f_0}$ les termes 1 et $\mathbf{s^2}$ s'annulent et $\mathbf{T_{(s)}} = \mathbf{s} / \mathbf{s/Q} = \mathrm{Q}$ (fii-80)

Dans ces conditions la courbe passe par le point de coordonnes ($\mathbf{f_0}$, 20.log(Q)) et sa phase est nulle.

Les asymptotes du plan de phase sont conformes à la précédente analyse.

Le diagramme de Bode représenté ci dessous, est celui de deux filtres 'passe bande ' accordés sur une même féquence de 1kHz et ayant un Q=1 (tracé brun) et Q=5 (tracé rouge) .



♦♦ **autre interprétation et bande passante**

posons la fonction de transfert $\mathbf{T_{(s)}} = (\mathbf{s/Q}) /(1 + \mathbf{s/Q} + \mathbf{s^2})$ **(fii-81)**

A $\mathbf{f_0}$ le terme 1 est annulé par $\mathbf{s^2}$ et $\mathbf{T_{(s)}} = (\mathbf{s/Q}) /(\mathbf{s/Q}) = 1$ (fii-82)

et bien évidemment son module $|\mathbf{T_{(s)}}|=1$ soit un gain G = 0dB sur le diagramme de Bode (fii-83)

En divisant le numérateur et le dominateur de $\mathbf{T_{(s)}}$, par **s/Q**

$$\mathbf{T_{(s)}} = 1/[(Q/s)+1+ Q.\mathbf{s}] = 1/ [1 + Q(\mathbf{s} +(1/\mathbf{s}))] \quad \text{(fii-84)}$$

changeons de variable au profit de $X= j.\mathbf{f}/\mathbf{f_0}$

$$\mathbf{T_{(X)}} = 1/ [1 + Q(j.X +(1/j.X))] = 1/ \big(1 + j.Q\big(X -(1/X)\big)\big) \quad \text{(fii-85)}$$

la tangente de l'argument φ du dénominateur s'écrit $tg(\varphi)= Q\big(X -(1/X)\big)$ **(fii-86)**

ce qui permet d'exprimer $\mathbf{T_{(X)}} = 1/(1+ j.tg(\varphi))$ **(fii-87)**

Son module $|\mathbf{T_{(X)}}| = 1/(1+ tg^2(\varphi))^{1/2} = \cos(\varphi)$ **(fii-88)**

à $tg(\varphi)=(+/-) 1$ correspond $|\mathbf{T_{(X)}}| = 1/ 2^{1/2}$ (fii-89)

qui correspond à un gain de $G = 20.\log(1/2^{1/2}) = - 20.\log(2^{1/2}) = -10.\log(2)= -3dB$. (fii-90)

La bande passante $\mathcal{B}$ d'un filtre est définie par la différence entre deux fréquences $\mathbf{f_2}$et $\mathbf{f_1}$, déterminées par les deux points ($\mathbf{f_2}$,-3dB) et ($\mathbf{f_1}$,-3dB) placés sur la trajectoire de la courbe.

Donc l'équation $tg(\varphi)=(+/-) 1$ => $Q\big(X -(1/X)\big)=(+/-) 1$ (fii-91)

permet de définir ces 2 fréquences de coupure.

Après réduction au même dénominateur . $Q (X^2-1) = (+/-) X$ => (fii-92)

équation double. En les dissociants $Q.X^2 + X- Q=0$ (fii-93)

$Q.X^2 - X- Q=0$ (fii-94)

sont les deux trinomes à traiter

Elles ont le même discriminant $\Delta = 1 + 4.Q^2$ (fii-95)

On en tire les deux racines possibles:

$$X_2=(1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q \quad \text{et} \quad X_1=(-1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q \qquad \text{(fii-96)}$$

s'écrivent aussi $f_2/f_0= (1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q$ et $f_1/f_0= (-1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q$ (fii-97)

La différence des deux expressions $(f_2/f_0) -(f_1/f_0) = ((1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q) -((-1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q)$ (fii-98)

amène à $(f_2 - f_1)/f_0 = 1/Q \iff B = f_2 - f_1 = f_0/Q$ **(fii-99)**

Remarques

- Le produit des racines $X_2 . X_1 = f_1 . f_2/f_0^2 = ((1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q).((-1 + \Delta^{1/2})/ 2.Q) = 1$ (fii-100)

  permet d'écrire $f_1 . f_2 = f_0^2$ **(fii-101)**
- Sur un plan de bode $\log(f_1 . f_2) = \log(f_0^2) = 2 \log (f_0)$

  Ce qui implique que $\log(f_0) = 1/2 [\log(f_1) + \log(f_2)]$

  et surtout qui signifie que sur le tracé, la droite verticale qui passerait par f_0, serait l' axe de symétrie entre f_1 et f_2.

