

- Les analogies électro mécano acoustiques -

A l'avènement de l'électricité, les électriciens de l'époque, comparait ses effets en faisant des analogies avec les éléments mécaniques. Des termes tel que *force électromotrice*, *force contre électromotrice*, toujours employées, en sont les témoins. Le comportement des composants, d'un circuit électrique alternatif, était analysé en faisant l'analogie avec des éléments mécaniques vibrants. L'inductance était alors comparée à une masse et la capacitance à une élasticité (appelée aussi compliance). Des comparaisons avec les circuits hydrauliques avaient également lieu. Des termes comme débit et courant en sont des exemples concrets.

Il est remarquable de constater que l'ensemble de ces circuits, issus de milieux apparemment différents sont régis par un même système d'équations différentielles. C'est en identifiant les constantes et les variables de chacune des équations que nous aboutirons aux analogies.

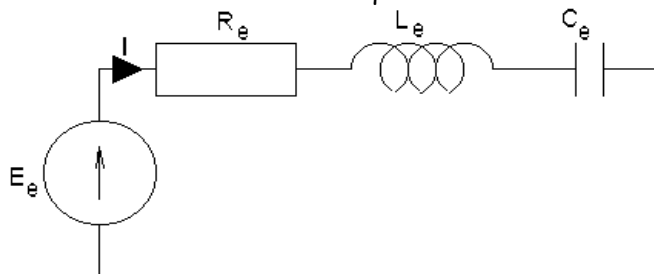
C'est un outil formidable d'aide, à la compréhension, et à la modélisation. Puisque des éléments sont analogues, nous pouvons les représenter schématiquement en employant une unique symbolique. Par convention, ce sont les symboles électriques qui sont utilisés, sans doute pour leur simplicité.

Seules les analogies de type impédance seront développées, ce sont les plus courantes, et surtout les mieux adaptées à la modélisation des éléments électroacoustiques.

Les expressions situées entre [...] sont les équations aux dimensions de la grandeur considérée. Elles contribuent à la vérification de l'homogénéité d'une équation.

2-1- Analogies électro mécaniques

Considérons le schéma électrique suivant.



L'équation de son circuit est : $E_e = L_e \cdot d^2Q/dt^2 + R_e \cdot dQ/dt + Q/C_e$ (AN-1)

Avec :

E_e le générateur de force électromotrice E_e , exprimée en volts (V) $[M.L^2.T^{-2}.Q^{-1}]$, qui débite

I , l'intensité de courant, exprimé en Ampères (A) $[Q.T^{-1}]$,

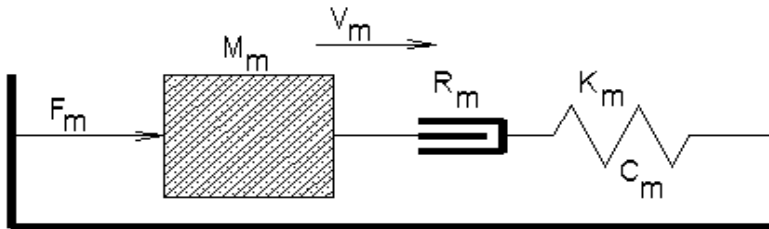
Q la quantité d'électricité, en Coulombs (C) $[Q]$.

L_e l'inductance, en Henry (H) $[L^2.Q]$

R_e la résistance électrique, en Ohms (Ω) $[M.L^2.T^{-1}.Q^{-2}]$

C_e la capacitance, en Farads (F) $[M^{-1}.L^{-2}.T^2.Q^2]$

A partir du schéma mécanique suivant, où la référence des forces est représentée en trait gras,



L'équation du circuit mécanique constitué du générateur de force F_m exprimée en Newtons $[M.L.T^{-2}]$, appliquée à l'ensemble M_m , R_m et une raideur K_m , s'écrit :

$$F_m = M_m d^2 X/dt^2 + R_m \cdot dX/dt + K_m \cdot X \quad (\text{AN-2})$$

avec

X le déplacement, en mètres $[L]$
 M_m la masse mécanique, en kg $[M]$
 R_m la résistance mécanique, en N/s ou Ohm mécanique $[M.T^{-1}]$
 K_m la raideur en N/m $[M.T^{-2}]$

