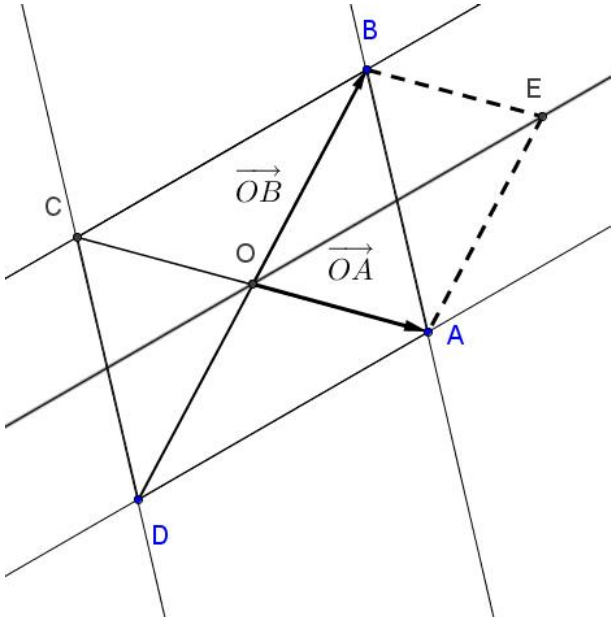
CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ n° 4 - 1S

Exercice 1. 1. Voir le cours pour la méthode : réponse : $3x - 2y - 1 = 0$.

2. Réponse :$\sqrt{3}x - \sqrt{2}y - \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
3. Réponse : $y = -12x + 5$.

Exercice 2. 1. Les coordonnées des points dans $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ sont :



- $A(1;0)$ car $\overrightarrow{OA} = 1 \cdot \overrightarrow{OA} + 0 \cdot \overrightarrow{OB}$.
- $B(0;1)$ car $\overrightarrow{OB} = 0 \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB}$.
- $C(-1;0)$ car $\overrightarrow{OC} = -1 \cdot \overrightarrow{OA} + 0 \cdot \overrightarrow{OB}$.
- $D(0;-1)$ car $\overrightarrow{OD} = 0 \cdot \overrightarrow{OA} + (-1) \cdot \overrightarrow{OB}$.

On procède alors comme dans le cours et voici les réponses :
- (AB) :$x + y - 1 = 0$.
- (BC) :$x - y + 1 = 0$.
- (DC) :$x + y + 1 = 0$.
- (AD) :$-x + y + 1 = 0$.

2. La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}(-1;-1)$. La droite cherchée passe par le point $E(1;1)$ et a pour vecteur directeur par exemple : $\overrightarrow{BC}(-1;-1)$ ou, si on préfère :$\overrightarrow{CB}(1;1)$. La réponse est :$y = x$.

Exercice 3. 1. $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ revient à $\cos x = \cos \dfrac{3\pi}{4}$. Réponse : $\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ revient à $3x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   - On trouve d'une part : $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   - On trouve d'autre part : $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

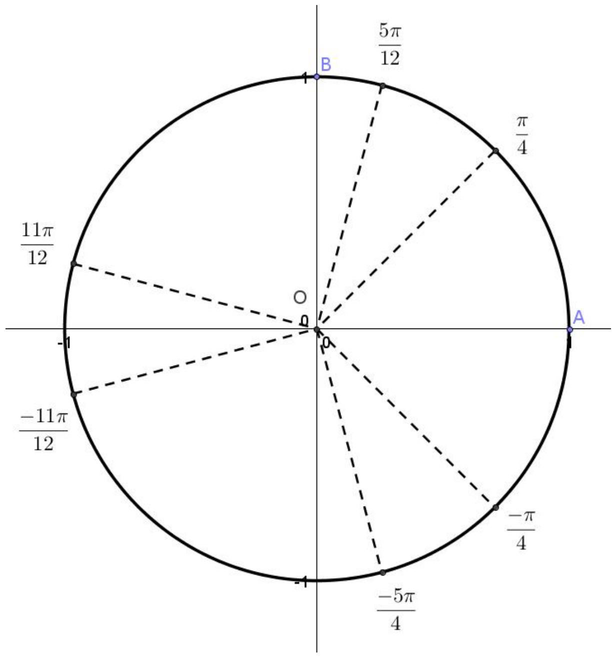
   Pour trouver les solutions dans $]-\pi; +\pi]$, on prend les valeurs de k qui donnent des solutions dans cet intervalle.
   - Dans le premier cas $k = 0, 1, -1$ conviennent et elles seulement. Cela donne comme solutions :

$$\frac{\pi}{4} \qquad \frac{11\pi}{12} \qquad -\frac{5\pi}{12}$$

   - On procède de même dans le second cas et cela donne les solutions :