- **asymptotes de**: $T_{(s)}= (1+s_1)^n /(1+s_2)^n$ **(fii-102)**

La transmittance $T_{(s)}$ peut se formuler sous la forme $T_{(s)}= [(1+s_1)^n] . [1 /(1+s_2)^n] = T_{1(s)}.T_{2(s)}$ (fii-103)

dans laquelle $T_{1(s)} = (1+s_1)^n$ pour laquelle $s_1= j.f/f_1$ (fii-104)

et $T_{2(s)} = 1 /(1+s_2)^n$ dans laquelle $s_2= j.f/f_2$ (fii-105)

Les deux fréquences f_1 et f_2 sont respectivement les fréquences caractéristiques du numérateur et du dénominateur.

♦♦ **Asymptotes à la courbe de réponse**

A chacune des transmittances correspond son module et le module résultant de leur produit est égal à $|T_{(s)}|$.

donc $|T_{(s)}|=|T_{1(s)}|.|T_{2(s)}|$ (fii-106)

Ce qui permet de formuler le gain $G = 20.\log(|T_{(s)}|) = 20.\log(|T_{1(s)}|.|T_{2(s)}|)$ (fii-107)

$$G = 20.\log(|T_{1(s)}|) + 20.\log(|T_{2(s)}|) \qquad \textbf{(fii-108)}$$

Soit encore $G = G_1 + G_2$ (fii-109)

On peut en conclure que le diagramme asymptotique résultant correspondra à l'addition des diagrammes asymptotiques de G_1 et G_2

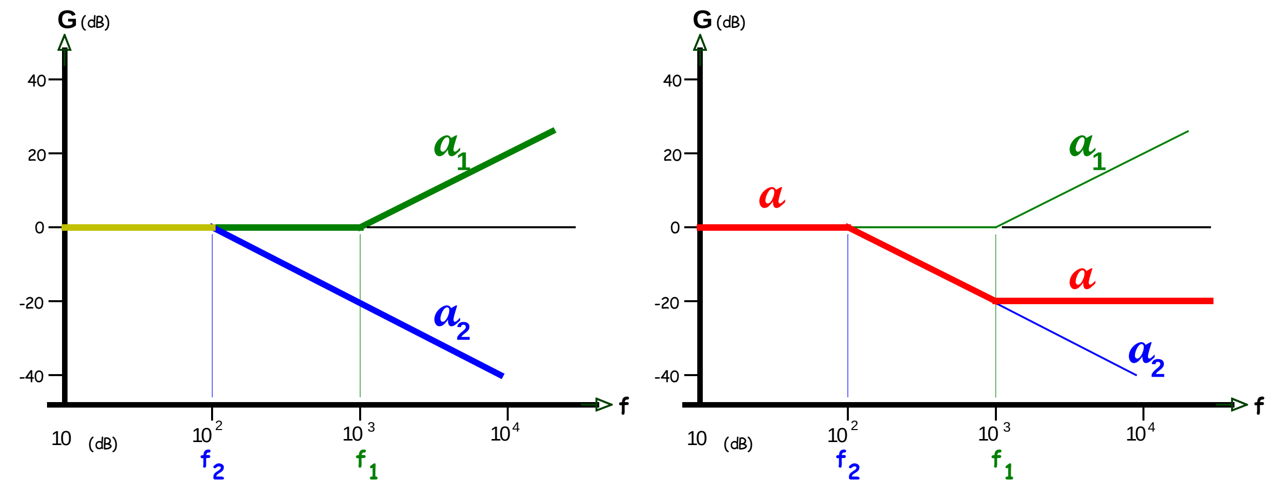
celui de G_1 correspond à la forme développée en **(fii-53)**