L'inverse de la raideur est la compliance $C_m = 1/K_m$ (AN-3)

Et ainsi interprétée AN-2 s'écrit:

$$F_m = M_m d^2 X/dt^2 + R_m \cdot dX/dt + X/C_m \quad (\text{AN-4})$$

L'emploi de l'opérateur d'HEAVISIDE $p = d/dt = j\omega$, permet d'écrire:

En partant des relations AN-1 et AN-4:

$$E_{e(p)} = p^2 \cdot L_e \cdot Q + p \cdot R_e \cdot Q + Q/C_e \Leftrightarrow E_{e(p)} = Q \cdot (p^2 \cdot L_e + p \cdot R_e + 1/C_e) \quad (\text{AN-5})$$

pour le réseau électrique, et

$$F_{m(p)} = p^2 \cdot M_m \cdot X + p \cdot R_m \cdot X + X/C_m \Leftrightarrow F_{m(p)} = X \cdot (p^2 \cdot M_m + p \cdot R_m + 1/C_m) \quad (\text{AN-6})$$

pour le réseau mécanique.

Sachant que dans un circuit électrique, l'intensité du courant, I , est la dérivée première de la quantité d'électricité Q par rapport au temps.

La formule liant la quantité d'électricité à l'intensité de courant $dQ = I dt$ (AN-7)

Permet d'écrire $I = p \cdot Q$, (AN-8)

ou $Q = I/p$, (AN-9)

permet la transformation de AN-5 sous la forme

$$E_{e(p)} = (I/p) \cdot (p^2 \cdot L_e + p \cdot R_e + 1/C_e) \Leftrightarrow E_{e(p)} = I \cdot (p \cdot L_e + R_e + 1/p \cdot C_e) \quad (\text{AN-10})$$

De même, dans un circuit mécanique, la vitesse V , de déplacement est la dérivée première de l'espace parcouru X par rapport au temps ainsi $dX = V \cdot dt$ (AN-11)

En conservant la variable p $V = p \cdot X$ (AN-12)

ou $X = V/p$ (AN-13)

permettant la transformation de AN-6

$$F_{m(p)} = (V/p) \cdot (p^2 \cdot M_m + p \cdot R_m + 1/C_m) \Leftrightarrow F_{m(p)} = V \cdot (p \cdot M_m + R_m + 1/p \cdot C_m) \quad (\text{AN-14})$$

Remarque

L'emploi de l'opérateur p a grandement facilité la transformation des équations.

L'écriture différentielle aurait amené à des changements de variables, qui n'auraient pas permis les factorisations aisées que nous avons opérées.

Le rapprochement entre, AN-5 et AN-10 d'une part et ,AN-6 et AN-14 d'autre part, met en évidence les analogies électro mécaniques reportées dans le tableau suivant :

Réseau Mécanique				Réseau Electrique		
Grandeur	Symbole	Energie		Grandeur	Symbole	Energie
Force	F_m		<->	Force électro motrice	E_e	
Déplacement	X		<->	Quantité d'électricité	Q	
Vitesse	V		<->	Intensité de courant	I	
Masse	M_m	$M_m V^2 / 2$	<->	Inductance	L_e	$L_e I^2 / 2$
Résistance	R_m	$R_m V^2$	<->	Résistance	R_e	$R_e I^2$
Compliance	C_m	$X^2 / 2.C_m$	<->	Capacitance	C_e	$U^2 / 2.C_e$

2-2- Analogies mécano acoustiques

Une pression, exprimée en Pascals [$M.L^{-1}.T^{-2}$], est le rapport d'une force mécanique sur une surface soit

$$P = F / S. \quad (AN-15)$$

En soumettant la force précédente $F_{m(p)}$ à un élément de surface S de l'ensemble mécanique, AN-14 s'écrit

$$F_{m(p)} / S = (V/S) \cdot (p \cdot M_m + R_m + 1/p \cdot C_m) \quad (AN-16)$$

Si S est en contact avec l'air, nous pouvons nous considérer dans un réseau acoustique.

