DEVOIR MAISON n° 2 – 1S3 –oct 11

Exercice 1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes

1. $2x + \sqrt{2} = 4 - x\sqrt{2}$
2. $x - \sqrt{3} < \sqrt{3}x - 9$
3. $x^2 + 1 \geq 2x$
4. $x^2 + 3 = 0$
5. $\dfrac{3}{x} < x$

Exercice 2.
Etablissez le sens de variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-5}{\sqrt{x^2+1}}$ en supposant connu le sens de variations de la fonction « carré ».

Exercice 3.
L'objectif de cet exercice est de montrer l'identité remarquable suivante, dûe au mathématicien indien Ramanujan : quels que soient les réels a et b :

$$(3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 + (4a^2 - 4ab + 6b^2)^3 = (-5a^2 + 5ab + 3b^2)^3 + (6a^2 - 4ab + 4b^2)^3$$

Cet exercice de calcul est destiné à vous aguerrir ! Pour cela, je vous conseille de suivre le plan suivant :

1. On suppose connue l'identité : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$ et on l'utilise pour développer :

   $$(3a^2{+}5ab{-}5b^2)^2 \quad \text{puis} \quad (4a^2{-}4ab{+}6b^2)^2 \quad \text{puis} \quad (-5a^2{+}5ab{+}3b^2)^2 \quad \text{puis} \quad (6a^2{-}4ab{+}4b^2)^2$$

2. Ensuite on utilise la distributivité pour calculer successivement les quatre cubes du type :

   $$(3a^2 + 5ab - 5b^2)^3 = (3a^2 + 5ab - 5b^2)(3a^2 + 5ab - 5b^2)^2$$

3. reste ensuite à regrouper les termes des deux sommes (membres de gauche et de droite) et de vérifier que l'on trouve bien les mêmes expressions.

Maintenant, si vous ne l'avez pas déjà fait, observez attentivement cette identité et remarquez ce qui fait son élégance.

Autre méthode. Etablissez ou admettez l'identité suivante :

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 4xyz$$

Ne pouvez vous pas en déduire par un raisonnement, sans beaucoup de calculs, l'identité étudiée ?