celui de G_2 à celle développée en **(fii-61)**

Trois cas s'offrent à nous

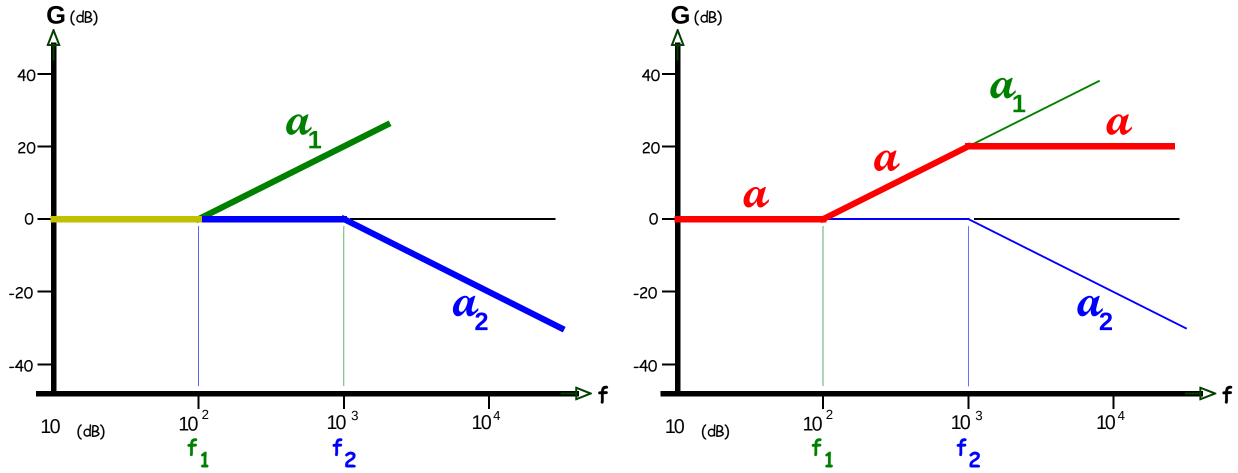
- **f_1 est supérieur à f_2**

  Ce graphe, des asymptotes d'un tel filtre du 1° ordre, vaut mieux qu'un long discour



a_1 est la résultante asymptotique de G_1, a_2 celle de G_2 et a la résultante des effets de $G=G_1 + G_2$

- $f_1 = f_2$. Ce cas n'a aucun intérèt dans cette analyse
- <u>f_1 est inférieur à f_2</u>
  Ce dessin en montre les effets.



a_1 est la résultante asymptotique de G_1, a_2 celle de G_2 et a la résultante des effets de $G = G_1 + G_2$

Remarque:
Aux fréquences inférieure à la plus faible, le gain est **G=0dB**
Aux fréquences supérieures à la plus élevée, le gain

$$G = 20.\log\left((f/f_1) / (f/f_2)\right) = 20.\log\left((f/f_1).((f_2/f)\right) \qquad \text{(fii-110)}$$

$$G = 20.\log(f_2/f_1) \qquad \text{(fii-111)}$$

pour un filtre du premier ordre.

De ce qui précède ***pour un filtre d'ordre n***, $G = n.\ 20.\log(f_2/f_1)$ **(fii-112)**

Remarque:
Si G est imposé le rapport entre les deux fréquences:

$$f_2/f_1 = 10^{G/20.n} \qquad \textbf{(fii-113)}$$

Dans cette zone de fréquence si

- <u>$f_2 > f_1$</u> G est positif, Les fréquences supérieures à f_1 sont favorisées puis l'accroissemet se stabilise au dela de f_2.
- <u>$f_1 > f_2$</u> G est négatif, Les fréquences supérieures à f_2 sont défavorisées . Leur affaiblissement se stabilise au dela de f_1.

•• ***Asymptotes à la courbe de phese***

L'argument $\arg(T_{(s)}) = \arg(T_{1(s)}) - \arg(T_{2(s)})$

Aux fréquences inférieures à f_{min} la plus faible de f_1 ou f_2 l'argument est nul
Aux fréquences supérieures à la plus faible l'argument va dans le sens de la courbe de réponse.

- S'il y a acroissement $\arg(T_{(s)})$ tend vers $n.\pi/2$ rd.
- S'il y a affaiblissement $\arg(T_{(s)})$ tend vers $-n.\pi/2$ rd.

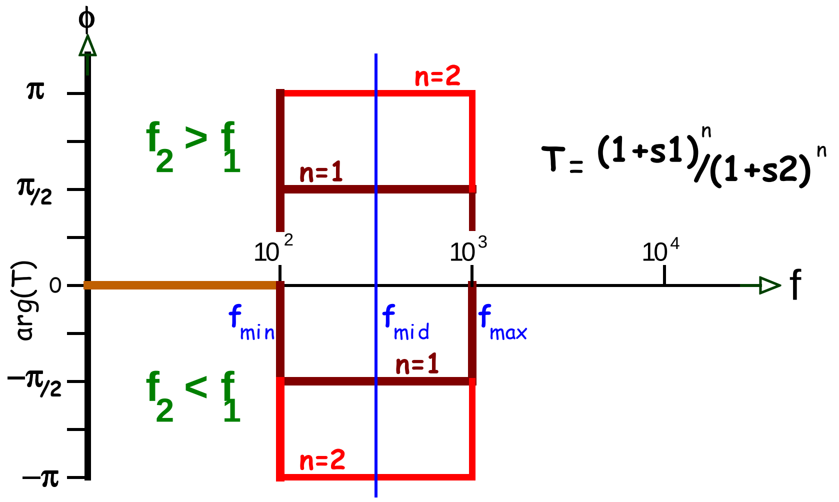
A une fréquence intermédiaire à f_1 et f_2 la courbe de phase passe par

