Correction du sujet bac France juin 2008.

Exercice n°1.

PARTIE A.

1. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 soit A.
Par lecture graphique : $f'(0) = 1$.
Réponse a

2. g est définie lorsque f est strictement positive
Or, f est strictement positive sur $[-5 ; 2[$.
Donc $D_g = [-5 ; 2[$.
Réponse c.

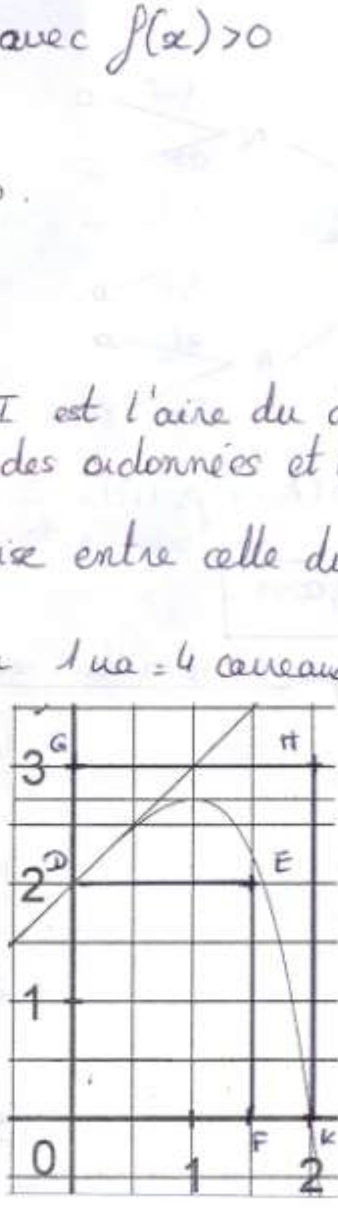
3. $g(0) = \ln(f(0)) = \ln 2$.
Réponse c.

4. $g(x) = \ln(f(x))$ donc $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
Donc $g'(1) = \dfrac{f'(1)}{f(1)} = \dfrac{0}{e} = 0$
Réponse b

5. Graphiquement, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ avec $f(x) > 0$
Or, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.
Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -\infty$.
Réponse a

PARTIE B.

1. f est positive sur $[0 ; 2]$ donc I est l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, (C_f), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ en unités d'aires.
Graphiquement, cette aire est comprise entre celle du rectangle ODEF et celle du rectangle OGHK.
$\mathcal{A}_{ODEF} = 12$ carreaux $= 3$ ua car 1 ua $= 4$ carreaux.
$\mathcal{A}_{OGHK} = 24$ carreaux $= 6$ ua
donc $I \in [3, 6]$
Réponse b.



2. Le sens de variation de f nous donne le signe de sa dérivée f'.

x	-5		1		$\frac{5}{2}$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

La seule courbe correspondant est (C_3).
Réponse c.

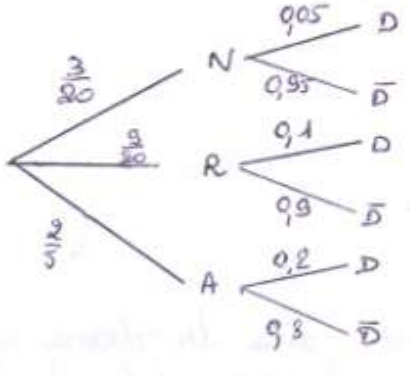
3. $F' = f$ donc le signe de f nous donne le sens de variation de F.

x	-5		2		$\frac{5}{2}$
$F'(x) = f(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

La seule courbe correspondant est (C_1).
Réponse a.

Exercice n°2.

1.



$p(A) = 1 - \frac{3}{20} - \frac{9}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

2. $p(N \cap D) = p(N) \times p_N(D) = \frac{3}{20} \times \frac{5}{100} = \frac{3}{400}$

$\boxed{p(N \cap D) = \frac{3}{400} = 0{,}0075}$

La probabilité que l'ordinateur soit neuf et défaillant est de 0,0075

3. N, R et A forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(D) = p(N \cap D) + p(R \cap D) + p(A \cap D)$$
$$= 0{,}0075 + p(R) \times p_R(D) + p(A) \times p_A(D)$$
$$= 0{,}0075 + \frac{9}{20} \times \frac{10}{100} + \frac{2}{5} \times \frac{20}{100} = 0{,}0075 + 0{,}045 + 0{,}08$$

