

# De la puce à l'oreille

- Jean-Claude BODOT -

## Introduction au filtrage

### chapitre 1

Le filtre est un circuit linéaire destiné à modifier la réponse ou la phase d'un système, Il peut être mécanique, électrique ou acoustique pour ne citer que les réseaux qui nous concerne. Pour alléger l'écriture vibrations et signaux seront perçus comme des phénomènes analogues.

Ainsi il peut être

- passe bas s'il ne laisse passer que les signaux dont la fréquence est inférieure à une fréquence caractéristique.
- passe haut s'il favorise les signaux dont la fréquence est supérieure à une fréquence caractéristique
- passe bande s'il favorise les signaux situés dans une bande fixée de fréquences situés de part et d'autre d'une fréquence centrale dite d'accord.
- réjecteur de bande. Il rejète les signaux dont la fréquence est dans une bande de fréquence définie de part et d'autre d'une fréquence caractéristique de réjection
- passe-tout à une courbe de réponse totalement plate. Il est employé pour corriger la phase d'un système ou créer un délai.

Nous allons passer en revue les filtres:

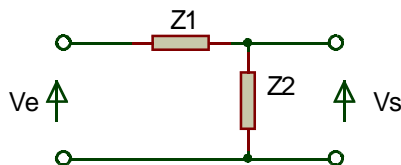
- passifs, en électricité, électronique, mécanique et en acoustique. La puissance délivrée à leur sortie ne peut excéder la puissance délivrée à l'entrée. Ils utilisent des circuits passifs, ces derniers pouvant transformer l'énergie en chaleur (résistance) ou l'accumuler temporairement pour la restituer (Inductance, capacitance, Masse, ressort)
- actifs en électronique
- digitaux en électronique.

Devant l'ampleur du sujet, je me limiterai aux filtres et réseaux apparentés de l'audio.

La connaissance des nombres complexes est fortement conseillée avant d'aborder ce chapitre.

### 1- Cellule élémentaire électrique et passive - Circuit prototype

Toute cellule de filtre peut être représentée comme le montre la figure suivante.

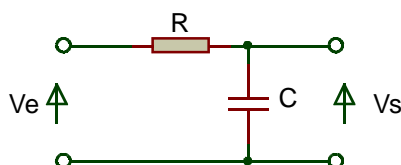


$V_e$  est la tension d'entrée du montage, Nous la supposons sinusoïdale et établie depuis suffisamment de temps pour ne pas avoir à prendre en compte de phénomènes transitoire. Elle est supposée être délivrée par un générateur parfait donc dénué de résistance interne.

$V_s$  sa tension de sortie. Les conditions d'utilisations sont idéales. Le montage ne débite sur aucun récepteur ou sur un récepteur dont la résistance est infinie. Le courant dérivé vers la sortie est nul.

Ce montage représente un pont diviseur potentiométrique. Il est également appelé circuit en L pour la ressemblance de la position de ses éléments et de la lettre L. C'est un quadripole passif, il possède deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, et consomme de l'énergie.

La plus élémentaire des cellules de filtrage est constituée d'une résistance et d'un condensateur montés comme suit.



L'identification des composants entre les deux schémas, est immédiate. Leur formulation doit utiliser la notation complexe pour les éléments réactifs ( Inductance et capacitance) .

Autrement dit les éléments dont, le courant qui les traverse et la tension à leurs bornes sont décalés de  $\pi/2$  ou  $-\pi/2$  rd. La résistance pure échappe à ce critère, tension à ses bornes et courant qui la traverse étant en parfaite concordance de phase.

L'identification au modèle amène à écrire ;  $Z_1=R$ , (Fi-1)

et  $Z_2= -j/C.\omega = 1/j.C.\omega = 1/ p.C$  (Fi-2)

dans lequel  $p= j.\omega$  l'opérateur d'Heaviside souvent nommé opérateur de Laplace. (Fi-3)

La règle des diviseurs potentiométriques permet d'écrire  $V_s= V_e. Z_2/(Z_1+Z_2)$  (Fi-4)

soit  $V_s= V_e (1/p.C)/ [ R +(1/p.C)] = V_e/(1 + p.C.R)$  (Fi-5)

La fonction de transfert  $T(p)$  ou transmittance du filtre est égal au rapport de la tension de sortie  $V_s$  sur la tension d'entrée  $V_e$ . De ce qui précède  $T(p) = 1 / (1 + p.C.R)$  (Fi-6)

L'indice au pied de  $T$  indique la variable à laquelle est soumise la transmittance.

Le produit  $C.R$ , constant, est homogène à un temps .

$$\tau =C.R \quad (Fi-7)$$

est la constante de temps du circuit. Appliquée à la transmittance

$$T(p) = 1 / (1 + p.\tau) \quad (Fi-8)$$

pour enfin après avoir convenu que le produit  $p.\tau =s$ , la fonction de transfert peut s'écrire

$$T(s) = 1 / (1 + s) \quad (Fi-9)$$

$s$  est devenue la variable de la transmittance.

Le produit d'une constante par une variable est une variable.

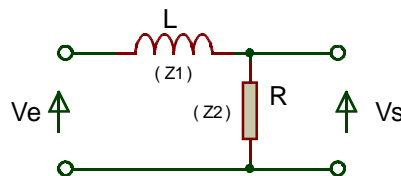
Ce sont les principales formulations que vous pourrez rencontrer.

### Remarques:

- Dans la littérature anglo saxonne  $p$  et  $s$  sont parfois inversés.
- Vous remarquerez que sans rentrer dans de grands contextes mathématique, il est possible d'utiliser des outils évolués par simple convention. Avec l'excuse légitime de vouloir alléger l'écriture. De cette manière, sont établies des relations utilisables pour tous types de signaux d'entrée.

## 1-1 Homologue L,R

Son schéma



Dans ce cas  $Z_1= j.L.\omega=p.L$ , (Fi-10)

et  $Z_2=R$  (Fi-11)

Comme précédemment, en exploitant les vertus de (Fi-4), la tension à la sortie du filtre est:

$$V_s=V_e. R / ( R + p.L) . \quad (Fi-12)$$

En divisant haut et bas par R

$$V_s=V_e / ( 1 + p.L/R) \Leftrightarrow V_s/V_e = T(p) = 1/( 1 + p.L/R) \quad (Fi-13)$$

Le rapport  $L/R$  est homogène à un temps.

$$\tau =L/R \quad (Fi-14)$$

est la constante de temps de ce circuit.

En considérant que les deux résistances et les constantes de temps sont égales  $C.R=L/R$ ,

Dans ce cas l'égalité est obtenue si  $L=C.R^2$  (Fi-15)

Sa fonction de transfert est conforme à (Fi-8)

**Remarque:** La formule (Fi-15) sera exploitée dans les filtres actifs pour simuler une self par des réseaux C.R

## 1-2 Module et argument de la transmittance

Quelque soit le type de formulation employée, il est toujours possible de revenir à la forme complexe.

La fonction de transfert  $T$  est de la forme  $T = 1/(a + j.b)$  (Fi-16)

Son module est  $|T| = 1/[(a^2 + b^2)^{1/2}]$  (Fi-17)

La puissance  $\frac{1}{2}$  signifiant que l'on extrait la racine carrée de la somme des carrés de  $a$  et  $b$ .

L'écriture de formules n'est pas très aisée avec un traitement de texte ce qui m'amène à ce type formulation.

On aurait pu l'écrire  $|T| = 1/[(a + j.b)(a - j.b)]^{1/2}$  (Fi-18)  
( $a - j.b$ ) étant le conjugué de ( $a + j.b$ )

La tangente de l'argument (l'angle)  $\alpha$  de  $T$  est:  $\text{tg}(\alpha) = -b/a$  ce qui amène à poser (Fi-19)  
que l'angle  $\alpha$  existant entre la sortie et l'entrée (prise pour référence) noté  $\text{arg}(T)$  est

$$\alpha = \text{arg}(T) = \arctan(-b/a) = -\arctan(b/a) \quad (\text{Fi-20})$$

Il est défini à  $2.\pi$  près on dit aussi modulo  $2.\pi$

identifié à la transmittance du filtre, avec  $a=1$  et  $b = R.C.\omega$

son module est  $|T| = 1/[(1 + R^2.C^2.\omega^2)^{1/2}]$  (Fi-21)

quand à son argument  $\text{arg}(T) = -\arctan(R.C.\omega)$  (Fi-22)

**Remarque:** Le signe - correspond au fait que l'expression ( $a + j.b$ ) est située au dénominateur de  $T$

**Autre approche:**

A l'aide du conjugué ( $a - j.b$ ) de ( $a + j.b$ ) il est possible de transformer l'expression de  $T$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de  $T$  par le conjugué

$$T = (a - j.b) / (a + j.b)(a - j.b) = (a - j.b) / (a^2 + b^2)$$

soit  $T = [a / (a^2 + b^2)] - j.[b / (a^2 + b^2)]$

la tangente de l'argument est  $\text{tg}(\alpha) = -[b / (a^2 + b^2)] / [a / (a^2 + b^2)] = -b/a$

et  $\text{arg}(T) = \arctan(-b/a) = -\arctan(b/a)$

A une pulsation  $\omega=0$  La formule (Fi-21) montre que  $|T|=1$  et (Fi-22),  $\text{arg}(T) = 0$

et que lorsque  $\omega$  tend vers l'infini,  $|T|$  tend vers 0 et  $\text{arg}(T)$  vers  $-\pi/2$ .

Cela nous indique que **ce filtre affaiblit les fréquences hautes**. Il favorise la transmission des fréquences basses. C'est la raison pour laquelle il a été nommé **filtre passe bas** ou **Low Pass**.

Cette analyse ne nous permet pas de caractériser complètement le filtre. Il semble légitime de vouloir déterminer la fréquence frontière entre, ce qu'il protège et ce qu'il affaiblit.

## 1-3 Pulsation et fréquence caractéristique du filtre

la pulsation caractéristique, ou de coupure, d'un filtre est généralement définie lorsque

$$20.\log(V_s/V_e) = -3 \text{ dB} \quad (\text{Fi-23})$$

Elle correspond à une fréquence caractéristique puisque  $\omega = 2.\pi.f \Leftrightarrow f = \omega / 2.\pi$ , (Fi-24)

C'est la fréquence frontière dont je parlais précédemment.

On définit donc, la valeur de  $\omega$  (ou de  $f$ ) à laquelle le module de la transmittance  $|T| = 10^{-3/20} = 1/10^{3/20}$

soit  $|T| = 2^{-1/2}$  ou  $|T| = 1/2^{1/2}$ . La puissance  $1/2$  de 2 correspond à l'extraction de la racine carrée de 2.

Nous appellerons  $\omega_0$  ou  $f_0$ , ces valeurs caractéristiques.