- un maximum s' il y accroissement du module de la transmittance
- un minimun dans l'autre cas
  Ce point est déterminé lorsque la tangente du numérateur égale celle du dénominateur.
  Tous calculs faits lorsque $f_{mid} = (f_1 . f_2)^{1/2}$

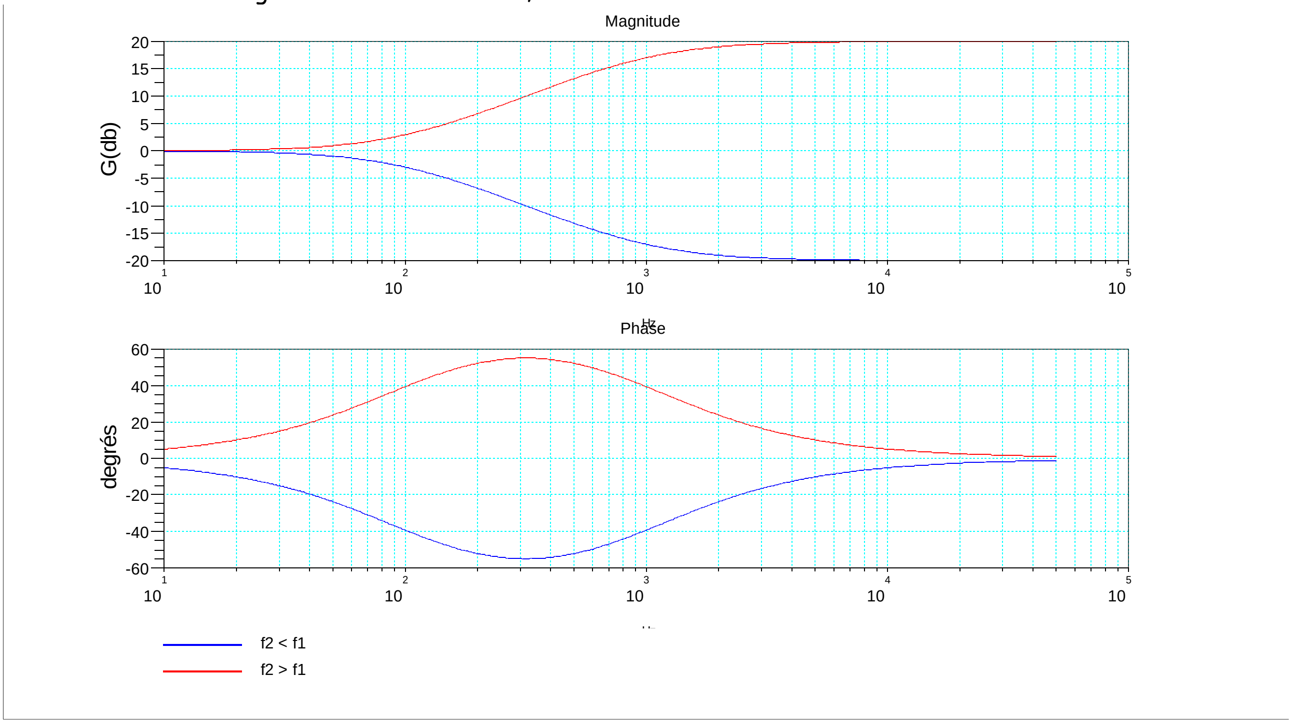
Au dela de cette fréquence son sens d'évolution change , au de la de la fréquence f_{max} la plus élevée de f_1 ou f_2 la courbe de phase tend vers 0

Une représentation asymptotique possible consiste à placer deux asymptotes verticales à f_1 et f_2 qui limitent l'espace des asymptotes horizontales

Le dessin ci dessous illustre ces longues phrases



Les deux tracés du diagramme de Bode suivant, montrent la réalité.



