

Partie numérique

Exercice 1

1. Calculer A

$$A = \frac{8 + 3 \times 4}{1 + 2 \times 1,5}$$

$$A = \frac{8 + 12}{1 + 3} = \frac{20}{4} = \boxed{5}$$

2. Pour calculer A un élève a tapé sur sa calculatrice la succession de touches ci-dessous :

Expliquer pourquoi il n'obtient pas le bon résultat.

Avec la succession de touches, la calculatrice donnera le résultat de : $8 + 3 \times 4 \div 1 + 2 \times 1,5$.

Ce calcul ne respecte pas les priorités, il aurait fallu placer le numérateur et le dénominateur de la fraction entre parenthèses.

Exercice 2

Trois personnes, Aline, Bernard et Claude ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac.

1. Le contenu des sacs est le suivant

Sac d'Aline :

5 billes rouges

Sac de Bernard :

10 billes rouges
et
30 billes noires

Sac de Claude :

100 billes rouges
et
3 billes noires

Laquelle de ces personnes a la probabilité la plus grande de tirer une boule rouge ?

La probabilité pour Aline de tirer une bille rouge est $\frac{5}{5} = 1$.

La probabilité pour Bernard de tirer une bille rouge est $\frac{10}{10 + 30} = 0,25$.

La probabilité pour Claude de tirer une bille rouge est $\frac{100}{100 + 3} < 1$.

Aline a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge.

2. On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.

Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ?

La probabilité pour Bernard de tirer une bille rouge est 0,25.