Rapproché de (Fi-21), à cette pulsation caractéristique  $|T| = 1/[(1 + R^2.C^2.\omega_0^2)^{1/2}] = 1/2^{1/2}$ ,

qui permet de déduire que :

$$1 + R^2.C^2.\omega_0^2 = 2 \Leftrightarrow R^2.C^2.\omega_0^2 = 1 \Leftrightarrow R.C.\omega_0 = 1 \Leftrightarrow \omega_0 = 1/R.C \quad (\text{Fi-25})$$

**formule remarquable** dans le sens où la pulsation caractéristique est l'inverse de la constante de temps du circuit.

$$\omega_0 = 1/\tau \quad (\text{Fi-26})$$

et  $f_0 = 1/2.\pi.\tau$  (Fi-27)

Il en ressort que dans l'étude d'un filtre, la **connaissance de la (des) constante(s) de temps est primordiale**.

**Conséquence:** Dans le tracé de la courbe de réponse de ce type de circuit, A la pulsation  $\omega_0$  ou à la fréquence  $f_0$  qui lui correspond, la courbe passera par le point ( $\omega_0, -3$ ) ou ( $f_0, -3$ ). L'axe des ordonnées étant gradué en dB.

De ce qui précède (Fi-26),  $\tau = C.R = 1/\omega_0$  (Fi-28)

les expressions (Fi-6) et (Fi-8) de la fonction de transfert peuvent être reformulées.

$$T_{(p)} = 1 / (1 + p/\omega_0) \quad (\text{Fi-29})$$

et  $T_{(\omega)} = 1 / [1 + j. (\omega/\omega_0)]$  (Fi-30)

de laquelle on crée la variable relative:  $X = \omega/\omega_0 = (2.\pi.f)/(2.\pi.f_0) = f/f_0$  (Fi-31)

(Fi-30) peut donc prendre la forme  $T_{(f)} = 1 / [1 + j. (f/f_0)]$  (Fi-32)

ou  $T_{(X)} = 1 / [1 + j. X]$  (Fi-33)

Pour chacune des variables choisie, le module et l'argument s'écrivent:

-  $\omega$  est la variable,  $|T_{(\omega)}| = 1 / (1 + (\omega/\omega_0)^2)^{1/2}$  (Fi-34)

$$\arg(T_{(\omega)}) = -\arctg(\omega/\omega_0) \quad (\text{Fi-35})$$

$f$  est la variable  $|T_{(f)}| = 1 / (1 + (f/f_0)^2)^{1/2}$  (Fi-36)

$$\arg(T_{(f)}) = -\arctan(f/f_0) \quad (\text{Fi-37})$$

-  $X$  est la variable.  $|T_{(X)}| = 1 / (1 + X^2)^{1/2}$  (Fi-38)

$$\arg(T_{(X)}) = -\arctan(X) \quad (\text{Fi-39})$$

La formulation faisant appelle à la variable relative  $X$ , est très pratique en analyse. Elle est très employée dans les programmes informatiques de tracé de courbes. Ce n'est pas sa seule vertu, nous y reviendrons.

#### 1-4 Analyse

Dans la zone fréquentielle où,

••  $X \ll 1$  ( $X$  bien inférieur à 1), la fréquence  $f$  considérée est bien inférieure à  $f_0$ ,  $f \ll f_0$ , et qu'il en va de même pour  $\omega \ll \omega_0$ .

Dans cette zone, les modules  $|T_{(\omega)}|$ ,  $|T_{(f)}|$  et  $|T_{(X)}|$  sont très voisins de 1, la tension  $V_s$  de sortie du filtre est donc très proche de la tension d'entrée  $V_e$ . On convient que graphiquement,  $V_s/V_e = 1$

Exprimé en dB, afin de respecter nos sensations, donc conformément à la loi de Fechner-Weber,

$$Ndb = 20. \log(V_s/V_e) = 20. \log(1) = 0. \quad (\text{Fi-40})$$

C'est **une droite horizontale asymptotique** au module de la fonction de transfert, d'ordonnée 0dB. On la nomme communément asymptote horizontale

••  $X = 1$ , la courbe passe par le point (1,-3) pour la variable  $X$ ,

( $\omega_0, -3$ ) si la variable est  $\omega$ ,

ou ( $f_0, -3$ ) si la variable est  $f$ .

••  $X \gg 1$ , ( $X$  supérieur à 1), la fréquence  $f$  considérée est très supérieure à  $f_0$ ,  $f \gg f_0$ , et qu'il en va de même pour  $\omega \gg \omega_0$ .

Pour cette zone les termes  $X^2, (\omega/\omega_0)^2, (f/f_0)^2$  sont très supérieurs à 1.

On considère 1 comme négligeable devant eux.

De ce fait dans cette zone  $|T_{(X)}| = 1 / (X^2)^{1/2} = 1/X$ . (Fi-41)

$$|T_{(f)}| = 1/f/f_0 = f_0/f \quad (\text{Fi-42})$$

$$|T_{(\omega)}| = 1/\omega/\omega_0 = \omega_0/\omega \quad (\text{Fi-43})$$

Par respect de la cohérence du tracé et de la loi de Fechner nous traduisons ces équations en dB

Par convention nous l'appellerons  $G$

$$G = 20.\log(1/X) = -20.\log(X) = -20.\log(f/f_0) = -20.\log(\omega/\omega_0) \quad (\text{Fi-44})$$

Pour la même raison, l'échelle de graduation des abscisses est logarithmique,

et de ce fait (Fi-44) est l'équation d'une droite oblique décroissante. Elle est asymptotique au module de la fonction de transfert dans la zone considérée. On la nomme communément asymptote oblique.

Si l'on ne tient compte que de cette seule droite, pour  $X=1$ ,  $NdB=0$ , autrement dit elle intercepte l'asymptote

horizontale au point

- $(1,0)$  si la variable est  $X$ , ou
- $(f_0,0)$  si la variable est  $f$ , ou
- $(\omega_0, 0)$  si la variable est  $\omega$ .

En résumé, tout cela veut dire que la courbe de réponse

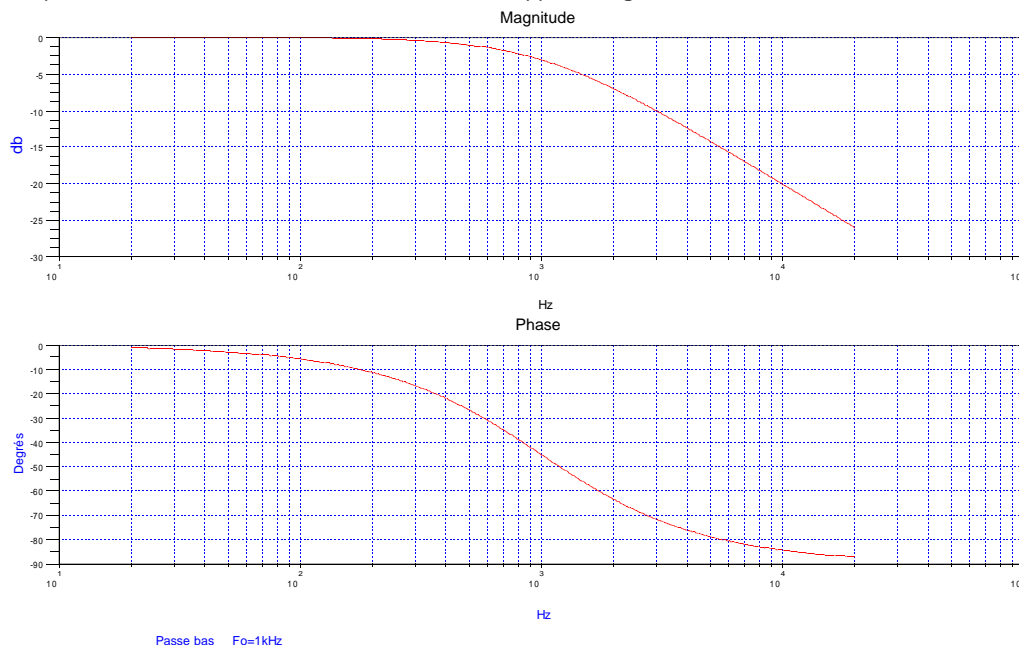
- tendra vers son asymptote horizontale si  $f$  décroît et est inférieure à  $f_0$
- tendra vers son asymptote oblique si  $f$  croît et est supérieure à  $f_0$

En ce qui concerne l'argument pour :

- ♦♦  $X \ll 1$ , il tend vers  $\alpha=0$
- ♦♦  $X = 1$ ,  $\alpha=\pi/4$
- ♦♦  $X \gg 1$ ,  $\alpha$  tend vers  $\pi/2$

Tout cela sera approfondi dans un chapitre dédié aux diagrammes asymptotiques.

Les courbes de réponse et de phase sont tracés sur des plans semi log (abscisses Log et ordonnées linéaire) conforme au plan dit de Bode. L'ensemble est souvent appelé diagramme de Bode.



L'effet passe bas y est très visible.

Le tracé a été effectué à l'aide de **Scilab**. Conçu et édité par l'INRIA, c'est un programme scientifique, surnommé « Matlab gratuit ». Vous pouvez vous le procurer aisément sur internet.

## 1-5 Dans la pratique

### ♦ Influence du générateur sur le filtre passe bas élémentaire

Dans la pratique un générateur n'est pas parfait.

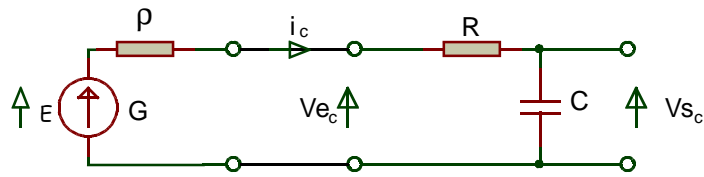
C'est grâce à la connaissance de l'idéal, que nous pouvons modéliser des éléments imparfaits.

En effet dans le meilleur des cas un vrai générateur peut être envisagé comme la mise en série d'un générateur parfait et d'une résistance interne pure. C'est sur la base de ce modèle que nous allons raisonner

Grâce à cette modélisation, le générateur  $G$  voit sa f.e.m  $E$  conservée. Sa résistance  $\rho$  (dite interne) consommant une partie de l'énergie, via l'intensité  $i$  qui circule dans l'ensemble du circuit. C'est elle qui chauffe le générateur. Dans notre cas la charge est constituée par le filtre passe-bas.

♦♦ Le générateur est chargé par un filtre passe-bas C.R

Le schéma d'application est le suivant.



Dans lequel:

- E est la force électromotrice (fem) du générateur,
- rho, sa résistance interne,
- V<sub>ec</sub> la tension de sortie du générateur, appliquée au filtre.
- V<sub>sc</sub> la tension de sortie du filtre

♦♦♦ Transmittance du circuit C.R

Vis à vis de la fem la transmittance  $T_{(p)} = V_{sc}/E = (1/p.C) / [rho + R + (1/p.C)] = 1/(1 + p.C.(R+rho))$  (Fi-45)

dans laquelle est la constante  $\tau_c = C.(R+rho)$  du présent circuit. (Fi-46)

Sa pulsation caractéristique est  $\omega_{0c} = 1/\tau_c$  (Fi-47)

(Fi-25) donne la pulsation caractéristique du filtre élémentaire idéal soit:  $\omega_0 = 1/R.C$

Le rapport entre les deux pulsations est  $\omega_{0c} / \omega_0 = (1/C.(R+rho)) / (1/R.C)$  soit: (Fi-48)

$$\omega_{0c} / \omega_0 = R / (R + rho) = 1 / [1 + (rho/R)] \quad (Fi-49)$$

$\omega_{0c}$  est inférieure à  $\omega_0$ .

