DEVOIR MAISON n° 5 – 1S- pour le 3 janvier 2012

Exercice 1.
Exercice proposé par Mr. Leonhard Euler en 1770.
On considère l'équation suivante :

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$$

Décomposer le polynôme sous la forme $(x^2 + rx + 1)(x^2 + sx + 1)$ et trouver les quatre solutions de cette équation.
(*A votre avis, peut on tirer de cet exercice une méthode générale de résolution de certaines équations du quatrième degré ? Quels sont les dates et les principaux travaux de Mr.Leonhard Euler ?*)

Exercice 2.
Dans cet exercice on calcule les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$.

1. Montrer que :
   (a) $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$.
   (b) $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$.
   (c) $\cos\frac{4\pi}{5} = 2(\cos\frac{2\pi}{5})^2 - 1$ et $\cos\frac{2\pi}{5} = 2(\cos\frac{\pi}{5})^2 - 1$.
   (On admet la formule $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$ que nous démontrerons dans quelques temps !)
   (d) $(\cos\frac{\pi}{5})^2 = \frac{1+\cos\frac{2\pi}{5}}{2}$.
2. On pose $X = \cos\frac{2\pi}{5}$. Montrer d'après 1 que :
$$8X^4 - 8X^2 - X + 1 = 0$$
3. Montrer que
$$8X^4 - 8X^2 - X + 1 = (X-1)(2X+1)(4X^2 + 2X - 1)$$
4. En déduire les valeurs exactes annoncées.

Exercice 3.
Dans cet exercice on décrit une construction exacte du pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ *et on démontre sa validité.*

1. **La construction.** Soit I le milieu de $[OB]$. Soit Q défini par $\overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$. Tracer le cercle Γ de centre Q et de rayon QI qui coupe (OA) en J et K (J du côté de A). Les tangentes en K et J au cercle Γ coupent le cercle en 4 points qui font, avec A, un pentagone régulier.
2. **Preuve de la construction.** On appelle A, R, S, T, U le pentagone construit (en tournant dans le sens trigonométrique). Montrer que :
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR}) = \frac{2\pi}{5} \qquad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OS}) = \frac{4\pi}{5}$$
   (On utilisera l'exercice 2)
   Conclure.

Exercice 4.
Si vous avez beaucoup de temps ou juste « envie de faire des maths »(il y en a à qui cette malédiction advient !)je vous conseille l'exercice 89 page 201, éventuellement le 90 de la même page…Ce sont des exercices qui ne manquent pas de sel !