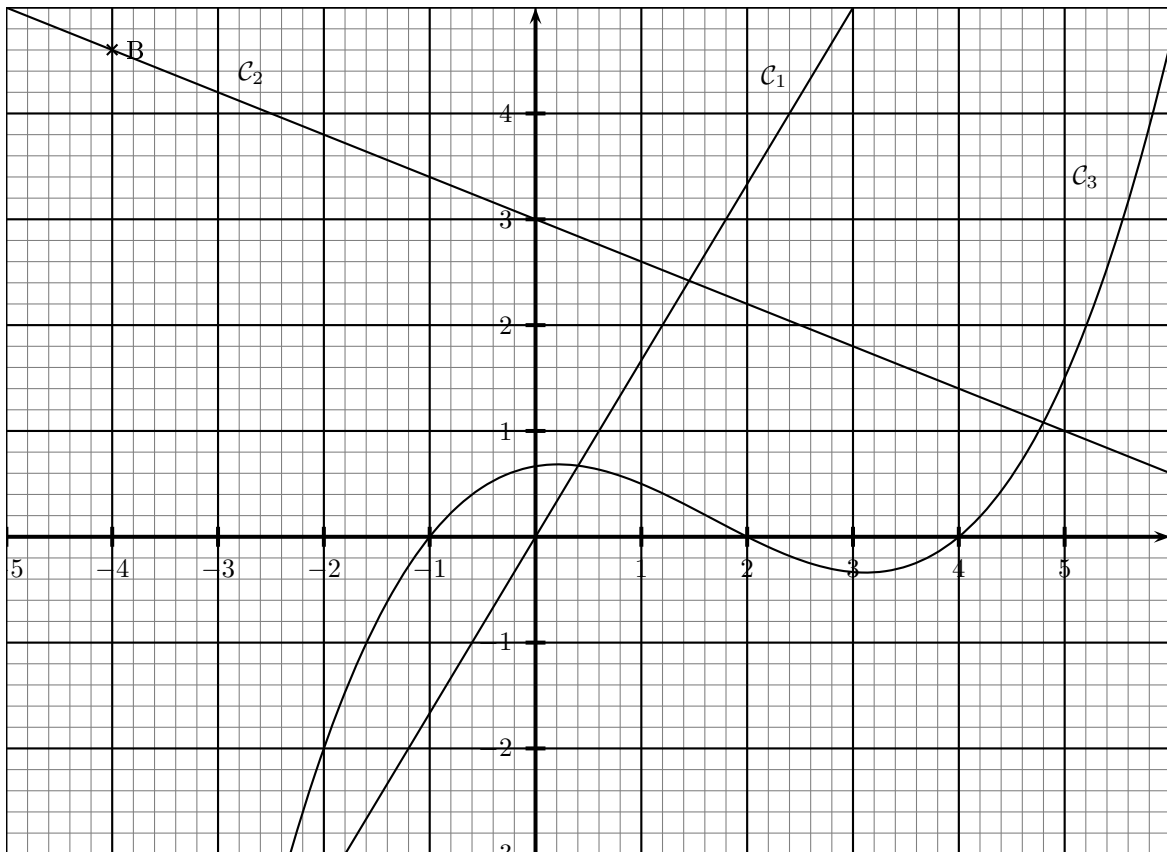
$$\frac{5}{20} = 0,25$$

En rajoutant dans le sac d'Aline, elle aura 20 billes en tout et la probabilité de tirer une bille rouge sera 0,25, comme pour Bernard.

Exercice 3

On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions. Ces représentations sont nommées \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 . L'une d'entre elles est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Une autre est la représentation graphique de la fonction f telle que $f : x \mapsto -0,4x + 3$



1. Lire graphiquement les coordonnées du point B.
Les coordonnées du point B sont $(-4; 4,6)$.
2. Par lecture graphique, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_3 avec l'axe des abscisses.
Il y a trois points d'intersection dont les abscisses sont : $-1; 2$ et 4 .
3. Laquelle de ces représentations est celle de la fonction linéaire? Justifier.
La seule représentation qui est une droite passant par l'origine est C_1 , c'est donc la représentation de la fonction linéaire.
4. Laquelle de ces représentation est celle de la fonction f ? Justifier.
La fonction f est une fonction affine non linéaire. Elle est donc représentée par une droite qui ne passe pas par l'origine, c'est à dire par C_2 .
5. Quel est l'antécédent de 1 par la fonction f ? Justifier par un calcul.
L'antécédent de 1 par la fonction f est le nombre x tel que $f(x) = 1$, c'est à dire tel que

$$-0,4x + 3 = 1$$

$$-0,4x = 1 - 3 = -2$$

$$x = -2 \div (-0,4) = 5$$
 L'antécédent de 1 par la fonction f est 5 .
6. A est le point de coordonnées $(4,6; 1,2)$. A appartient-il à C_2 ? Justifier par un calcul.
Calculons $f(4,6)$:

$$f(4,6) = -0,4 \times 4,6 + 3 = 1,16 \neq 1,2$$
 A n'appartient pas à C_2 .