Pour que le résultat soit identique à l'idéal, Il est nécessaire de prendre en compte la présence de la résistance interne du générateur.

L'une des solutions est de substituer R par une résistance R' = R - rho (Fi-50)

L'autre plus relativiste est, de considérer que si R est beaucoup plus grand que rho, la pulsation de coupure réelle est suffisamment approchée de la pulsation caractéristique recherchée, pour être valide.

Cette dernière solution est souvent adoptée lors de l'évaluation des circuits, pour la bonne raison que la valeur des composants disponibles sur le marché à une tolérance. Elle est comprise entre 0,1 et 10 % pour les résistances, et 2 à 10% voir 20% pour les condensateurs. Le coût financier pour acquérir des composants à faible tolérance est dans les deux cas exorbitant.

♦♦♦ Charge vue par le générateur

L'expression du courant qui traverse le circuit permet de savoir si la charge que constitue le filtre est adaptée au générateur.

Il ne faut qu'en aucun cas, le générateur ne puisse débiter un courant supérieur à sa limite maximale, sous peine de le détruire.

Le courant  $i_c = E / [rho + R + (1/p.C)] = E . p.C / [1 + p.C.(rho + R)]$  (Fi-51)

En multipliant, le numérateur et le dénominateur par rho + R l'expression de i\_c devient:

$$i_c = E . p.C (rho + R) / [(rho + R).[1 + p.C.(rho + R)]] \quad (Fi-52)$$

après une nécessaire mise en forme

$$i_c = [E/(rho + R)] . [p.C (rho + R) / [1 + p.C.(rho + R)]] \quad (Fi-53)$$

ou encore  $i_c = i_{co} . p . \tau_c / (1 + p . \tau_c)$  (Fi-54)

dans laquelle  $i_{co} = E/(rho + R)$  (Fi-55)

ce qui signifie que le rapport  $i_c / i_{co} = p . \tau_c / (1 + p . \tau_c)$  (Fi-56)

ou il apparaît une nouvelle fonction de transfert dont l'étude complète sera faite dans le chapitre 2

Globalement, car vous pourrez le vérifier très vite, aucun courant ne circule dans le circuit si  $\omega=0$ , (Tension continue). Par contre le condensateur tendant à se comporter comme un court circuit aux fréquences hautes, à une tension E donnée, le courant i\_c avoisinera i<sub>co</sub>.

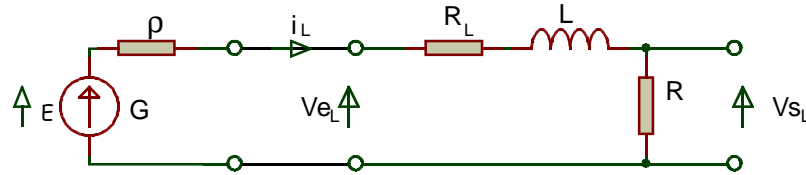
Le courant débité par le générateur, est favorisé aux fréquences hautes. **le circuit se comporte comme un filtre passe haut.**

A la fem  $E_{max}$ , qu'est capable de délivrer le générateur, lui correspondra le courant  $i_{cmax} = E_{max}/(\rho + R)$ . (Fi-57)

**Remarque:** Il apparaît que les fonction de transfert ne sont pas réservées au seul rapport entre deux tensions. Vous pourrez les appliquer, pour tout les rapports, d'une variable, sur une grandeur de même nature.

•• Le générateur est chargé par un filtre passe-bas L.R

Le circuit est conforme au circuit suivant:



Dans lequel:

- $E$  est la force électromotrice (fem) du générateur,
- $\rho$ , sa résistance interne,
- $V_{eL}$  la tension de sortie du générateur, appliquée au filtre.
- Par cohérence, puisque nous prenons en compte la résistance interne du générateur, il n'y a aucune raison pour que celle de L n'apparaisse pas. Elle représente la résistance, inévitable, du fil utilisé pour la réalisation de l'inductance. Nous l'appellerons  $R_L$ .
- L et R, restent l'inductance et la résistance du filtre élémentaire précédemment analysé.

••• Transmittance du circuit

La méthode de calcul est inchangée,

$$V_{sL}/E = T_L = Z_2/(Z_1+Z_2) \tag{Fi-58}$$

avec  $Z_2 = R$  et,  $Z_1 = \rho + R_L + p.L$  (Fi-59)

$$T_L = R/(R + \rho + R_L + p.L) = R/ [ (R + \rho + R_L) . (1 + p.L/(R + \rho + R_L))] \tag{Fi-60}$$

une mise en forme permettra d'éclairer cette équation. On peut l'écrire

$$T_L = [R/(R + \rho + R_L)] . [1/ (1 + p.L/(R + \rho + R_L))] \tag{Fi-61}$$

- Dans laquelle apparaît
- l'équation d'un circuit atténuateur  $K = R/(R + \rho + R_L)$  (Fi-62)  
dont l'action est indépendante de la fréquence ( pas d'opérateur  $p$ )
- la constante de temps du circuit  $\tau_L = L/(R + \rho + R_L)$  (Fi-63)  
appartenant à un filtre passe bas  $T_{PB} = 1/ (1 + p.L/(R + \rho + R_L)) = 1/ (1 + p.\tau_L)$  (Fi-64)

La fonction de transfert  $T_L$  recherchée est le produit du coefficient K par la transmittance  $T_{PB}$ .

$$T_L = K . T_{PB} \tag{Fi-65}$$

La pulsation caractéristique du filtre est  $\omega_{OL} = 1/\tau_L$  (Fi-66)

Vis à vis du filtre élémentaire:

$$\omega_{OL}/\omega_0 = f_{OL}/f_0 = \tau/\tau_L = (L/R)/(L/(R + \rho + R_L)) = (R + \rho + R_L)/R = 1/K \tag{Fi-67}$$

$$\omega_{OL}/\omega_0 = f_{OL}/f_0 = 1 + ((\rho + R_L)/R) \tag{Fi-68}$$

La pulsation caractéristique du filtre est plus élevée que dans le filtre élémentaire.

Il en va de même pour la fréquence.

**A remarquer:** la relation entre l'affaiblissement de la tension de sortie, via K et le déplacement de la fréquence de coupure.

Comme pour le filtre R.C, il faut tenir compte des caractéristiques du générateur ainsi que de la résistance propre à l'inductance, lors de l'élaboration d'un tel filtre.

L'asymptote horizontale du filtre a pour ordonnée

$$G = 20.log(K) = 20.log ( R/(R + \rho + R_L)) = - 20.log ( 1 + ((\rho + R_L)/R) ) \tag{Fi-69}$$

Cette formule montre l'affaiblissement du signal de sortie vis à vis du circuit élémentaire.

soit  $G = -20 \cdot \log(\omega_{OL}/\omega_0) = -20 \cdot \log(f_{OL}/f_0)$  (Fi-70)

qui montre à nouveau l'influence du facteur K d'atténuation

Conséquence de (Fi-65) et (Fi-69), à la fréquence de coupure, la courbe de réponse passera au point ( $f_{OL}$ , G-3)

\*\*\* **Charge vue par le générateur**

Le courant  $i_L$  qui circule dans le circuit est:

$$i_L = E / (R + \rho + R_L + p.L) = [E / (R + \rho + R_L)] \cdot [1 / (1 + p.\tau_L)]$$
 (Fi-71)

expression, dans laquelle nous pouvons poser  $i_{L0} = E / (R + \rho + R_L)$ , (Fi-72)

Ainsi  $i_L = i_{L0} \cdot [1 / (1 + p.\tau_L)]$  (Fi-73)

Ce qui veut dire qu'à des fréquences inférieures à  $f_{OL}$ , le générateur débitera un courant voisin de  $i_{L0}$

**Remarque:**  $i_L / i_{L0} = V_{sL} / E = 1 / (1 + p.\tau_L)$  dans ce cas

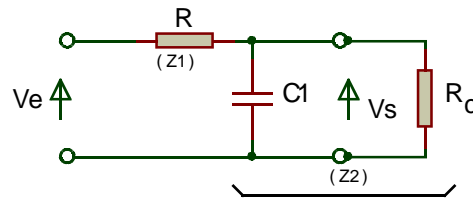
♦ **Influence d'une charge sur le filtre passe bas élémentaire**

♦♦ **Un filtre passe-bas C.R est chargé par une résistance pure**

Le circuit passe bas est identique à notre circuit prototype.

Le générateur est considéré n'avoir aucune influence sur les caractéristiques initiales du filtre.

Une résistance  $R_c$  charge le filtre.



La méthode la plus rapide pour aboutir est de prendre en compte la mise en parallèle de C et  $R_c$ ,

Elle est en lieu et place de  $Z_2$  dans notre pont diviseur potentiométrique.

A  $Z_2$  correspond son inverse, l'admittance  $Y_2 = 1/Z_2$ . (Fi-74)

$Y_2$  est égale à la somme des admittances de chacune de ses branches, donc:

$$Y_2 = p.C + (1/R_c) = (p.C.R_c + 1) / R_c$$
 (Fi-75)

Le retour à  $Z_2$  est immédiat  $Z_2 = 1 / Y_2 = R_c / (p.C.R_c + 1)$  (Fi-76)

Comme vu auparavant la fonction de transfert du filtre est  $T = Z_2 / (Z_1 + Z_2)$ , avec  $Z_1 = R$

La transmittance  $T = [R_c / (p.C.R_c + 1)] / [R + (R_c / (p.C.R_c + 1))] = R_c / (p.C.R_c.R + R + R_c)$  (Fi-77)

En factorisant le dénominateur par  $R + R_c$

on peut écrire  $T = [R_c / (R + R_c)] \cdot [1 / (1 + (p.C.R_c.R / (R + R_c)))]$  (Fi-78)

Il apparaît la constante de temps  $\tau_c = C.R_c.R / (R + R_c)$  du circuit dans laquelle:

$$R_{eq} = R_c.R / (R + R_c)$$
 (Fi-79)

représente la résistance équivalente à R et  $R_c$  parallèles entre elles.

La constante de temps du circuit est donc  $\tau_c = C.R_{eq} = C.R_c.R / (R + R_c)$  (Fi-80)

Appelons  $K_c = R_c / (R + R_c) = 1 / (1 + (R / R_c))$ , (Fi-81)

l'affaiblissement occasionné par la présence de  $R_c$ . Il est inférieur à 1 si  $R_c$  a une valeur finie, et égal à 1 si la valeur de  $R_c$  est infinie.