En multipliant haut et bas le second terme de cette nouvelle équation, et en identifiant la pression,

$$P_a = (V \cdot S / S^2) \cdot (p \cdot M_m + R_m + 1/p \cdot C_m) \quad (AN-17)$$

Et convenons que

$$V_a = V \cdot S \quad (AN-18)$$

V_a est alors le flux de vitesse acoustique.

Car le produit d'un champ de vecteur par une surface est appelé flux. Il s'exprime en m^3 /seconde. [$L^3.T^{-1}$]

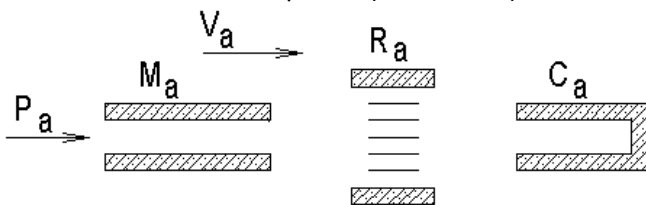
L'expression de la pression acoustique devient :

$$P_a = V_a \cdot (p \cdot M_m / S^2 + R_m / S^2 + 1/p \cdot C_m \cdot S^2) \quad (AN-19)$$

Que nous écrivons définitivement :

$$P_a = V_a \cdot (p \cdot M_a + R_a + 1/p \cdot C_a) \quad (AN-20)$$

Le schéma, utilisant la symbolique acoustique, est :



avec la masse ou inertance acoustique $M_a = M_m / S^2$, (AN-21)
 en kg / m^4 [$M.L^{-4}$],

la résistance acoustique $R_a = R_m / S^2$ (AN-22)
 en Ohm acoustique [$M.L^{-4}.T^{-1}$]

et la compliance acoustique $C_a = C_m \cdot S^2$ (AN-23)
 exprimée en $m^5 / Newton$ [$M^{-1}.L^4.T^2$].

Remarque-1:

Le passage d'un réseau mécanique vers un réseau acoustique s'est effectué à travers une surface.

Remarque-2:

En développant, $V_a = V \cdot S = S \cdot dX/dt$ soit $V_a = p \cdot S \cdot X$ (AN-24)

Le produit $S \cdot X$ représente un volume. Nous l'appellons V_b afin de bien le discerner de la vitesse de déplacement V et du flux de vitesse acoustique V_a

$$V_a = p \cdot V_b \quad (AN-25)$$

Le tableau suivant récapitule les analogies entre les trois réseaux.

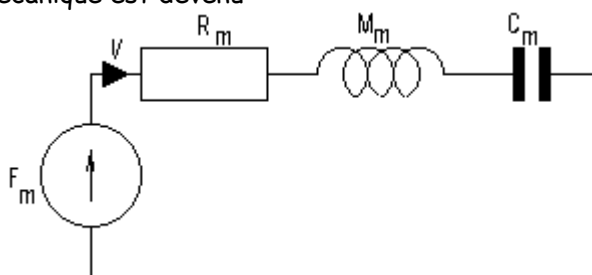
Réseau Mécanique			Réseau Electrique			Réseau Acoustique	
Grandeur	Symbole		Grandeur	Symbole		Grandeur	Symbole
Force	F_m	<->	Force électro motrice	E_e	<->	Pression	P_a
Déplacement	X	<->	Quantité d'électricité	Q	<->	Volume	V_b
Vitesse	V	<->	Intensité de courant	I	<->	Flux de vitesse	V_a
Masse	M_m	<->	Inductance	L_e	<->	Inductance	M_a
Résistance	R_m	<->	Résistance	R_e	<->	Résistance	R_a
Compliance	C_m	<->	Capacitance	C_e	<->	Compliance	C_a

Remarque Le flux d'accélération est important dans la modélisation d'un HP ou d'un microphone.

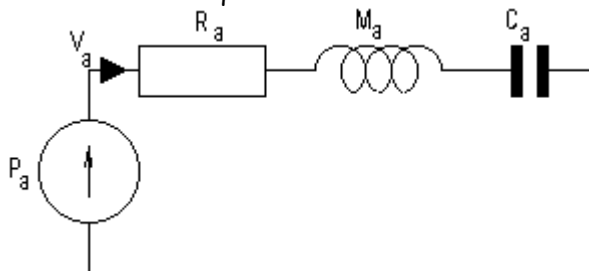
Nous pouvons le définir à partir de AN-24 $\Phi_a = p \cdot V_a$ (AN-26)

et $\Phi_a = p^2 \cdot S \cdot X$ (AN-27)

La représentation schématique du réseau électrique est inchangée. Par contre le schéma du réseau mécanique est devenu



et le réseau acoustique



2-3- Impédances

Elles sont faciles à mettre en évidence en partant du modèle électrique.