$\boxed{p(D) = 0{,}1325}$

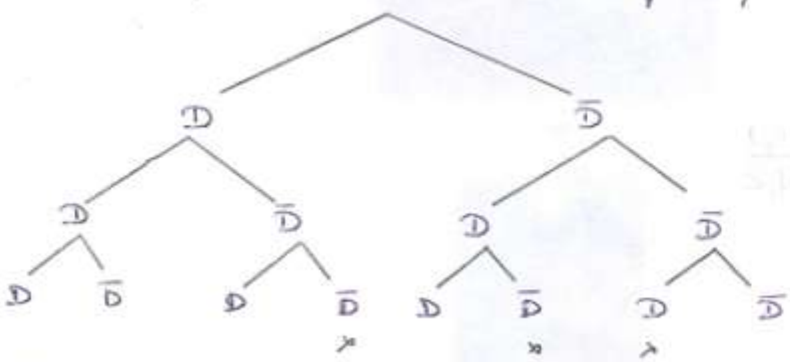
La probabilité que l'ordinateur soit défaillant est de 0,1325.

4. $p_D(A) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}1325} = \dfrac{800}{1325} = \dfrac{32 \times \cancel{25}}{53 \times \cancel{25}}$

$\boxed{p_D(A) = \dfrac{32}{53} \simeq 0{,}60}$

La probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant est d'environ 0,60.

5. On répète trois fois successivement de façon indépendante la même expérience à deux issues. On a donc un schéma de Bernoulli qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}1325$.



$3 \times 0{,}1325 \times (1 - 0{,}1325)^2 \simeq 0{,}30$.

La probabilité qu'exactement un des ordinateurs soit défaillant est d'environ 0,30.

Exercice n° 3.

PARTIE I.

2. a) $\bar{x} = \dfrac{0+1+2+3+4}{5} = 2$.

$\bar{y} = \dfrac{81{,}3 + 92{,}3 + 109{,}7 + 128{,}5 + 131{,}2}{5} = 108{,}6$.

$G(2\,;\,108{,}6)$

b) Avec la calculatrice

$(D) : y = 13{,}6x + 81{,}4$.

c) Voir graphique.

(D) passe par G et le point de coordonnées $(0\,;\,81{,}4)$.

d) 2007 est l'année de rang 8.

$y_8 \simeq 13{,}6 \times 8 + 81{,}4$

$y_8 \simeq 190{,}2$.

En 2007, on peut estimer que environ 190,2 milliers de véhicules seront vendus.

3. a) Voir graphique

b) Les nouveaux points sont très éloignés des points précédents et montrent une décroissance alors que les premiers points donnaient une croissance. Donc l'ajustement affine n'est plus adapté.

c) La courbe doit passer par $A(4\,;\,131{,}2)$ et $B(8\,;\,76{,}1)$ donc :

$131{,}2 = e^{4c+d}$ et $76{,}1 = e^{8c+d}$

$\ln 131{,}2 = 4c + d$ et $\ln 76{,}1 = 8c + d$.

On a donc un système :

$$\begin{cases} 4c+d = \ln 131,2 \\ 8c+d = \ln 76,1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \ln 131,2 - 4c \\ 8c + \ln 131,2 - 4c = \ln 76,1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \ln 131,2 - 4c \\ 4c = \ln 76,1 - \ln 131,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \ln 131,2 - 4c \\ 4c = \ln \frac{76,1}{131,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \ln 131,2 - 4c. \\ c = \frac{1}{4} \ln \frac{76,1}{131,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \ln 131,2 - \ln \frac{76,1}{131,2} \\ c = \frac{1}{4} \ln \frac{76,1}{131,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = \ln \frac{131,2}{\frac{76,1}{131,2}} \\ c = \frac{1}{4} \ln \frac{76,1}{131,2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} d = \ln \frac{131,2^2}{76,1} \\ c = \frac{1}{4} \ln \frac{76,1}{131,2} \end{cases}}$$

$$\boxed{d \simeq 5,421 \text{ et } c \simeq -0,136}$$

PARTIE II.

1. $f(x) = e^{-0,136x+5,421} = e^{u(x)}$ avec $u(x) = -0,136x + 5,421$

$f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$ $\qquad u'(x) = -0,136$.

$f'(x) = -0,136\,e^{-0,136x+5,421}$

$e^X > 0$ pour tout réel X et $-0,136 < 0$

Donc $f'(x) < 0$ sur $[4;10]$.

Donc f est strictement décroissante sur $[4;10]$.

2. Voir graphique.

3. a) $f(x) \leq 65$.

$e^{-0,136x+5,421} \leq 65$

$-0,136x + 5,421 \leq \ln 65$.

$-0,136x \leq \ln 65 - 5,421$

$x \geq \frac{\ln 65 - 5,421}{-0,136}$

$x \geq \frac{5,421 - \ln 65}{0,136}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{5,421 - \ln 65}{0,136} ; 10\right]}$$

$$\frac{5,421 - \ln 65}{0,136} \simeq 9,1$$

L'entreprise doit prévoir l'arrêt lors de la 10e année soit en 2009.

b) Voir graphique.