Ces deux remarques, accompagnées de l'expression de la constante de temps simplifient considérablement l'expression de la transmittance.

$$T = K_c / (1 + p.\tau_c) = K_c \cdot 1 / (1 + p.\tau_c)$$
 (Fi-82)

Remarque:  $\tau_c = C.R_c.R / (R + R_c)$  peut être écrite  $\tau_c = (C.R) \cdot (R_c / (R + R_c))$  (Fi-83)

Or le produit  $C.R = \tau$  la constante de temps du circuit sans sa charge, et  $R_c / (R + R_c) = K_c$

La constante du circuit chargé est donc  $\tau_c = \tau \cdot K_c$ . (Fi-84)

Il en découle que la pulsation caractéristique  $\omega_{0c} = 1/\tau_c = 1/\tau \cdot K_c = \omega_0/K_c$  (Fi-85)

Il en va de même pour la fréquence caractéristique  $f_{0c} = f_0/K_c$  (Fi-86)

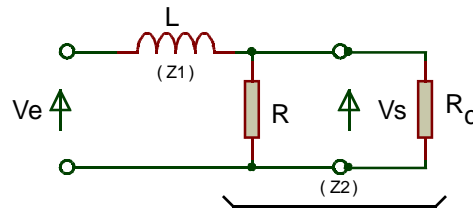
dans la mesure où  $K_c$  est inférieure à 1, et qu'il est situé au dénominateur des deux précédentes relations, les fréquence et pulsation du circuit chargé, seront plus élevées que la fréquence et la pulsation du circuit dépourvu de charge.

**Remarque:** (Fi-76) montre qu'une impédance, ici  $Z_2$ , peut être traduite comme une résistance soumise à une transmittance.  $Z_2 = R_c / (p \cdot C \cdot R_c + 1)$  peut effectivement s'écrire  $Z_2 = R_c \cdot [1 / (p \cdot C \cdot R_c + 1)]$  (Fi-87)

et  $Z_2 / R_c = 1 / (p \cdot C \cdot R_c + 1)$  dans laquelle on reconnaît une transmittance. (Fi-88)

### ♦♦ Un filtre passe-bas L.R est chargé par une résistance pure

Il est conforme au schéma suivant.



La mise en équation est plus immédiate que pour le circuit C.R

Le couplage en parallèle de R et  $R_c$  est immédiatement visible. Ce couplage correspond à une résistance

équivalente  $R_{eq} = R_c \cdot R / (R + R_c)$  (Fi-89)

Sa transmittance est

$$V_s = V_e / (1 + p \cdot L / R_{eq}) \Leftrightarrow V_s / V_e = T(p) = 1 / (1 + p \cdot L / R_{eq}) \quad (Fi-90)$$

Pour l'établir, il a suffi de remplacer R de (Fi-13) par  $R_{eq}$ .

Sa constante de temps est  $\tau_L = L / R_{eq} = L / R_c \cdot R / (R + R_c) = L / R \cdot (R + R_c) / R_c = \tau \cdot (1 + (R / R_c))$  (Fi-91)

Nommons  $K_L = (1 + (R / R_c))$ , (Fi-92)

A cette constante de temps correspond une pulsation caractéristique :

$$\omega_{0L} = 1/\tau_L = 1/\tau \cdot K_L = (1/\tau) \cdot K_c = \omega_0 / K_L \quad (Fi-93)$$

La pulsation caractéristique, et par voie de conséquence la fréquence de coupure d'un circuit passe bas L.R seront inférieures à celles du même circuit dénué de charge.

**Vérification :**  $\omega_0 = 1/\tau = R/L$ . (Fi-94)

En dérivant  $\omega_0$  par rapport à R,  $d\omega_0 = dR/L$  (Fi-95)

Les variations de  $\omega_0$  vont dans le sens des variations de R. Vu que  $R_{eq}$  est inférieure à R .....

### 1-6 Ordre d'un filtre

Dans ce qui précède nous avons rencontré deux filtres

Le passe bas et, le passe haut tout juste survolé.

L'expression respective en s de leur transmittance est:

– pour le passe bas :  $T_{PB(s)} = 1/(1+s)$ ; (Fi-9)

– pour le passe haut :  $T_{PH(s)} = s/(1+s)$ ; (Fi-96)

L'équation de chacun d'eux peut être mis sous la forme d'un rapport de polynômes dans laquelle la variable est s.

Toutes les autres formes de variables pourront être développés avec le risque d'une écriture plus dense.

Autrement dit ces deux transmittances auraient pu être écrite sous la forme:

$$T(s) = N(s)/D(s) = (a_0 \cdot s^0 + a_1 \cdot s^1) / (b_0 \cdot s^0 + b_1 \cdot s^1) \quad (Fi-97)$$

$a_0, a_1$ , sont les coefficients du numérateur,

$b_0, b_1$ , sont les coefficients du dénominateur.

Dans lequel il est possible d'identifier:

$$N(s) = a_0 s^0 + a_1 s^1 \quad (Fi-98)$$

et 
$$D(s) = b_0.s^0 + b_1.s^1 \quad (\text{Fi-99})$$

Tout nombre à la puissance 0 est égal à 1, de ce fait  $s^0=1$

$$N(s) = a_0 + a_1.s^1 \quad (\text{Fi-100})$$

et 
$$D(s) = b_0 + b_1.s^1 \quad (\text{Fi-101})$$

De même l'exposant 1 se la variable est sous entendu mais jamais noté  $s^1 = s$ . Ainsi nous écrirons

$$N(s) = a_0 + a_1.s \quad (\text{Fi-102})$$

et 
$$D(s) = b_0 + b_1.s \quad (\text{Fi-103})$$

**L'ordre d'un filtre est égal au plus haut exposant rencontré dans l'expression de sa fonction de transfert.**

Le filtre passe bas (Low pass) étudié est un filtre **passe bas du 1° ordre**

Le filtre passe haut (High pass) survolé est un filtre **passe haut du 1° ordre.**

Aucun exposant d'un rang supérieur n'y apparaît.

• **Coefficients du filtre passe bas**

par identification nous pouvons déduire ses coefficients.

– Au numérateur :  $a_0=1$  et  $a_1=0$

– Au dénominateur :  $b_0=1$  et  $b_1=1$

• **Coefficients du filtre passe haut**

Le même procédé d'identification est utilisé.

– Au numérateur :  $a_0=0$  et  $a_1=1$

– Au dénominateur :  $b_0=1$  et  $b_1=1$

**Remarques:**

- Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, on s'arrange, à moins qu'il ne soit nul, pour que le terme constant

$$a_0=1 \text{ au numérateur} \Rightarrow a_0=0 \text{ ou } a_0=1$$

- Pour ces mêmes raisons encore obscures, on s'arrange pour que le terme constant  $b_0=1$  au dénominateur.

**Exemple:** Soit le filtre passe bas du 1° ordre dont la fonction de transfert serait  $T=2/(3 + 6.s)$

En factorisant à partir du terme constant 3 du dénominateur  $T=2/(3.(1 + 2.s))$

On l'écrit définitivement  $(2/3) (1/(1 + 2.s))$

Le terme  $(2/3)$  n'apparaît pas, sous forme généralisée dans (Fi-97)

Il est donc nécessaire d'adjoindre à cette formule un terme constant K de telle sorte que:

$$T_{(s)} = K. ( N_{(s)}/D_{(s)} ) \quad (\text{Fi-104})$$

Dans cet exemple :

–  $K=2/3,$

– les coefficients du numérateur :  $a_0=1$  et  $a_1=0$

– ceux du dénominateur :  $b_0=1$  et  $b_1=2$

**Remarques importantes:**

– Les deux filtres passe bas et passe haut ont même dénominateur.

– Le degré du numérateur est inférieur (passe bas) ou égal (passe haut), à celui du dénominateur.

**C'est le degré du dénominateur qui a déterminé, sans ambiguïté, le degré de chaque filtre.**

– **C'est l'expression du numérateur qui détermine le type du filtre.**

– Ces deux dernières remarques sont indépendantes de l'ordre du filtre.

– Une transmittance  $T_{(s)} = (N_{(s)}/D_{(s)})$  du 1° ordre dans laquelle  $N_{(s)}=0$ , quelle que soit la fréquence, n'a pas raison d'être. Cette condition est remplie lorsque  $a_0=0$  et  $a_1=0$ .

– De la même manière si,  $a_0=b_0$  et  $a_1=b_1$ ,  $N_{(s)}=D_{(s)}$  et  $T_{(s)}=1$ , indépendamment de la fréquence, le circuit n'est pas un filtre du 1° ordre.

– Si  $a_0=b_0$  et  $a_1=-b_1$  le filtre sera passe tout. Cette fonction sera explicitée lors de l'étude des filtres actifs.

– De ces deux dernières remarques on déduit que seuls les filtres passe-bas et passe haut, passifs sont envisageable au 1° ordre

♦ **Formulation généralisée**

Dans les prochains chapitre nous rencontreront des filtres dont l'ordre est supérieur voir bien supérieur à 1. Le principe reste le même. Et c'est (Fi-104) que nous utiliserons

$$T_{(s)} = K. ( N_{(s)}/D_{(s)})$$

avec  $N_{(s)} = a_0 + a_1.s + a_2.s^2 + \dots + a_m.s^m$  (Fi-105)

et  $D_{(s)} = b_0 + b_1.s + b_2.s^2 + \dots + b_n.s^n$  (Fi-106)

$N_{(s)}$  et  $D_{(s)}$  sont des polynômes à coefficients constants ( $a_0, a_1, \dots, a_m ; b_0, b_1, \dots, b_n$ ) et de variable  $s$  et pour chacun d'eux

- $m$ , est le degré du polynôme  $N_{(s)}$  ( $a_m$ , supposé non nul),
- $n$ , le degré du polynôme  $D_{(s)}$  ( $b_n$ , supposé non nul),

Conformément à la dernière remarque, dans un filtre le degré  $m$  du numérateur n'excède pas le degré  $n$  du dénominateur.  **$n$  détermine l'ordre du filtre.**

**L'ordre du filtre, est égal au plus haut degré de la variable à coefficient non nul, du polynôme  $D_{(s)}$**

Tout cela indique que (Fi-105) peut être écrit  $N_{(s)} = a_0 + a_1.s + a_2.s^2 + \dots + a_n.s^n$  (Fi-107)

♦♦ **Changement de variable**

Nous avons précédemment convenu que la variable  $s = p.\tau$  .

Puisque  $\tau$  est l'inverse de la pulsation caractéristique  $\omega_0$  du circuit

$$s = p/\omega_0$$
 (Fi-108)

La formule (Fi-104) adaptée à la variable  $p$  devient

$$T_{(p)} = K. ( N_{(p)}/D_{(p)})$$
 (Fi-109)

avec  $N_{(p)} = a_0 + a_1.(p/\omega_0) + a_2.(p/\omega_0)^2 + \dots + a_n.(p/\omega_0)^n$  (Fi-110)

et  $D_{(p)} = b_0 + b_1.(p/\omega_0) + b_2.(p/\omega_0)^2 + \dots + b_n.(p/\omega_0)^n$  . (Fi-111)

Le facteur  $K$  ainsi que les coefficients, sont conservés.

