CORRECTION DEVOIR MAISON n° 5 – 1S-

Exercice 1.
On développe le polynôme $(x^2+rx+1)(x^2+sx+1)$, on le réduit et on l'ordonne.
Si on veut qu'il soit le même que $x^4+5x^3+8x^2+5x+1$, il suffit que $s+r=5$ et $rs=6$. r et s sont donc les solutions de $X^2-5X+6=0$ c-a-d $r=3$ et $s=2$. (s et r sont interchangeables)
On résout alors $x^2+3x+1=0$ et $x^2+2x+1=0$ et on trouve les solutions :

$$-1 \qquad \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Réfléchissons sur les équations de type :

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\alpha x+1=0$$

Par la même méthode, on trouve que r et s sont solutions de $X^2-\alpha X+\beta-2=0$ dont le discriminant est :

$$\alpha^2-4\beta+8$$

Si cette quantité est positive ou nul, on pourra factoriser le polynôme du quatrième degré en deux polynômes du second degré et résoudre.
On pourrait se poser le problème suivant : est-ce que l'équation du quatrième degré peut quand même avoir une solution même si le polynôme ne peut pas se factoriser par cette méthode ?

Exercice 2.
1. (a) $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ car $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$.
   (b) $\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}$ car $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$.
   (c) $\cos\frac{4\pi}{5}=2(\cos\frac{2\pi}{5})^2-1$ et $\cos\frac{2\pi}{5}=2(\cos\frac{\pi}{5})^2-1$.C'est l'application de la formule admise en utilisant également la formule $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.
   (d) $(\cos\frac{\pi}{5})^2=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}$.Cela résulte immédiatement de la deuxième égalité établie en (c).
2. On remarque d'après 1.(b) que :

$$(\cos\frac{4\pi}{5})^2=(\cos\frac{\pi}{5})^2$$

   En utilisant 1.(c) et 1.(d) :

$$(2(\cos\frac{2\pi}{5})^2-1)^2=\frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}$$

   Si on pose $X=\cos\frac{2\pi}{5}$, la dernière égalité s'écrit :$(2X^2-1)^2=\frac{1+X}{2}$. En développant,réduisant et ordonnant : $8X^4-8X^2-X+1=0$ Cela signifie que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une des solutions de l'équation $8X^4-8X^2-X+1=0$.
3. On développe, réduit et ordonne $(X-1)(2X+1)(4X^2+2X-1)$
4. L'équation $8X^4-8X^2-X+1=0$ se ramène donc une équation produit qui possède 4 solutions (facile) :

$$1;-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

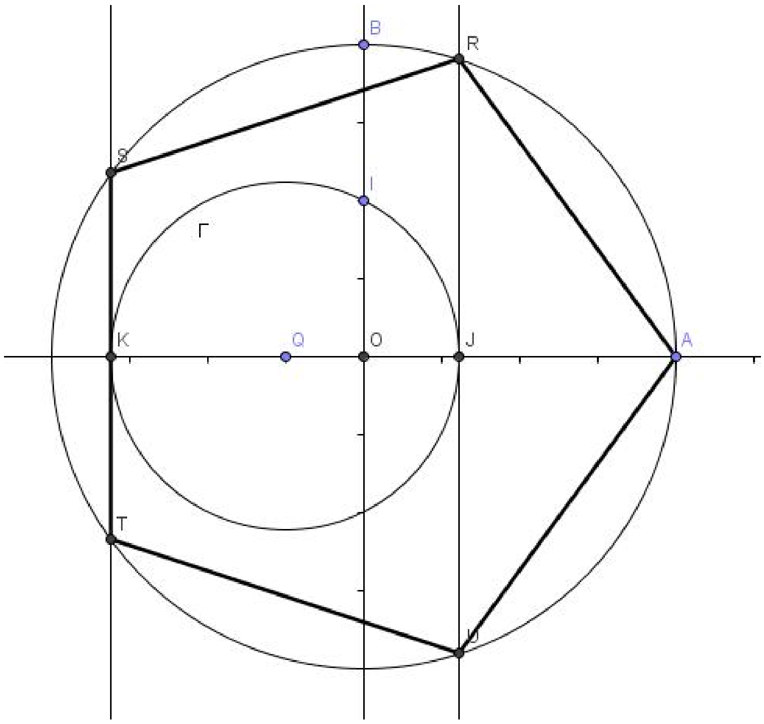
Par élimination (facile) on trouve :

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

En utilisant $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ et les formules de l'exercice 1, question 4, on trouve :

$$\boxed{\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-10}}{4}} \quad \boxed{\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}} \quad \boxed{\sin(\frac{4\pi}{5}) = \frac{\sqrt{-2\sqrt{5}+10}}{4}}$$

Exercice 3. 1. Voilà la figure (grand classique !).



L'idée est de montrer que cette construction, en supposant qu'elle soit *parfaite*(qu'est-ce que ça veut dire ?), donnerait un pentagone régulier *parfait*. Cela revient à montrer que les angles sont *parfaitement* des angles de $2\pi/5$, c'est-à-dire que leurs cosinus ont comme valeur *exacte* $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

2. On calcule $QI = \sqrt{(1/4)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{5}/4$. On calcule $OJ = QJ - OQ = (\sqrt{5}-1)/4$. On en déduit :

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

On calcule ensuite $OK = OQ + QI = (\sqrt{5}+1)/4$ et on en déduit :

$$\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OS}) = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

D'après les valeurs exactes trouvées déans l'exercice 2 :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR}) = \frac{2\pi}{5} \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OS}) = \frac{4\pi}{5}$$

On en déduit, en utilisant aussi la symétrie de la construction par rapport à (OA) :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR}) = (\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OS}) = (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OT}) = (\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OU}) = (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{5}$$

La construction donne bien un pentagone régulier.