- **asymptotes de**: $T_{T(s)} = K.\ T_{(s)}$

L'expression de son gain nous renseigne immédiatement.

$$G_{Tt} = 20.\log(K.\ |T_{(s)}|) = 20.\ \log(K) + 20.\log(|T_{(s)}|) \quad \text{(fii-114)}$$

$$G_{Tt} = G_K + G_T \quad \text{(fii-115)}$$

dans laquelle $G_K = 20.\ \log(K)$ (fii-116)

et $G_T = 20.\ \log(|T_{(s)}|)$ (fii-117)

Cette relation montre un effet de translation verticale de $|T_{(s)}|$

Si $K > 1$, la courbe asymptotiqe résultante de $|T_{(s)}|$ se déplace vers le haut d'une valeur

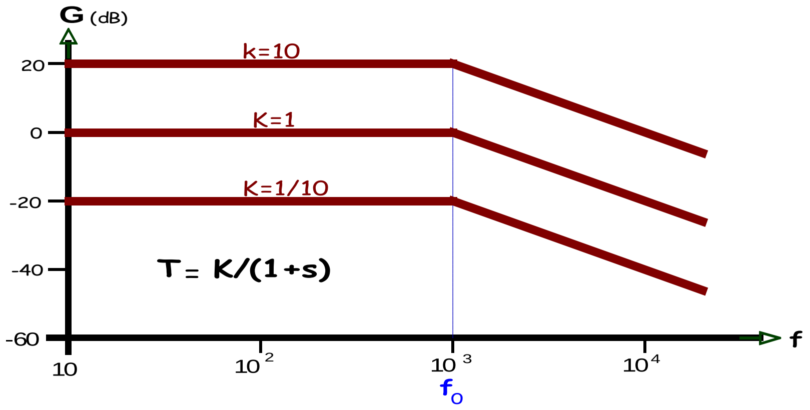
$$G_K = 20.\ \log(K) \quad \textbf{(fii-118)}$$

Si Si $K = 1$, la courbe résultante de $|T_{(s)}|$ est conforme à l'analyse de $T_{(s)}$ prédédemment vue.

Si $0 < K < 1$, la courbe asymptotiqe résultante de $|T_{(s)}|$ se déplace vers le bas d'une valeur égale à

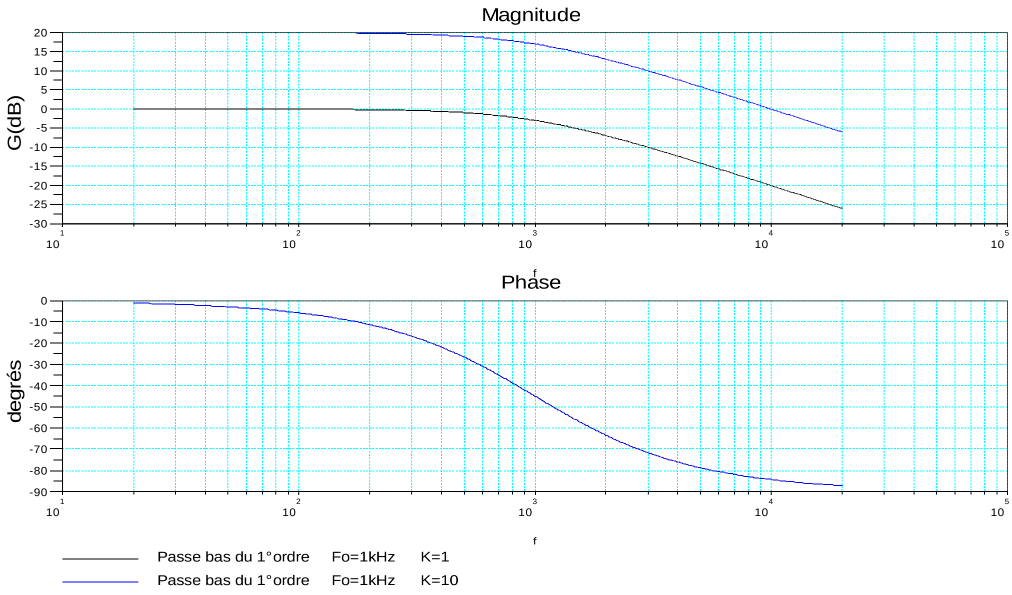
$$G_K = 20.\ \log(1/K) \quad \textbf{(fii-119)}$$

La figure suivante illustre les effets de la présence de K=10, k=1 et K=0,1 pour un filtre passe bas du premier ordre, centré sur 1kHz.



<u>Remarque</u> : La courbe de phase n'est pas affectée par K

Pour K=1 et K=10 le diagramme de bode est :



Pour K=1 et K=1/10 le diagramme de bode est :