Il en va de même pour la variable  $\omega$ . La formule (Fi-104) adaptée cette variable devient:

$$T_{(\omega)} = K. ( N_{(\omega)}/D_{(\omega)})$$
 (Fi-112)

avec  $N_{(\omega)} = a_0 + a_1.(j.\omega/\omega_0) + a_2.(j.\omega/\omega_0)^2 + \dots + a_n.(j.\omega/\omega_0)^n$  (Fi-113)

et  $D_{(\omega)} = b_0 + b_1.(j.\omega/\omega_0) + b_2.(j.\omega/\omega_0)^2 + \dots + b_n.(j.\omega/\omega_0)^n$  (Fi-114)

Puisque  $j^2 = -1, j^3 = -j, j^4 = 1, j^5 = j$  etc... (Fi-115)

Elles peuvent être mises sous la forme

$$N_{(\omega)} = a_0 - a_2.(j.\omega/\omega_0)^2 + a_4.(j.\omega/\omega_0)^4 + \dots + j.[a_1.(j.\omega/\omega_0) - a_3.(j.\omega/\omega_0)^3 + a_5.(j.\omega/\omega_0)^5 + \dots]$$
 (Fi-116)

et  $D_{(\omega)} = b_0 - b_2.(j.\omega/\omega_0)^2 + b_4.(j.\omega/\omega_0)^4 + \dots + j.[b_1.(j.\omega/\omega_0) - b_3.(j.\omega/\omega_0)^3 + b_5.(j.\omega/\omega_0)^5 + \dots]$  (Fi-117)

Chacune des expression du numérateur et du dénominateur est ramenée à la forme complexe  $A + j.B$

Puisque  $\omega/\omega_0 = f/f_0$  . la fréquence peut être choisie pour variable.

La formule (Fi-104) adaptée à la variable  $f$  devient  $T_{(f)} = K. ( N_{(f)}/D_{(f)})$  (Fi-118)

avec  $N_{(f)} = a_0 + a_1.(j.f/f_0) + a_2.(j.f/f_0)^2 + \dots + a_n.(j.f/f_0)^n$  (Fi-119)

et  $D_{(f)} = b_0 + b_1.(j.f/f_0) + b_2.(j.f/f_0)^2 + \dots + b_n.(j.f/f_0)^n$  (Fi-120)

Ce qui entraîne:

$$N_{(f)} = a_0 - a_2.(f/f_0)^2 + a_4.(f/f_0)^4 + \dots + j.[a_1.(f/f_0) - a_3.(f/f_0)^3 + a_5.(f/f_0)^5 + \dots]$$
 (Fi-121)

et  $D_{(f)} = b_0 - b_2.(f/f_0)^2 + b_4.(f/f_0)^4 + \dots + j.[b_1.(f/f_0) - b_3.(f/f_0)^3 + b_5.(f/f_0)^5 + \dots]$  (Fi-122)

la présence de la variable relative  $X = \omega/\omega_0 = f/f_0$  est évidente

Nous pouvons donc adapter (Fi-104) à cette variable:

Elle devient:  $T_{(X)} = K. ( N_{(X)}/D_{(X)})$  (Fi-123)

avec  $N_{(X)} = a_0 + a_1.(j.X) + a_2.(j.X)^2 + \dots + a_n.(j.X)^n$  (Fi-124)

et  $D_{(X)} = b_0 + b_1.(j.X) + b_2.(j.X)^2 + \dots + b_n.(j.X)^n$  (Fi-125)

Ce qui entraîne: 
$$N(x) = a_0 - a_2 \cdot X^2 + a_4 \cdot X^4 \dots + j \cdot [a_1 \cdot X - a_3 \cdot X^3 + a_5 \cdot X^5 \dots] \quad (\text{Fi-126})$$

et 
$$D(x) = b_0 - b_2 \cdot X^2 + b_4 \cdot X^4 \dots + j \cdot [b_1 \cdot X - b_3 \cdot X^3 + b_5 \cdot X^5 \dots] \quad (\text{Fi-127})$$

De ces dernières formules, sont extraits les arguments du numérateur

$$\arg(N(x)) = \arctan\left(\frac{(a_1 \cdot X - a_3 \cdot X^3 + a_5 \cdot X^5 \dots)}{(a_0 - a_2 \cdot X^2 + a_4 \cdot X^4 \dots)}\right) \quad (\text{Fi-128})$$

et du dénominateur: 
$$\arg(D(x)) = \arctan\left(\frac{(b_1 \cdot X - b_3 \cdot X^3 + b_5 \cdot X^5 \dots)}{(b_0 - b_2 \cdot X^2 + b_4 \cdot X^4 \dots)}\right) \quad (\text{Fi-129})$$

Il en découle l'argument de la transmittance  $T(x)$

$$\arg(T(x)) = \arg(N(x)) - \arg(D(x)) \quad (\text{Fi-130})$$

Pour les autres variables, 
$$\arg(T(f)) = \arg(N(f)) - \arg(D(f)) \quad (\text{Fi-131})$$

$$\arg(T(\omega)) = \arg(N(\omega)) - \arg(D(\omega)) \quad (\text{Fi-132})$$

## 1-7 Le polynôme

– Un polynôme est une somme de monômes, chacun d'eux ayant la même variable que celle du polynôme.

– L'écriture d'un polynôme se fait en plaçant le monôme ayant le plus haut degré à gauche.

Ce qui signifie qu'il est écrit dans l'ordre décroissant des exposants de la variable.

Si  $P(x)$  est ce polynôme dont la variable est  $X$ , il sera formulé :

$$P(x) = c_n \cdot X^n + c_{n-1} \cdot X^{n-1} + \dots + c_1 \cdot X + c_0 \quad (\text{Fi-133})$$

$X$  est la variable et  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$ , sont les termes constants de  $P(x)$

Les monômes  $c_n \cdot X^n, c_{n-1} \cdot X^{n-1}, \dots, c_1 \cdot X$  et  $c_0$  y apparaissent.

Pouvant être écrit  $c_0 = c_0 \cdot X^0 = c_0 \cdot 1$ ,  $c_0$  est un monôme.

La formulation des polynômes de  $T(s)$  suit parfois cet ordre décroissant.

(Fi-107) devient 
$$N(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \quad (\text{Fi-134})$$

et (Fi-106) 
$$D(s) = b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + b_1 \cdot s + b_0 \quad (\text{Fi-135})$$

– Si  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_1$ , sont les racines du polynôme alors, pour chacune des ces valeurs particulière de  $X$ ,

le polynôme  $P(x) = 0$ .

Ce qui signifie que si:

$$X = X_n \Leftrightarrow P(x) = 0,$$

$$X = X_{n-1} \Leftrightarrow P(x) = 0,$$

.....,

$$X = X_2 \Leftrightarrow P(x) = 0,$$

$$X = X_1 \Leftrightarrow P(x) = 0,$$

Ce qui permet formuler le polynôme comme suit

$$P(x) = (X - X_n) \cdot (X - X_{n-1}) \cdot \dots \cdot (X - X_2) \cdot (X - X_1). \quad (\text{Fi-136})$$

Cette formulation est déterminante dans l'analyse des filtres actifs et des systèmes bouclés.

**Exemple :** Pour illustrer ces remarques appliquons les à un polynôme du second degré.

$$P(x) = (X - X_2) \cdot (X - X_1). \quad (\text{Fi-137})$$

Donnons lui pour racine  $X_1 = 2$  et  $X_2 = -1$ , l'expression du polynôme est:

$$P(x) = (X + 1) \cdot (X - 2) = X^2 - X - 2 \quad (\text{Fi-138})$$

Les coefficients de  $P(x)$  sont:  $c_2=1, c_1=-1$  et  $c_0=-2$ .

Le polynôme a été reconstitué sous sa forme première

On y reconnaît la forme polynomiale du trinôme du second degré, souvent formulé :

$$y = a \cdot X^2 + b \cdot X + c. \quad (\text{Fi-139})$$

et dans lequel on aurait recherché les valeurs de  $X$  qui annulent  $y$ .

A l'inverse, en identifiant les coefficients  $a=1=c_2, b=-1=c_1$  et  $c=-2=c_0$

Le discriminant  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 + 8 = 9$ . du trinôme est supérieur à 0 et possède de ce fait 2 racines réelles.

Sa racine carrée  $\Delta^{1/2} = 3$ . Les racines cherchées sont:

$$(-b + \Delta^{1/2})/2.a = (1 + 3)/2 = 2 \text{ la valeur attribuée à } \mathcal{X}_1$$

et  $(-b - \Delta^{1/2})/2.a = (1 - 3)/2 = -1 \text{ la valeur donnée à } \mathcal{X}_2$

♦♦ **Application à une transmittance**

Ce qui précède nous permet de transformer les équations des polynômes de la transmittance  $T(s)$  en les mettant sous forme de produits. Pour le numérateur, par exemple

$$N(s) = (s - s_n).(s - s_{n-1}).....(s - s_2)(s - s_1) \tag{Fi-140}$$

$s_n, s_{n-1}, \dots, s_2, s_1$  sont les racines de  $N(s)$ , ou encore les valeurs de  $s$  qui annulent  $N(s)$   
Il en serait de même pour le dénominateur.

♦♦ **Poles et zéros d'une transmittance**

Puisque  $N(s)$  est au numérateur de  $T(s)$ , toute annulation de  $N(s)$  annule  $T(s)$ . On parle parfois de zéro de transmission si cette condition est remplie.

C'est la raison qui fait appeler ces racines de  $N(s)$  les zéros de la fonction de transfert. Chacune est notée:  $z$  accompagné d'un indice de classement. Sur ce principe le numérateur est momentanément formulé

$$N(s) = (s - z_n).(s - z_{n-1}).....(s - z_2)(s - z_1) \tag{Fi-141}$$

De la même manière le dénominateur  $D(s)$  peut être mis sous la forme d'un produit de facteurs appelons  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1$  ses racines.

$$D(s) = (s - p_n).(s - p_{n-1}).....(s - p_2)(s - p_1) \tag{Fi-142}$$

Pour toute valeur de  $s$  égale à l'une des racines  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1$ , positives le dénominateur s'annule et la transmittance  $T(s)$  tend vers l'infini. Le système est incontrôlé.

Autrement dit, vis à vis du seul dénominateur, pour que  $T(s)$  soit inconditionnellement contrôlé, il faut et il suffit que tous ses pôles, soient négatifs.

**Remarque** : Certaines formulations rencontrées dans la presse peuvent désorienter le lecteur vous rencontrerez souvent l'expression des numérateurs et dénominateur de la transmittance sous les formes

$$N(z) = (z - z_n).(z - z_{n-1}).....(z - z_2).(z - z_1) \tag{Fi-143}$$

$$D(p) = (p - p_n).(p - p_{n-1}).....(p - p_2).(p - p_1) \tag{Fi-144}$$

$z$  et  $p$  sont des variables locales, qui permettent une analyse isolée de chacun des polynômes. il suffit de les substituer par  $s$ , pour que tout rentre dans l'ordre.