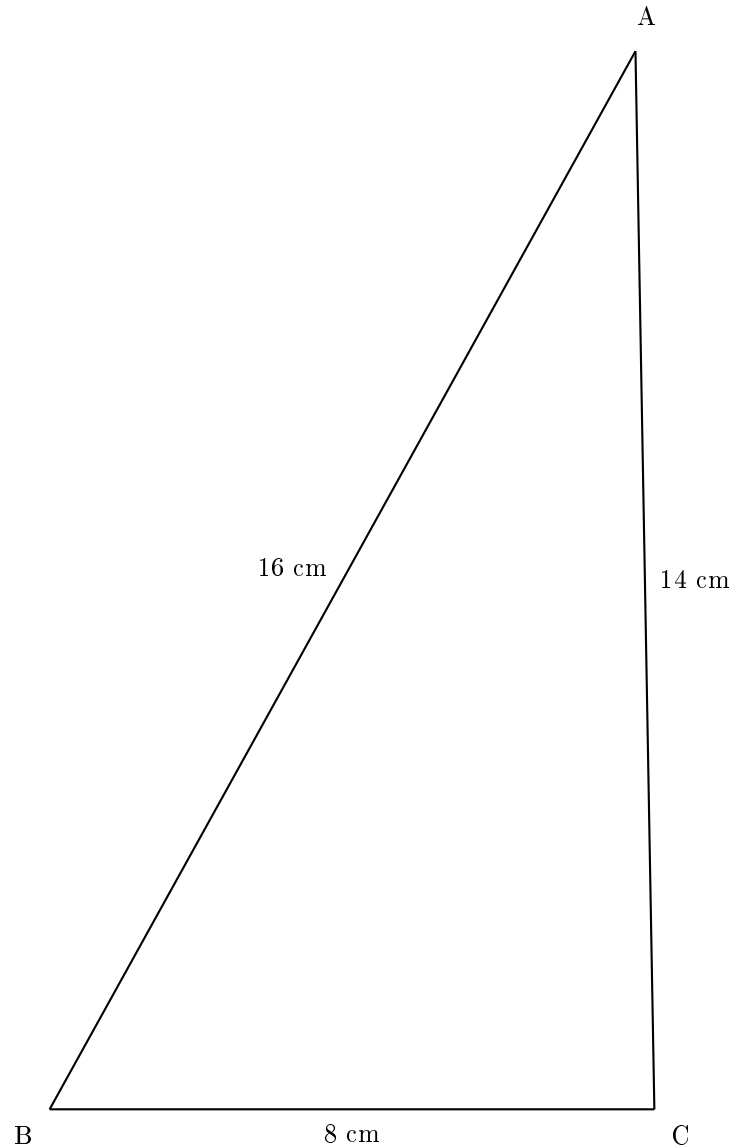
Partie géométrique

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle tel que : $AB = 16$ cm, $AC = 14$ cm et $BC = 8$ cm.

- a. Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.



- b. Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

Le plus grand côté du triangle est $[AB]$. Si le triangle est rectangle, son hypoténuse est le côté $[AB]$.

$$AB^2 = 16^2 = \boxed{256}$$

$$AC^2 + BC^2 = 14^2 + 8^2 = 196 + 64 = \boxed{260}$$

Comme on a $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$, on peut en déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle en C.

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

2. Le mathématicien Héron d'Alexandrie (1^{er} siècle), a trouvé une formule permettant de calculer l'aire du triangle : en notant a , b , c les longueurs des trois côtés et p son périmètre, l'aire \mathcal{A} du triangle est donné par la formule :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - a\right) \left(\frac{p}{2} - b\right) \left(\frac{p}{2} - c\right)}$$

Calculer à l'aide de cette formule l'aire du triangle ABC.

Donner le résultat arrondi au cm^2 près.

Calcul du périmètre : $p = 16 + 14 + 8 = 38$.

D'après la formule de Héron,

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{38}{2} \left(\frac{38}{2} - 16\right) \left(\frac{38}{2} - 14\right) \left(\frac{38}{2} - 8\right)} = \sqrt{19 \times 3 \times 5 \times 11} = \sqrt{3135} \approx \boxed{56 \text{ cm}^2}$$

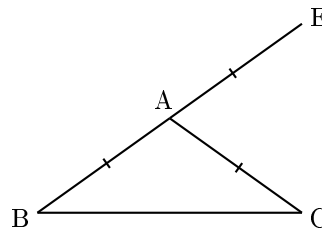
Exercice 2

Dans cet exercice, on étudie la figure ci-contre où :

- ABC est un triangle isocèle tel que

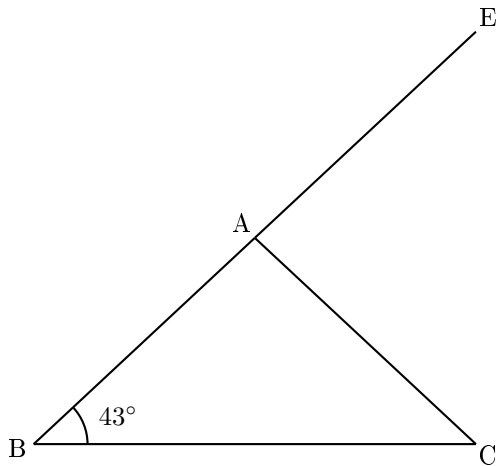
$$AB = AC = 4 \text{ cm}$$

- E est le symétrique de B par rapport à A.



Partie 1 : On se place dans le cas particulier où la mesure de \widehat{ABC} est 43° .

1. Construire la figure en vraie grandeur.



2. Quelle est la nature du triangle BCE? Justifier.

Comme on a $AB = AC = AE$, le triangle BCE est inscrit dans le cercle de diamètre [BE]. Il est donc rectangle en C.

3. Prouver que l'angle \widehat{EAC} mesure 86° .

Dans le cercle de centre A passant par B, E et C, l'angle au centre \widehat{EAC} et l'angle inscrit \widehat{EBC} interceptent le même arc, donc $\widehat{EAC} = 2 \times \widehat{EBC} = 2 \times 43^\circ = \boxed{86^\circ}$

Partie 2 : Dans cette partie, on se place dans le cas général où la mesure de \widehat{ABC} n'est pas donnée.