En partant de l'équation AN-10

$$E_{e(p)} / I = Z_e \quad (\text{AN-28})$$

est l'impédance du circuit qui charge le générateur ,

$$Z_e = (p \cdot L_e + R_e + 1 / p \cdot C_e) \quad (\text{AN-29})$$

Elle s'exprime en Ohms $[M.L^2.T^{-1}.Q^{-2}]$.

De même en partant de AN-14 et par analogie

$$F_{m(p)} / V = Z_m \quad (\text{AN-30})$$

C'est l'impédance mécanique du circuit $[M.T^{-1}]$.

$$Z_m = (p \cdot M_m + R_m + 1/p.C_m) \quad (\text{AN-31})$$

Elle s'exprime en Ohms mécaniques ou en Newton seconde /mètre.

En substituant p par $j.\omega$ son équivalent complexe, ω est la pulsation en radians par seconde (rd/s) $[T^{-1}]$

$$Z_m = (j.\omega \cdot M_m + R_m + 1 / j.\omega.C_m) \quad (\text{AN-32})$$

$$\text{ou, } Z_m = (j.\omega \cdot M_m + R_m - j/\omega.C_m) \quad (\text{AN-33})$$

On fait apparaître les réactances:

de M_m ,
$$X_{Mm} = M_m \cdot \omega \quad , \quad (\text{AN-34})$$

et de C_m
$$X_{cm} = 1/C_m \cdot \omega \quad (\text{AN-35})$$

Une factorisation de j dans **AN-31**

$$Z_m = R_m + j (M_m \cdot \omega - 1/C_m \cdot \omega) \quad (\text{AN-36})$$

soit
$$Z_m = R_m + j \cdot X_m \quad , \quad (\text{AN-37})$$

met en évidence la réactance totale de l'impédance du circuit mécanique.

$$X_{mt} = M_m \cdot \omega - 1/C_m \cdot \omega = X_{Mm} - X_{cm} \quad (\text{AN-38})$$

Le même procédé est utilisé dans le circuit acoustique. De **AN-20** nous tirons

$$P_a / V_a = Z_a \quad (\text{AN-39})$$

C'est l'impédance du circuit acoustique. Elle est le quotient complexe de la pression acoustique P_a supposée uniforme sur toute la surface S , par le flux de vitesse V_a engendré à travers cette même surface.

$$Z_a = (\rho \cdot M_a + R_a + 1/\rho \cdot C_a) \quad (\text{AN-40})$$

et ainsi:
$$Z_a = (j \cdot \omega \cdot M_a + R_a - j/\omega \cdot C_a) \quad (\text{AN-41})$$

La réactance de la masse acoustique

$$X_{Ma} = M_a \cdot \omega \quad , \quad (\text{AN-42})$$

et celle de la compliance

$$X_{ca} = 1/C_a \cdot \omega \quad , \quad (\text{AN-43})$$

permettent de déterminer la réactance acoustique totale de l'impédance du circuit acoustique.

$$X_{at} = M_a \cdot \omega - 1/(C_a \cdot \omega) = X_{Ma} - X_{ca} \quad (\text{AN-44})$$

2-4- Conséquences

En nous référant à un circuit électrique, les lois d' OHM, de KIRCHOFF, de THEVENIN, de NORTON, etc., sont applicables aux réseaux mécaniques et acoustiques.

Nous pourrions trouver des analogies à des réseaux thermo dynamiques, hydrauliques, financiers, etc., en fait à tous les ensembles soumis et réactifs à des variations. (une variation de température, une dévaluation monétaire, sont des exemples).

La connaissance des analogies permet l'étude d'un système, dans un milieu autre que celui auquel il est destiné. C'est le cas typique d'une suspension automobile, préalablement évaluée grâce à un circuit électrique analogue.