Il est important de ne pas confondre  $p$  l'opérateur d'Heaviside avec  $p$  ou  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1$  les pôles

♦♦ **Les racines du polynôme**

En nous limitant momentanément à un polynôme du second degré, applicable comme nous l'avons vu à une transmittance du second ordre, le polynôme s'écrit:

$$P(x) = c_2 . x^2 + c_1 . x + c_0 \tag{Fi-145}$$

Si  $c_0$  est différent de 0 et inférieur ou supérieur à 1, sa factorisation amène

$$P(x) = c_0 . [(c_2/c_0) . x^2 + (c_1/c_0) x + 1] \tag{Fi-146}$$

ce qui permet de définir un **polynôme caractéristique** du second ordre

du type  $P_0(x) = a . x^2 + b . x + 1 \tag{Fi-147}$

à rapprocher bien sûr de  $y = a . x^2 + b . x + c$

avec  $a=c_2/c_0$ ,  $b= c_1/c_0$  et  $c=1$  ;

notre polynôme caractéristique est aussi:  $P_0(x) = (x - \mathcal{X}_2).(x - \mathcal{X}_1). \tag{Fi-148}$

et en final les racines de  $P(x)$  seront:

$$P(x) = c_0 . P_0(x) = c_0 . (x - \mathcal{X}_2).(x - \mathcal{X}_1). \tag{Fi-149}$$

Autrement dit les mêmes que celles de  $P_0(x)$ .

**La factorisation n'a pas modifié les racines du polynôme.**

Le discriminant  $\Delta = b^2 - 4.a.c$ . (Fi-150)

Puisque  $c=1$  la formule du discriminant est simplifiée à  $\Delta = b^2 - 4.a$  (Fi-151)

Nous savons que si:

♦♦  $\Delta = 0$  le polynôme à deux racines  $x_1$  et  $x_2$  identiques, que l'on nomme aussi une racine double. Quoique représenté par un unique point situé sur l'axe des réels, il s'agit de deux points ayant mêmes coordonnées.

Cette remarque est très importante dans la mesure où elle permet de formaliser :

$$P_{0(x)} = (x - x_1).(x - x_2) = (x - x_1)^2 = (x - x_2)^2. \quad (\text{Fi-152})$$

Puisque  $x_1$  et  $x_2$  sont tous deux cette racine double, appelons  $x_0 = -b/2a$ , cette valeur. (Fi-153)

Vis à vis d'elle,  $P_{0(x)} = (x - x_0)^2$ . (Fi-154)

♦♦  $\Delta$  est supérieur à 0,  $\Delta > 0$  le polynôme à deux racines  $x_1$  et  $x_2$  distinctes et réelles.

Sur un graphique, elles se situent sur l'axe des réels.

Chacune de leur valeur est:  $x_1 = (-b/2a) + \Delta^{1/2} = x_0 + \Delta^{1/2}$  (Fi-155)

et  $x_2 = (-b/2a) - \Delta^{1/2} = x_0 - \Delta^{1/2}$  (Fi-156)

les deux racines sont situées à égale distance et de part et d'autre de  $x_0$ .

L'espace qui les sépare est:  $x_1 - x_2 = 2.\Delta^{1/2}$  (Fi-157)

♦♦  $\Delta$  est inférieur à 0,  $\Delta < 0$  le polynôme à deux racines  $x_1$  et  $x_2$  complexes.

Au lycée ne vous a-t-on pas dit que dans ce cas le trinôme, n'avait pas de racines réelles. C'était vrai et vous n'êtes pas allés plus loin parce que les complexes, n'avaient pas été étudiés.

Dans ce cas  $\Delta_{<0} = b^2 - 4.a = j^2 . |b^2 - 4.a|$ , (Fi-158)

dans laquelle  $|b^2 - 4.a|$  est la valeur absolue de  $b^2 - 4.a$  (Fi-159)

Si l'on convient que  $\Delta = |b^2 - 4.a|$ , (Fi-160)

Applicable quel que soit le signe de  $b^2 - 4.a$

afin de respecter les connaissances acquises au lycée, un discriminant négatif peut être noté

$$\Delta_{<0} = j^2 . \Delta \quad (\text{Fi-161})$$

ce qui implique  $\Delta_{<0}^{1/2} = j . \Delta^{1/2}$  (Fi-162)

dans ces conditions, ses racines

$$x_1 = (-b + j.\Delta^{1/2}) / 2.a = (-b/2a) + (j.\Delta^{1/2} / 2.a) = x_0 + (j.\Delta^{1/2} / 2.a) \quad (\text{Fi-163})$$

et  $x_2 = (-b - j.\Delta^{1/2}) / 2.a = (-b/2a) - (j.\Delta^{1/2} / 2.a) = x_0 - (j.\Delta^{1/2} / 2.a)$  (Fi-164)

Les deux racines sont complexes et conjuguées.

leur forme est  $x_1 = x_0 + jv$  et (Fi-165)

$$x_2 = x_0 - jv \quad (\text{Fi-166})$$

$$v = \Delta^{1/2} / 2.a \quad (\text{Fi-167})$$

Les deux racines  $x_1$  et  $x_2$  sont situées sur le plan complexe à l'unique point d'abscisse  $x_0$  et aux points;

d'ordonnée  $j.\Delta^{1/2} / 2.a$  pour  $x_1$  (Fi-168)

et  $-j.\Delta^{1/2} / 2.a$  pour  $x_2$  (Fi-169)

Leurs coordonnées sont  $(x_0, j.\Delta^{1/2} / 2.a)$  pour  $x_1$

et  $(x_0, -j.\Delta^{1/2} / 2.a)$  pour  $x_2$

le conjugué d'un complexe  $c$  est souvent noté  $c^*$ . Dans ce contexte  $x_2 = x_1^*$  (Fi-170)

## 1-8 Les fonctions de transfert du 2° ordre

Comme il a été vu précédemment (Fi-104) la fonction de transfert d'un filtre s'écrit

$$T(s) = K . N(s) / D(s)$$

C'est le dénominateur de sa fonction de transfert qui détermine qu'il est du 2° ordre. En conservant  $s$  pour variable l'exposant le plus haut de la variable est égal à 2.

Nous conviendrons que le dénominateur a préalablement été factorisé afin que le terme constant  $b_0=1$ , de ce fait:

$$D(s) = b_2.s^2 + b_1.s + 1. \quad (\text{Fi-171})$$

Le numérateur détermine le type du filtre.

Il s'écrit 
$$N(s) = a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 \quad (\text{Fi-172})$$

Posons  $K=1$  la fonction de transfert devient  $T(s) = N(s)/D(s)$  (Fi-173)

L'annulation combinée des coefficients de  $N(s)$  vont permettre de définir les types de filtres fondamentaux du second ordre. L'établissement de leur équation type nécessite une mise en forme que nous effectueront dès que possible.

–  $a_0$  est différent de 0,  $a_1=0, a_2=0$   $\Rightarrow T(s) = N(s)/D(s) = a_0 / (b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + 1)$ . (Fi-174)  
est l'équation d'un filtre passe bas du second ordre,

–  $a_0=0, a_1=0, a_2$  différent de 0  $\Rightarrow T(s) = N(s)/D(s) = a_2 \cdot s^2 / (b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + 1)$ . (Fi-175)  
est l'équation d'un filtre passe haut du second ordre, L'établissement de son équation type nécessitera une mise en forme.

–  $a_0=0, a_1$  est différent de 0,  $a_2=0$   $\Rightarrow T(s) = N(s)/D(s) = a_1 \cdot s / (b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + 1)$ . (Fi-176)  
est l'équation d'un filtre passe bande du second ordre.

–  $a_0$  est différent de 0,  $a_1=0, a_2$  différent de 0  $\Rightarrow T(s) = N(s)/D(s) = (a_0 + a_2 \cdot s^2) / (b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + 1)$ . (Fi-177)  
est l'équation d'un filtre réjecteur du second ordre

Remarques:

–  $a_0=0, a_1=0, a_2=0$   $\Rightarrow T(s) = 0$ .

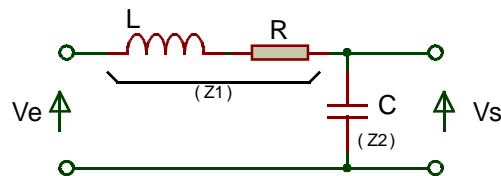
–  $a_0=b_0, a_1=b_1, a_2=b_2$   $\Rightarrow T(s) = 1$ .  
Ces deux filtres n'offrent pas un grand intérêt.

–  $a_0=b_0=1, a_1=-b_1, a_2=b_2$   $\Rightarrow T(s) = (b_2 \cdot s^2 - b_1 \cdot s + 1) / (b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + 1)$ . (Fi-178)  
est l'équation d'un filtre passe tout du second ordre. Il sera utilisé comme correcteur de phase ou pour créer un délai.

– Toutes les autres combinaisons nécessitent une analyse particulière.

### ◆ Filtre prototype L.R.C

Son schéma est le suivant.



Tout comme pour le filtre prototype du premier ordre convenons momentanément

- Que la tension  $V_e$  présente à l'entrée du filtre est délivrée par un générateur parfait.
- Qu' aucun courant n'est délivré à la sortie du filtre.

L'impédance  $Z_1$  est constitué de l'inductance  $L$ , supposée parfaite ,et de la résistance  $R$ , pure, montés en série.

$$Z_1 = R + p \cdot L \quad (\text{Fi-179})$$

L'impédance  $Z_2 = 1/p \cdot C$  est celle du condensateur  $C$ , (Fi-180)

**Remarque:** Dans ces conditions, le générateur est chargé par un circuit R.L.C série.

Le générateur voit donc à ses bornes une charge :

$$Z_c = Z_1 + Z_2 \quad (\text{Fi-181})$$

$$Z_{c(p)} = R + p \cdot L + 1/p \cdot C = (p^2 \cdot L \cdot C + p \cdot C \cdot R + 1)/p \cdot C \quad (\text{Fi-182})$$

vue sous sa forme complexe  $Z_{c(\omega)} = (j^2 \cdot \omega^2 L \cdot C + j \cdot \omega \cdot C \cdot R + 1)/j \cdot \omega \cdot C$  (Fi-183)

qui, en tenant compte que  $j^2 = -1$   $Z_{c(\omega)} = ((1 - \omega^2 L \cdot C) + j \cdot \omega \cdot C \cdot R) / j \cdot \omega \cdot C$  (Fi-184)

A une pulsation  $\omega_0$  telle que  $1 - \omega_0^2 L \cdot C = 0$  soit  $\omega_0^2 L \cdot C = 1$  ( c'est la formule de Thomson) (Fi-185)

$$Z_{c(\omega)} = j \cdot \omega_0 \cdot C \cdot R / j \cdot \omega_0 \cdot C = R \quad (\text{Fi-186})$$

$Z_{c(\omega)}$  passe par un minimum, et est réelle.

De la formule de Thomson on extrait  $\omega_0 = 1 / (L \cdot C)^{1/2} = (L \cdot C)^{-1/2}$  (Fi-187)

Cette pulsation est caractéristique du circuit R.L.C. Elle est appelée pulsation d'accord du circuit.

