Thème 1 : les débuts de l'arithmétique.

1 Les nombres polygonaux.

1.1 Définition des nombres triangulaires, carrés et pentagonaux.

On appelle $n$ième nombre triangulaire l' entier qui peut s'écrire comme la somme des n premiers nombres entiers consécutifs. Par exemple 21 est le 6éme nombre triangulaire car :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

On appelle $n$ième nombre carré l'entier qui peut s'écrire comme la somme, à partir de 1, des n nombres entiers séparés chacun de 2 unités, c'est-à-dire des n premiers nombres impairs. Par exemple 25 est le cinquième nombre carré car :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

On appelle $n$ième nombre pentagonal l'entier qui peut s'écrire comme la somme, à partir de 1, des n nombres entiers séparés chacun de 3 unités. Par exemple 35 est le cinquième nombre pentagonal car :

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$$

Ces nombres ont été étudiés par les savants grecs de l'antiquité et leur étude a marqué les débuts de l'arithmétique, la science des nombres. Leur appellation est liée à la disposition géométrique imagée par la figure 1.

1.2 Question 1

1.2.1 Question 1-a

Généraliser les définitions données, c'est-à-dire définir ce qu'est le $n$ième nombre hexagonal, le $n$ième nombre heptagonal, le $n$ième nombre octogonal, ..., le $n$ième nombre c-gonal, c'est-à-dire qui peut être imagé grâce à un polygône à c côtés.

1.2.2 Question 1-b

Trouver en fonction de l'entier n des formules qui donnent directement le $n$ième nombre triangulaire, le $n$ième nombre carré, le $n$ième nombre pentagonal, le $n$ième nombre hexagonal.
Trouver en fonction de n et de c une formule qui donne le $n$ième nombre c-gonal. *Indication* : le nième nombre triangulaire est donné par la formule :

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

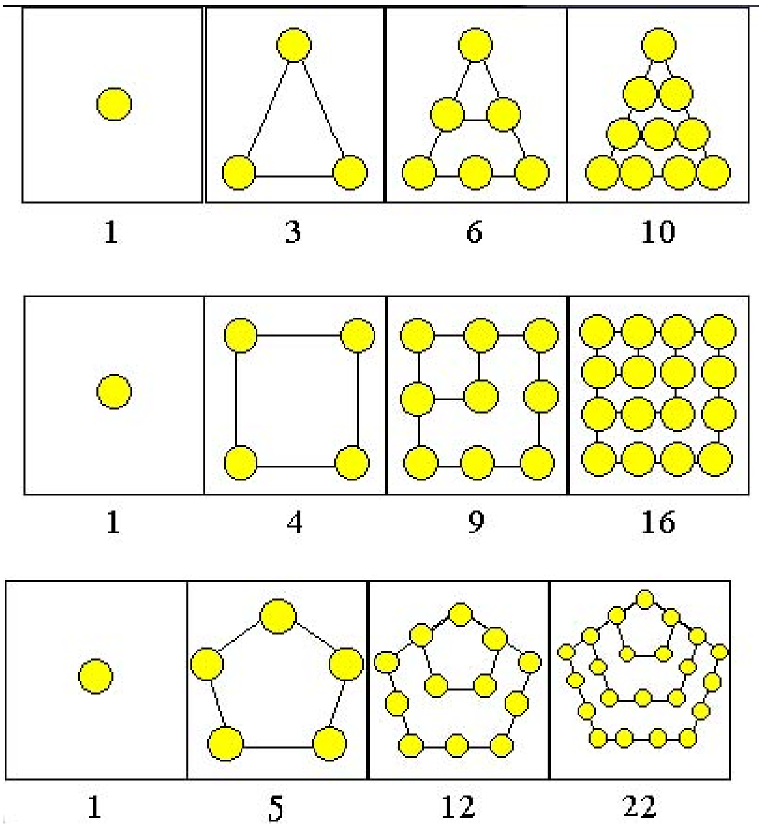

FIG. 1 – Les nombres polygonaux.

1.3 Question 2

1.3.1 Question 2-a

Considérons par exemple 36. Est-il c-gonal et de combien de façons ? Imaginer un algorithme permettant de décider si un nombre entier donné x est c-gonal ou non, et, si oui, de combien de façons ?

1.3.2 Question 2-b

On remarque que le 3ième nombre carré ajouté au deuxième nombre triangulaire donne le 3ième nombre pentagonal. De même le 4ième nombre carré ajouté au troisième nombre triangulaire donne le 4ième nombre pentagonal. De même le 4ième nombre pentagonal ajouté au troisième nombre triangulaire donne le 4ième nombre hexagonal. Généraliser ces résultats.

1.3.3 Question 2-c

Grâce à un tableur, dressez une liste des nombres polygonaux.

1.3.4 Question 2-d

Montrer le résultat suivant, connu de Diophante (250 après JC) :

"Si l'on multiplie un nombre triangulaire par 8 et qu'on ajoute 1 au résultat trouvé,le résultat final est toujours un nombre carré."

2 Les nombres pyramidaux ou polyédriques

2.1 Définition

La figure 2 montre un empilement de boules, chaque étage de boules représentant un nombre triangulaire. Si l'empilement possède n étage, on dit que le nombre total de boules est le $n$ième nombre tétraédrique ou 3-pyramidal ou 3-polyèdrique.

FIG. 2 – La pyramide à base triangle.

La figure 3 montre un empilement de boules, chaque étage représentant un nombre carré. Si l'empilement possède n étage, on dit que le nombre total de boules est le $n$ième nombre 4-pyramidal (ou 4-polyédrique).

FIG. 3 – La pyramide à base carrée.

2.2 Question 3

Trouver des formules donnant, en fonction de n le $n$ième nombre 3-pyramidale et le $n$ième nombre 4-pyramidal. Généralisation ?...