Jean affirme que pour n'importe quelle valeur de \widehat{ABC} , on a : $\widehat{EAC} = 2\widehat{ABC}$.

Jean a-t-il raison? Faire apparaître sur la copie la démarche utilisée.

Comme dans la partie 1, Dans le cercle de centre A passant par B, E et C, l'angle au centre \widehat{EAC} et l'angle inscrit \widehat{EBC} interceptent le même arc, donc $\widehat{EAC} = 2 \times \widehat{EBC}$.

Jean a donc raison.

Problème

On considère un triangle ABC tel que : $AB = 17,5$ cm ; $BC = 14$ cm ; $AC = 10,5$ cm.

Partie 1

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

$$AB^2 = 17,5^2 = \boxed{306,25}$$

$$BC^2 + AC^2 = 14^2 + 10,5^2 = 196 + 110,25 = \boxed{306,25}$$

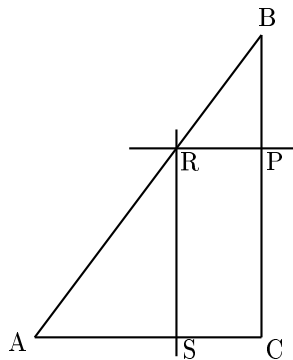
Je remarque que $AB^2 = BC^2 + AC^2$ donc d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, ABC est rectangle en C.

2. Soit P un point du segment [BC].

La parallèle à la droite (AC) passant par P coupe le segment [AB] en R.

La parallèle à la droite (BC) passant par R coupe le segment [AC] en S.

Montrer que le quadrilatère PRSC est un rectangle.



La figure n'est pas en vraie grandeur.

Par construction, PRSC est un parallélogramme. Comme le triangle ABC est rectangle en C, l'angle \widehat{BCA} est droit. Le quadrilatère PRSC est un parallélogramme ayant un angle droit, donc c'est un rectangle.

3. Dans cette question, on suppose que le point P est situé à 5 cm du point B.

- a. Calculer la longueur PR.

Dans le triangle ABC, les droites (RP) et (AC) sont parallèles et les points B, P et C, ainsi que les points B, R et A sont alignés donc d'après la propriété de Thalès, $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$, c'est à dire $\frac{5}{14} = \frac{PR}{10,5}$.

$$\text{D'où } PR = \frac{5 \times 10,5}{14} = \boxed{3,75 \text{ cm}}.$$

- b. Calculer l'aire du rectangle PRSC.

Le point P est sur le segment [BC] donc $PC = BC - BP = 14 - 5 = 9$ cm.

$$\text{L'aire du rectangle PRSC vaut : } PC \times PR = 9 \times 3,75 = \boxed{33,75 \text{ cm}^2}.$$

Partie 2

On déplace le point P sur le segment [BC] et on souhaite savoir quelle est la position du point P pour laquelle l'aire du rectangle PRSC est maximale.

1. L'utilisation d'un tableur a conduit au tableau de valeurs suivant :

Longueur BP en cm	0	1	3	5	8	10	12	14
Aire de PRSC en cm^2	0	9,75	24,75	33,75	36	30	18	0

Indiquer sur la copie les deux valeurs manquantes du tableau.

Justifier par un calcul la valeur trouvée pour $BP = 10$ cm.

Pour $BP = 10$ cm :