Par définition pour tous circuits de filtrage, elle correspond à une constante de temps

$$\tau_0 = 1/\omega_0 = (L.C)^{1/2} \quad (\text{Fi-188})$$

La règle des ponts diviseurs potentiométriques  $T = V_s/V_e = Z_2/(Z_1+Z_2)$  (Fi-189)

permet d'écrire:  $V_s/V_e = (1/p.C) / (R + p.L + (1/p.C))$  (Fi-190)

qui aurait pu être trouver en posant  $T = Z_2/Z_c$  (Fi-191)

Quelle que soit le choix fait, la transmittance  $T(p) = 1/(p^2.L.C + p.C.R + 1)$  (Fi-192)

Si l'on considère que le coefficient  $L.C = (L/R).C.R$  (Fi-193)

deux constantes de temps apparaissent au dénominateur  $D(p)$ .

$$\tau_L = L/R \quad \text{et} \quad \tau_C = C.R \quad (\text{Fi-194})$$

On peut donc s'écrire  $D(p) = p^2 \cdot \tau_L \cdot \tau_C + p \cdot \tau_C + 1 = p^2 \cdot \tau_0^2 + p \cdot \tau_C + 1$ . (Fi-195)

L'identification est immédiate  $\tau_0^2 = \tau_L \cdot \tau_C \Leftrightarrow \tau_C = \tau_0^2/\tau_L$  (Fi-196)

reporté dans le dénominateur  $D(p) = p^2 \cdot \tau_0^2 + p \cdot \tau_0 \cdot (\tau_0/\tau_L) + 1$  (Fi-197)

$$D(p) = (p^2/\omega_0^2) + (p/\omega_0 \cdot (\tau_0/\tau_L)) + 1 \quad (\text{Fi-198})$$

par changement de la variable  $D(s) = s^2 + s \cdot (\tau_0/\tau_L) + 1$  (Fi-199)

il est à rapprocher de  $D(s) = b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + 1$ , (Fi-200)

$$\text{si } b_2=1 \text{ et } b_1 = \tau_0/\tau_L \quad (\text{Fi-201})$$

### Remarques:

– Le coefficient constant  $b_2=1$ . C'est donc le coefficient  $b_1$ , le seul **paramétrable** qui détermine l'évolution du dénominateur.

– Le coefficient  $b_1 = \tau_0/\tau_L$  peut s'écrire  $b_1 = 1/(\omega_0 \cdot \tau_L) = 1/L \cdot \omega_0/R$  (Fi-202)

– Ecrivons  $b_1=1/Q$ .  $\Leftrightarrow Q = 1/b_1$  le terme  $L \cdot \omega_0/R = Q$ , (Fi-203)

$Q$  est appelé facteur de qualité du circuit. Dans le passe bande, il fait office de facteur de sélectivité.

La signification de  $Q$  apparaîtra progressivement.

– Par transformation de  $b_1 = \tau_0/\tau_L$  on obtient:

$$b_1 = (L.C)^{1/2}/L/R = R \cdot (L.C/L^2)^{1/2} = R \cdot (C/L)^{1/2} \Leftrightarrow Q = (1/R) \cdot (L/C)^{1/2}, \text{ ou} \quad (\text{Fi-204})$$

$$b_1 = \tau_0^2/\tau_0 \cdot \tau_L = \tau_L \cdot \tau_C/\tau_0 \cdot \tau_L = \tau_C/\tau_0 = C.R \cdot \omega_0 \Leftrightarrow Q = 1/C.R \cdot \omega_0 \quad (\text{Fi-205})$$

– Le facteur de qualité  $Q$  peut donc indépendamment être utilisé sous 3 formes.

– Le coefficient  $b_1$  est souvent formulé  $b_1 = 2 \cdot \zeta$  (Fi-206)

dans lequel  $\zeta$  (zêta) est appelé facteur d'amortissement du circuit.

S'il tend vers 0, à la pulsation  $\omega_0$ , le dénominateur tend à être nul. Et la fonction de transfert tend vers l'infini. En fait le circuit oscille à la pulsation caractéristique.

Le facteur d'amortissement  $\zeta$  traduit, les capacités du circuit à amortir les oscillations. Il en résulte que:

$$\zeta = 1/2.Q \text{ ou} \quad (\text{Fi-207})$$

$$Q = 1/2.\zeta \quad (\text{Fi-208})$$

Ces remarques nous amènent à deux nouvelles formulations du dénominateur en  $s$ .

$$D(s) = s^2 + s/Q + 1 \quad (\text{Fi-209})$$

$$D(s) = s^2 + 2.\zeta.s + 1 \quad (\text{Fi-210})$$

Ces deux dernières formules permettent un changement de variable aisé.

– en  $p$   $D(p) = (p^2/\omega_0^2) + p/(\omega_0.Q) + 1 = (p^2/\omega_0^2) + 2.\zeta.p/\omega_0 + 1$  (Fi-211)

– en  $\omega$   $D(\omega) = (j^2.\omega^2/\omega_0^2) + j.\omega/(\omega_0.Q) + 1 = (j^2.\omega^2/\omega_0^2) + 2.\zeta.j.\omega/\omega_0 + 1$  (Fi-212)

$$D(\omega) = (1 - \omega^2/\omega_0^2) + 2.\zeta.j.\omega/\omega_0 \quad (\text{Fi-213})$$

– en  $f$   $D(f) = (j^2.f^2/f_0^2) + j.f/(f_0.Q) + 1 = (j^2.f^2/f_0^2) + 2.\zeta.j.f/f_0 + 1$  (Fi-214)

$$D(f) = (1 - f^2/f_0^2) + 2.\zeta.j.f/f_0 \quad (\text{Fi-215})$$

– en variable relative  $X$ ,  $D(X) = j^2.X^2 + j.X/Q + 1 = j^2.X^2 + 2.\zeta.j.X + 1$ . (Fi-216)

$$D(X) = (1 - X^2) + 2.\zeta.j.X \quad (\text{Fi-217})$$

♦ **pôles de la transmittance**

Ce sont les racines du dénominateur. En employant la méthode développée au chapitre 1, si:

-  $(2.\zeta)^2 > 4 \Leftrightarrow 4.\zeta^2 > 4 \Leftrightarrow \zeta^2 > 1 \Leftrightarrow \zeta > 1$  (Fi-218)

ou vis à vis de  $Q = 1/2.\zeta \Leftrightarrow Q < 1/2$ , (Fi-219)

Le dénominateur aura 2 poles réels et distincts.

Le discriminant  $\Delta = (2.\zeta)^2 - 4 = 4.\zeta^2 - 4 = 4.(\zeta^2 - 1)$  (Fi-220)

$$\Delta = (1/Q^2) - 4 = (1 - 4.Q^2)/Q^2 \quad (\text{Fi-221})$$

ce qui permet de définir les pôles du dénominateur vis à vis

♦♦ **du facteur d'amortissement  $\zeta$**

$$p_1 = (-2.\zeta/2) + (\Delta^{1/2}/2) = -\zeta + (\zeta^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{Fi-222})$$

$$p_2 = (-2.\zeta/2) - (\Delta^{1/2}/2) = -\zeta - (\zeta^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{Fi-223})$$

Ils sont situés de part et d'autre du pôle fictif  $p_0 = -\zeta$ , sur l'axe des réels, (Fi-224)

ce qui les fait écrire :  $p_1 = p_0 + (\zeta^2 - 1)^{1/2}$  (Fi-225)

et  $p_2 = p_0 - (\zeta^2 - 1)^{1/2}$  (Fi-226)

La distance qui les sépare est:  $p_1 - p_0 = p_0 - p_2 = (\zeta^2 - 1)^{1/2}$  (Fi-227)

La droite verticale passant par ce point  $p_0$  est l'axe de symétrie entre les deux pôles  $p_1$  et  $p_2$

♦♦ **du facteur de qualité  $Q$**

$$p_1 = (-1/2.Q) + [(1/4.Q^2) - 1]^{1/2} = (-1/2.Q) + [(1 - 4.Q^2)/4.Q^2]^{1/2} \quad (\text{Fi-228})$$

$$p_1 = p_0 + [(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q] = p_0 \cdot [1 - (1 - 4.Q^2)^{1/2}] \quad (\text{Fi-229})$$

$$p_2 = p_0 - [(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q] = p_0 \cdot [1 + (1 - 4.Q^2)^{1/2}] \quad (\text{Fi-230})$$

Ils sont *situés de part et d'autre du pôle fictif*  $p_0 = -1/2.Q$  (Fi-231)

*sur l'axe des réels*, et distants de ce dernier de  $(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q$  (Fi-232)

♦♦ **du pôle fictif  $p_0$**

par identification on peut noter:

$$p_1 = p_0 \cdot [1 + (1 - (1/p_0)^2)^{1/2}] \text{ et } p_2 = p_0 \cdot [1 + (1 + (1/p_0)^2)^{1/2}] \quad (\text{Fi-233})$$

dans lesquels n'apparaît que la racine fictive  $p_0$ .

-  $\zeta = 1$  ou  $Q = 1/2$ .

Les deux pôles  $p_1$  et  $p_2$ , sont situés sur l'axe des réels, en un unique point  $p_0 = -1/2.Q = -\zeta$  (Fi-234)

-  $\zeta < 1$  ou  $Q > 1/2$ .

Les deux pôles sont complexes et conjugués.

$$p_1 = -\zeta + j.(\zeta^2 - 1)^{1/2} = p_0 + j.(\zeta^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{Fi-235})$$

$$p_2 = -\zeta - j.(\zeta^2 - 1)^{1/2} = p_0 - j.(\zeta^2 - 1)^{1/2} \quad (\text{Fi-236})$$

$$p_1 = (-1/2.Q) + j. [(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q] = p_0 + j. [(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q] \quad (\text{Fi-237})$$

$$p_1 = (-1/2.Q) \cdot [1 - j. (1 - 4.Q^2)^{1/2}] = p_0 \cdot [1 - j. (1 - 4.Q^2)^{1/2}] \quad (\text{Fi-238})$$

$$p_2 = (-1/2.Q) - j. [(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q] = p_0 - j. [(1 - 4.Q^2)^{1/2}/2.Q] \quad (\text{Fi-239})$$

$$p_2 = (-1/2.Q) \cdot [1 + j. (1 - 4.Q^2)^{1/2}] = p_0 \cdot [1 + j. (1 - 4.Q^2)^{1/2}] \quad (\text{Fi-240})$$

Ils ont même abscisse  $p_0 = -1/2.Q = -\zeta$

leur distance de  $p_0$  est  $p_1 - p_0 = p_0 - p_2 = j.(\zeta^2 - 1)^{1/2}$  dont le module  $(\zeta^2 - 1)^{1/2}$  (Fi-241)

est identique à la distance définie pour les pôles réels

*L'axe des abscisses est l'axe de symétrie entre les deux pôles.*

### Remarque:

De ce qui précède, l'élaboration ou l'analyse d'un filtre nous fait disposer de 3 paramètres pour parvenir au résultat souhaité. En choisissant:

- le facteur d'amortissement  $\zeta$ ,
- le facteur de qualité Q ou,
- Les pôles  $p_1$  et  $p_2$  à condition que leur choix ne soit pas exotique, et réponde aux critères définis dans les lignes qui précèdent.
- Le passage des racines réelles aux racines complexes fait effectuer une rotation de l'axe de symétrie de  $\pi/2$  Le point  $p_0$  en étant le pivot.

