



TRENTE-TROISIEME OLYMPIADE MATHEMATIQUE BELGE
MAXI FINALE 2008

1. Soient r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, p le périmètre et c la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

(a) Démontrer que

$$\frac{p}{c} - \frac{r}{R} = 2.$$

(b) Parmi tous les triangles rectangles, quelle est la plus grande valeur que peut prendre le rapport $\frac{r}{R}$? Pour quels triangles rectangles ce maximum est-il atteint?

2. Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} satisfaisant les deux conditions

1) quel que soit le réel x , on a $f(x) \leq x$;

2) quels que soient les réels x et y , on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

3. Soient r un nombre réel strictement positif et n un nombre naturel supérieur ou égal à 3. Dans le plan, n points sont donnés et, quel que soit le choix de trois de ces points, il y en a au moins deux dont la distance est inférieure ou égale à r . Montrer qu'il existe alors deux disques de rayon r dont la réunion contient les n points considérés.

4. Sachant que les nombres entiers $X + Y + Z$ et $X^2 + Y^2 + Z^2$ sont multiples de 6, démontrer que

(a) si X , Y et Z sont des nombres entiers, $X^n + Y^n + Z^n$ est un nombre entier multiple de 6 pour tout n naturel non nul;

(b) si X , Y et Z sont des nombres réels et si le produit XYZ est un nombre entier pair, $X^3 + Y^3 + Z^3$ est un nombre entier multiple de 6;

(c) si X , Y et Z sont des nombres réels et si le produit XYZ est un nombre entier pair, $X^n + Y^n + Z^n$ est un nombre entier multiple de 6 pour tout n naturel non nul.

Prière de répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.

Chaque solution doit être rédigée et soigneusement justifiée!

Ne vous contentez donc pas de répondre "oui" ou "non" ou de donner un exemple.

Mercredi 30 avril 2008