

CORRECTION RAPIDE DU DEVOIR MAISON n° 4 – 1S

Exercice 1. 1. Dès que la position de M est connue sur la droite (BC) , les vecteurs colinéaires \overrightarrow{MB} et \overrightarrow{MC} sont parfaitement connus ainsi que le coefficient de colinéarité qui est x . De même pour les réels y, z .
Supposons que $x = 1$. On a alors $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$, d'où $\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, c'est impossible, puisque ABC est un triangle non aplati. De même pour y, z . On peut remarquer que $x \neq 0$ (et de même y, z) car cela donnerait M en B , ce qui est exclu par l'énoncé.

2. On montre :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-x} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{x}{1-x} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Il suffit d'écrire, en utilisant la relation de Chasles : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{MA} + x \cdot \overrightarrow{AB}$ et de regrouper comme il faut ! On a donc : $M(\frac{1}{1-x}; -\frac{x}{1-x})$ dans le repère choisi.

De même on trouve : $N(0; \frac{1}{1-y})$ et $P(-\frac{z}{1-z}; 0)$.

3. On calcule les coordonnées des vecteurs voulus grâce aux coordonnées de leurs extrémités.

$$\overrightarrow{PN}(\frac{z}{1-z}; \frac{1}{1-y}) \text{ et } \overrightarrow{NM}(\frac{1}{1-x}; -\frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-y}).$$

4. Comme M, N, P sont alignés, leurs coordonnées vérifient :

$$\frac{z}{1-z} \times [-\frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-y}] - \frac{1}{1-y} \times \frac{1}{1-x} = 0$$

Un calcul soigneux conduit (en simplifiant) à $xyz = 1$.

Exercice 2.

Dans le triangle ABE : $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}) = \pi$. On en déduit que : $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{4}$ (à 2π près).

En utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés :

$$(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) + \pi + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

En remplaçant par les mesures connues de ces angles orientés on trouve : $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AC}) = \pi/12$ (à 2π près)

Exercice 3.

L'équation : $\cos x = \sin 2x$ est équivalente à l'équation : $\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$.

Deux réels ont leurs cosinus égaux lorsqu'ils sont égaux (à $k \times 2\pi$ près) ou opposés (à $k \times 2\pi$ près).

Résoudre l'équation revient à trouver les réels x tels que :

$$x = \frac{\pi}{2} - 2x + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -(\frac{\pi}{2} - 2x + k \times 2\pi)$$

On trouve d'une part $x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + k \times \frac{2\pi}{3}$ Finalement on trouve les solutions :

$$\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \quad \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \quad \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \quad \frac{-\pi}{2} + k \times 2\pi$$

Exercice 4.

Exercice du livre numéro 74 page 174. Je traite directement le cas général. Le disque entier a une aire de π (rayon 1). L'aire du secteur angulaire est proportionnel à l'angle en radian, un angle de 2π correspondant à l'aire total. L'aire est donc $\frac{\alpha}{2}$.

L'aire du triangle est de manière évidente ou presque : $\frac{1}{2} \sin \alpha$ (base 1 et hauteur $\sin \alpha$).

L'aire coloriée est donc : $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2}$.