Il va sans dire que le dénominateur peut se formuler

$$D(s) = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \quad (\text{Fi-242})$$

$$D(p) = ((p/\omega_0) - p_1) \cdot ((p/\omega_0) - p_2) \quad (\text{Fi-243})$$

$$D(\omega) = ((j \cdot \omega/\omega_0) - p_1) \cdot ((j \cdot \omega/\omega_0) - p_2) \quad (\text{Fi-244})$$

$$D(f) = ((j \cdot f/f_0) - p_1) \cdot ((j \cdot f/f_0) - p_2) \quad (\text{Fi-245})$$

$$D(X) = (j \cdot X - p_1) \cdot (j \cdot X - p_2) \quad (\text{Fi-246})$$

Il apparaît que l'emploi des variables  $s$  et  $X$ , soulagent considérablement l'écriture et la lecture de  $D(s)$

### ♦ Diagramme de Bode du circuit prototype.

La fonction de transfert prototype de notre filtre du second ordre, en choisissant la variable relative  $X$  s'écrit:

$$T(X) = N(X)/D(X) \quad (\text{Fi-247})$$

dans laquelle

$$N(X) = 1 \quad (\text{Fi-248})$$

et  $D(X)$  conforme à (Fi-216)  $D(X) = j^2 \cdot X^2 + j \cdot X/Q + 1 = j^2 \cdot X^2 + 2 \cdot \zeta \cdot j \cdot X + 1$ .

$X \ll 1$  implique que  $D(X)$  est peu différent de 1 et par voie de conséquence le module  $|T(X)|$  de  $T(X)$  est voisin de 1. La tension de sortie  $V_s$  du filtre est peu différente de la tension d'entrée  $V_e$ .

Cette observation amène à tracer une asymptote horizontale d'ordonnée (ou de magnitude)

$$G_{(X \ll 1)} = 20 \cdot \log(|T(X)|) = 20 \cdot \log(1) = 0 \text{ dB} \quad (\text{Fi-249})$$

L'argument de  $T(X)$ ,

$$\arg(T_{(X \ll 1)}) = 0 \quad (\text{Fi-250})$$

$X = 1$  Les conséquences de cette condition seront plus évidentes avec (Fi-217)

Dans cette condition le dénominateur  $D(X) = (1 - X^2) + 2 \cdot \zeta \cdot j \cdot X$  voit son premier terme disparaître et devenir

$$D_{(X=1)} = 2 \cdot \zeta \cdot j \cdot X = j \cdot X/Q \quad (\text{Fi-251})$$

La fonction de transfert

$$T_{(X=1)} = 1/D_{(X=1)} = 1/2 \cdot \zeta \cdot j \cdot X = 1/j \cdot X/Q \quad (\text{Fi-252})$$

$$T_{(X=1)} = -j/2 \cdot \zeta \cdot X = -j \cdot Q/X \quad (\text{Fi-253})$$

pour aboutir à

$$T_{(X=1)} = -j/2 \cdot \zeta = -j \cdot Q \quad (\text{Fi-254})$$

Le module de  $T_{(X=1)}$  est

$$|T_{(X=1)}| = Q \quad (\text{Fi-255})$$

A ce moment la courbe passe par le point  $G_{(X=1)} = 20 \cdot \log(Q)$

(Fi-256)

$T_{(X=1)}$  ne comporte aucun terme réel. Elle est purement imaginaire (au sens mathématique). Son argument s'en déduit immédiatement.

$$\arg(T_{(X=1)}) = -\pi/2 \text{ soit } -90^\circ \quad (\text{Fi-257})$$

$X \gg 1$  C'est à nouveau (Fi-217) notre guide

Dans cette condition le dénominateur  $D(X) = (1 - X^2) + 2 \cdot \zeta \cdot j \cdot X \Rightarrow D_{(X \gg 1)} = -X^2 + 2 \cdot \zeta \cdot j \cdot X$

(Fi-258)

dont le carré du module est  $|D_{(X \gg 1)}|^2 = X^4 + 4 \cdot \zeta^2 \cdot X^2 = X^4 + (X/Q)^2$

(Fi-259)

Le terme  $(X/Q)^2$  est négligeable devant  $X^4$  et  $|D_{(X \gg 1)}|^2 = X^4$  soit  $|D_{(X \gg 1)}| = X^2$

(Fi-260)

**Remarque:** L'extraction de la racine carrée de  $X^4$  donne le résultat  $X^4 = + \text{ou} - X^2$  or, le terme  $-X^2$  apparaît dans (Fi-258), ce terme est l'unique solution possible d'autant qu'il se substitue à  $j^2 X^2$ .

Dans cette zone où la fréquence est bien supérieure à la fréquence de coupure  $T_{(X \gg 1)} = 1/-X^2 = -1/X^2$

(Fi-261)

Son module

$$|T_{(X \gg 1)}| = 1/X^2 \quad (\text{Fi-262})$$

Il en découle  $G_{(X \gg 1)} = 20 \cdot \log(1/X^2) = -2 \cdot 20 \cdot \log(X) = -40 \cdot \log(X)$

(Fi-263)

Sur le plan de Bode c'est l'équation d'une droite oblique . C'est une asymptote oblique  
 On peut remarquer que son évolution est 2 fois plus rapide que celle d'un filtre du 1° ordre.

Elle intercepte l'asymptote horizontale au point  $1/X^2 = 1$  soit à  $X=1$  . (Fi-264)

Or  $X=\omega/\omega_0 = f/f_0$  . De ce fait le point d'interception sur le plan de bode est réalisé à la pulsation  $\omega=\omega_0$  ou à  $f=f_0$  , suivant la variable choisie:

- ( 20.Log(1),  $\omega_0$  ) soit ( 0,  $\omega_0$  ) si la variable est la pulsation  $\omega$
- ( 20.Log(1),  $f_0$  ) soit ( 0,  $f_0$  ) si la variable est la fréquence  $f$

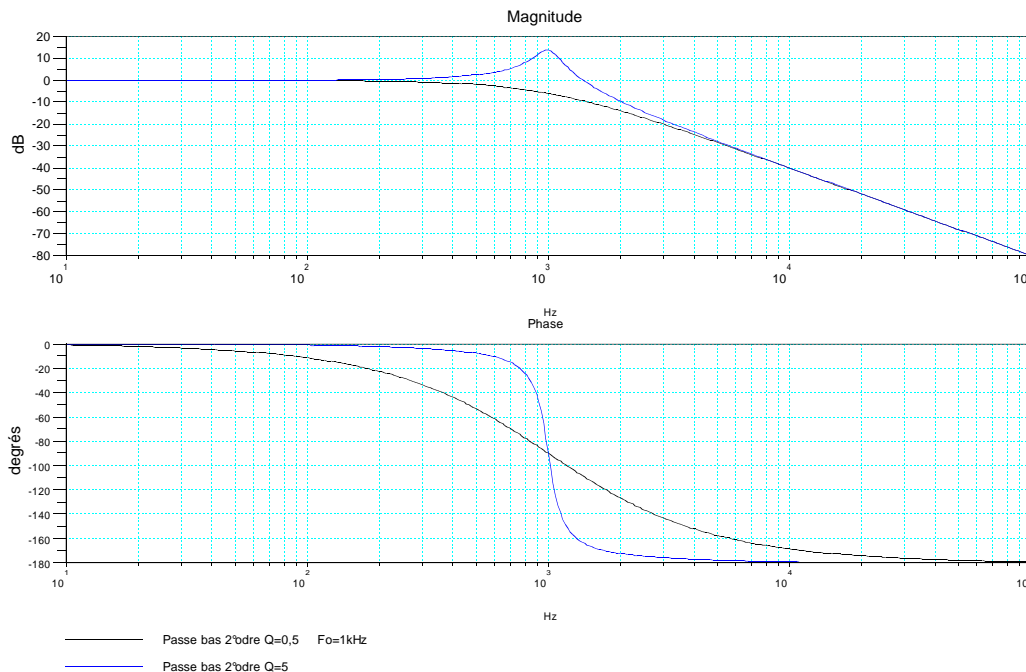
En ce qui concerne l'argument  $T_{(X \gg 1)} = 1/-X^2$  doit s'écrire  $T_{(X \gg 1)} = 1/j^2 X^2$

Son expression est réelle mis  $j^2$  indique un argument

$$\arg(T_{(X \gg 1)}) = -\pi = -180^\circ . \quad (\text{Fi-265})$$

Le signe - est signifie que  $j^2$  est au dénominateur. A noter que  $T_{(X \gg 1)} = 1/j^2 X^2 = j^2 / X^2$  . Cette dernière expression aurait défini un  $\arg(T_{(X \gg 1)}) = \pi = 180^\circ$  . ce qui mathématiquement n'est pas faux, mais cette valeur n'aurait pas permis un tracé continu de la phase.

La figure suivante illustre l'allure d'un tel filtre « calé » à 1kHz , pour  $Q=0,5$  et  $Q=5$ .



**Remarques:**

- La définition des pentes des asymptotes obliques des filtres du 1° et 2° degré étudiés , sont volontairement ommises. Elles seront déterminées lors de l'étude des diagrammes asymptotiques.
- L'influence des caractéristiques du générateur et de ce qui précède ce type de filtre, ainsi que l'incidence du circuit qui le charge sera vu dans le chapitre sur les filtres passifs.

**Annexe A** Diagramme de bode, d'un filtre passe bas du 1° ordre sur SCILAB

```
//***** Filtre passe bas du 1° ordre *****
// Fréquence minimale de tracé
fmin=10;
// Fréquence max , inférieure à 100kHz, sinon Scilab majore de une décade supplémentaire
// 10kHz ne suffisent pas et 1MHz c'est excessif
fmax=9.99*10^4;
// Pas d'analyse
```

```

pas=0.01;
// Fréquence de coupure du filtre que vous pouvez faire varier
f0=1000;
// calcul de la pulsation correspondante
w0=2*pi*f0
// il s'agit de polynômes dont p est la variable
p=poly(0,'p');
// fonction de transfert dont la variable est p
psvc=1/(1+(p/w0));
// Initialise le tracé
xdel();
xselect();
psvc=syslin('c',psvc);
// trace
bode(psvc,fmin,fmax,pas,['Passe bas'+ ' Fo='+string(f0/1000)+'kHz' ]);

```

**Annexe B** programmation du diagramme de bode, d'un filtre passe bas du 2° ordre sur SCILAB pour deux valeurs de Q

```

//***** Filtre passe bas du 2° ordre *****
// Fréquence minimale de tracé
fmin=10;
fmax=9.99*10^4;
pas=0.01;

// Les deux valeurs de Q que vous pouvez faire varier
Q1=0.5;
Q2=5;

// fréquence de coupure du filtre que vous pouvez faire varier
f0=1000;
// pulsation correspondante
w0=2*pi*f0

// il s'agit de polynômes dont p est la variable
p=poly(0,'p');
// fonctions de transfert dont la variable est p

// pour Q=0,5
c1=1/(1+(p/(Q1*w0))+ (p/w0)^2);
// Pour Q=5
c2=1/(1+(p/(Q2*w0))+ (p/w0)^2);

// Initialise le tracé
xdel();
xselect();
c1=syslin('c',c1);
c2=syslin('c',c2);

// trace les courbes de réponse et de phase
bode([c1;c2],fmin,fmax,pas,['Passe bas 2°ordre Q=0,5'+ ' Fo='+string(f0/1000)+'kHz';
['Passe bas 2°ordre Q=5' ]]);

```