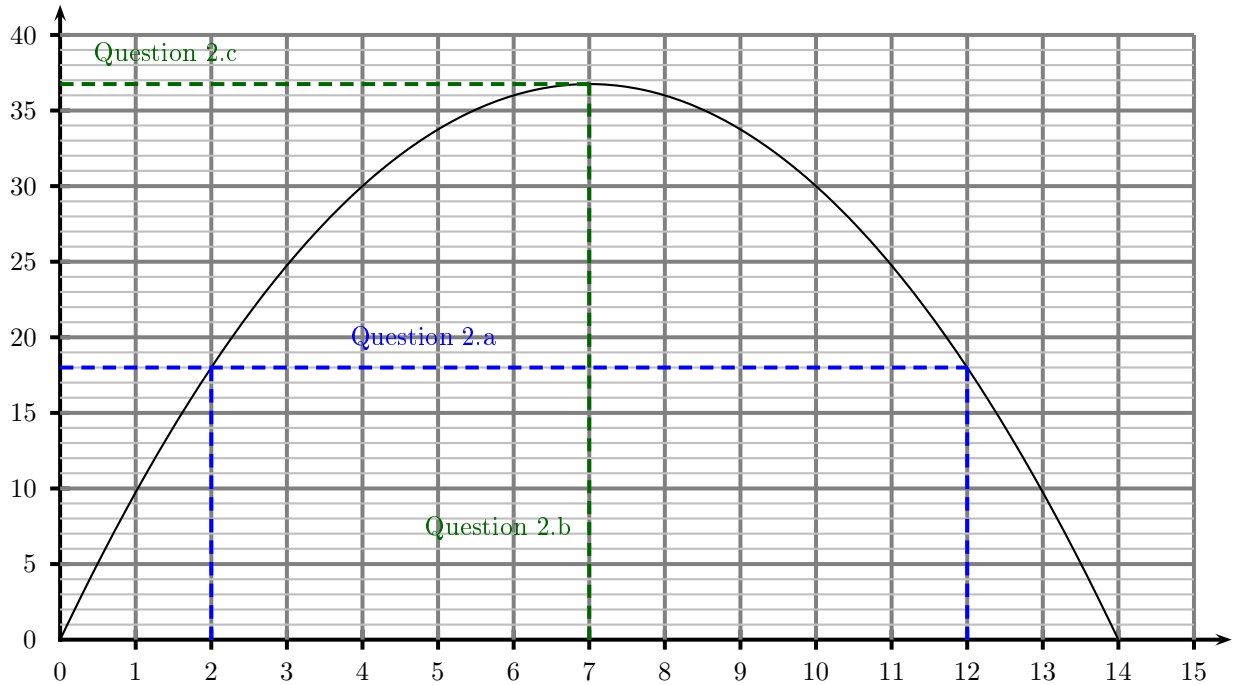
$$\text{Comme dans la partie 1, avec le théorème de Thalès, on trouve que } PR = \frac{10 \times 10,5}{14} = \boxed{7,5 \text{ cm}}.$$

Le point P est sur le segment [BC] donc $PC = BC - BP = 14 - 10 = 4$ cm.

L'aire du rectangle PRSC vaut : $PC \times PR = 4 \times 7,5 = 30 \text{ cm}^2$.

2. Un logiciel a permis d'obtenir la représentation graphique suivante :

Aire du rectangle PRSC en fonction de la longueur BP



À l'aide d'une lecture graphique, donner :

- a. Les valeurs de BP pour lesquelles le rectangle PRSC a une aire de 18 cm^2 .

Sur le graphique, on lit que le rectangle PRSC a une aire de 18 cm^2 pour $BP = 2 \text{ cm}$ et pour $BP = 12 \text{ cm}$.

- b. La valeur de BP pour laquelle l'aire du rectangle semble maximale.

L'aire du rectangle semble maximale pour $BP = 7, \text{cm}$.

- c. Un encadrement à 1 cm^2 près de l'aire maximale du rectangle PRSC.

L'aire maximale du rectangle PRSC est comprise entre 36 cm^2 et 37 cm^2 .

Partie 3

1. Exprimer PC en fonction de BP.

Le point P est sur le segment [BC] donc $PC = BC - BP = 14 - BP$.

2. Démontrer que PR est égale à $0,75 \times BP$.

Dans le triangle ABC, les droites (RP) et (AC) sont parallèles et les points B, P et C, ainsi que les points B, R et A sont alignés donc d'après la propriété de Thalès, $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$, c'est à dire $\frac{BP}{14} = \frac{PR}{10,5}$.

D'où $PR = \frac{BP \times 10,5}{14} = \frac{10,5}{14} \times BP = 0,75 \times BP$.

3. Pour quelle valeur de BP le rectangle PRSC est-il un carré ?

Le rectangle PRSC est un carré lorsque $PC = PR$, c'est à dire pour

$$14 - BP = 0,75 \times BP$$

$$14 = BP + 0,75 \times BP$$

$$14 = 1,75 \times BP$$

$$BP = 14 \div 1,75 = 8 \text{ cm}$$