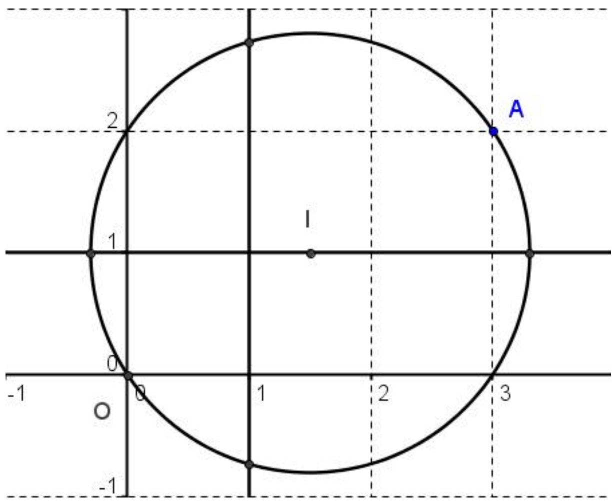
$$-\frac{\pi}{4} \qquad -\frac{11\pi}{12} \qquad \frac{5\pi}{12}$$

3. L'équation $\cos(x + \pi) = (\cos x) - 1$ a les mêmes solutions que $-\cos x = (\cos x) - 1$ soit $\cos x = \dfrac{1}{2}$. C'est du gros classique ! Solutions : $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



4. En résolvant l'équation $C^2 - 3C + 2 = 0$ (d'inconnue C) on trouvera les valeurs que doit avoir $\cos x$. Cette résolution est fastoche : les solutions sont 1 et 2.
   $\cos x = 2$ n'ayant aucune solution, il reste à résoudre $\cos x = 1$ ce qui est un jeu d'enfant. Solutions :$2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. 1. C'est cadeau : $I(\frac{3}{2}; 1)$!



2. C'est bateau : rayon $= \dfrac{OA}{2} = \dfrac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.
3. Un point M est sur $\mathcal{C}$ si et seulement si $IM = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. Cette condition est équivalente à $IM^2 = \dfrac{13}{4}$ car toutes les quantité en jeu sont positives.
4. $IM^2 = (x - \dfrac{3}{2})^2 + (y - 1)^2$. On développe tout ça et on trouve ce qu'il faut :

$$(M \quad \text{est sur le cercle} \quad \mathcal{C}) \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$$

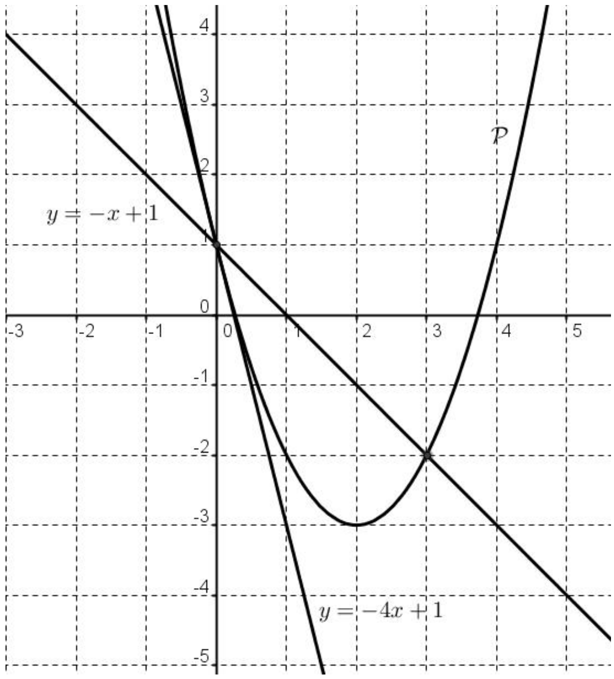
5. On remplace x et y dans $x^2 + y^2 - 3x - 2y$ par les coordonnées des points O, $E(0; 2)$ et $F(3; 0)$ et on trouve à chaque fois 0 !
6. Si un point $(x; 1)$ est sur le cercle, x vérifie :$x^2 + 1^2 - 3x - 2 = 0$. Il faut donc résoudre $x^2 - 3x - 1 = 0$. On trouve deux solutions qui donnent donc les deux points de coordonnées (calculs à vérifier !) :

$$(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; 1) \quad \text{et} \quad (\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; 1)$$

7. Si un point $(1; y)$ est sur le cercle, y vérifie :$1^2 + y^2 - 3 - 2y = 0$. Il faut donc résoudre $y^2 - 2y - 2 = 0$. On trouve deux solutions qui donnent donc les deux points de coordonnées (calculs à vérifier !) :

$$(1; 1 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad (1; 1 - \sqrt{3})$$

Exercice 5. 1. Ces droites ont toutes la même ordonnée à l'origine 1 : elles se coupent donc toutes au point $(0; 1)$!



2. Il faut résoudre $-x + 1 = x^2 - 4x + 1$ soit $x^2 - 3x = 0$ soit $x(x - 3) = 0$. On trouve le point $(0; 1)$ (pas étonnant !) et le point $(3; f(3))$ soit $(3; -2)$.
3. Il faut résoudre $mx + 1 = x^2 - 4x + 1$ soit $x^2 - (4 + m)x = 0$ soit $x(x - 4 - m) = 0$. On trouve le point $(0; 1)$ (encore !) et le point $(4 + m; f(4 + m))$ soit $(4 + m; m^2 + 4m + 1)$.
4. La droite $\mathcal{D}(m)$ a un seul point commun avec $\mathcal{P}$ lorsque le point de coordonnées $(4 + m; m^2 + 4m + 1)$ est confondu avec le point $(0; 1)$. Cela se produit lorsque $m = -4$ (première coordonnée nulle) car $(-4)^2 + 4(-4) + 1 = 1$ (la deuxième coordonnée est bien 1.